Prof. Dr. Jens Franke
Jan Büthe

Übungsblatt 4

Abgabe am 20.11.2013
in der Vorlesung

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei $r > 0$ und sei f auf einer Umgebung von $B_r(0)$ holomorph. Drücken Sie für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|z| < r$ das Kurvenintegral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2 - z^2}\, d\zeta$$

durch eine endliche Linearkombination von Funktionswerten von f aus. Berechnen Sie sodann den Grenzwert für $z \to 0$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Berechnen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - iz^2 - z + i}$$

in den Punkten 0 und 2 und geben Sie jeweils den Konvergenzradius an.

Aufgabe 3 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip, 5 Punkte)**.** Es sei $f(z)$ eine in $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ holomorphe und auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \geq 0\}$ stetige und nullstellenfreie Funktion, die für $t \in \mathbb{R}$ der Bedingung $|f(t)| = 1$ genügt. Zeigen Sie, dass mit $f(z) = \left(\overline{f(\overline{z})}\right)^{-1}$ für $\Im(z) < 0$ eine analytische Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$ gegeben ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Sei $R > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum a_n z^n$. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^{2n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$