Mathematik für Physiker III
Universität Bonn, Ws 2013/14

Prof. Dr. Jens Franke
Jan Büthe

# Übungsblatt 6

Abgabe am 4.12.2013
in der Vorlesung

**Aufgabe 1** (5 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und es gelte $z \in U \Rightarrow \overline{z} \in U$. Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und es gelte $|f(t)| = 1$ für $t \in U \cap \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f(z)\overline{f(\overline{z})} = 1$ für alle $z \in U$ gilt.

**Aufgabe 2** (5 Punkte)**.** Sei $f(z) = e^{1/z}$. Geben Sie für jedes $w \in \mathbb{C}$ eine Folge $z_n$ an, sodass

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$$

gilt.

**Aufgabe 3** (5 Punkte)**.** Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen und seien $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Zeigen Sie, dass für $z \in U$ und $y = f(z)$ die folgenden Aussagen gelten.

1. Wenn $f$ im Punkt $z$ komplex differenzierbar ist mit $f'(z) \neq 0$ und wenn $g$ im Punkt $y$ nicht komplex differenzierbar ist, so ist $g \circ f$ im Punkt $z$ nicht komplex differenzierbar.

2. Wenn $g$ im Punkt $y$ komplex differenzierbar ist mit $g'(y) \neq 0$ und wenn $f$ im Punkt $z$ nicht komplex differenzierbar ist, so ist $g \circ f$ im Punkt $z$ nicht komplex differenzierbar.

Hinweis: Betrachten Sie das totale Differenzial von $g \circ f$ und zeigen Sie, dass die Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen für dieses die komplexe Differenzierbarkeit von $g$ bzw. $f$ impliziert.

**Aufgabe 4** (5 Punkte)**.** Seien $U$ und $f$ wie in Aufgabe 4 des vorangegangenen Übungsblatts und sei

$$V = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\Re z| < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $f$ eine holomorphe Fortsetzung des Arkustangens definiert und dass $f(\tan(z)) = z$ und $\tan(f(w)) = w$ für alle $w \in U$ und $z \in V$ gilt. Dabei dürfen Sie alles verwenden, was Sie über den Tangens und Arkustangens im Reellen wissen.

Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass $f(U) \subset V$ und $\tan(V) \subset U$ gilt. Wenn man sich einmal davon überzeugt hat, dass $f(t) = \arctan(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ gilt, lassen sich die Umkehreigenschaften aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen folgern.