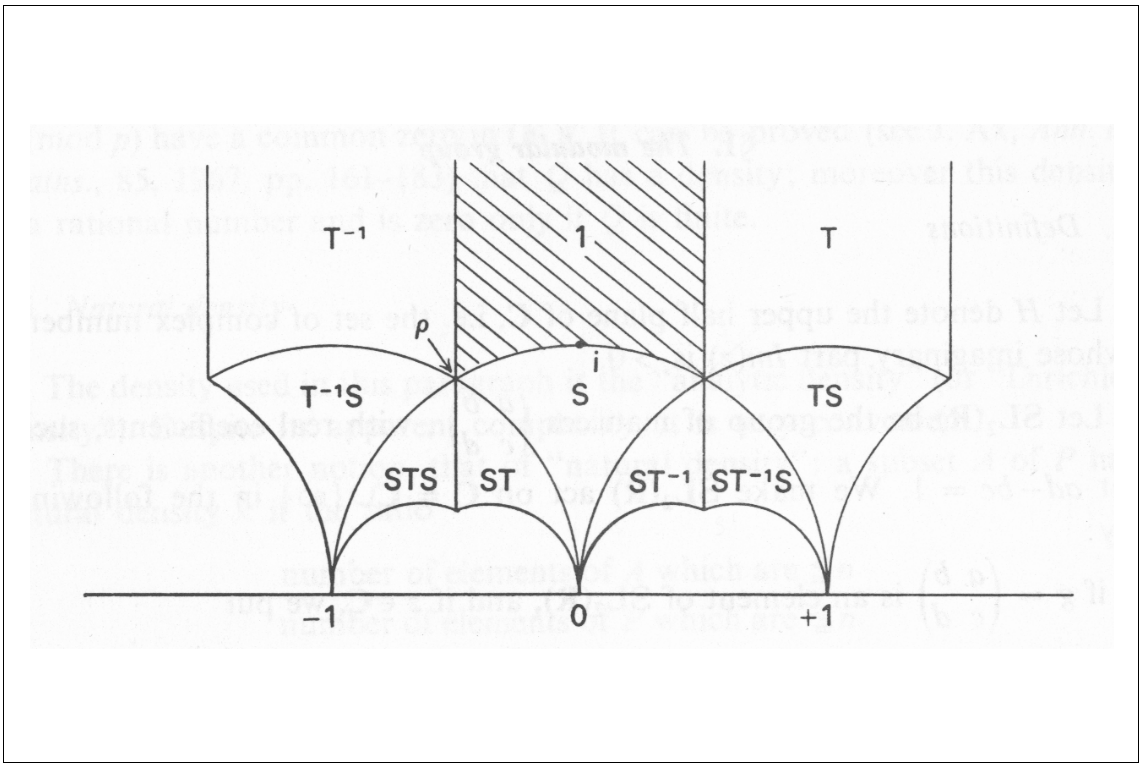
Übungsaufgaben zur Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2014

Blatt 4 Abgabetermin : Montag, 5.5.2014



Transformationen des Fundamentalbereichs für die $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-Wirkung auf der oberen Halbebene.

Aufgabe 1 (Doppelverhältnis)

Für paarweise verschiedene $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ definieren wir das Doppelverhältnis

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)}.$$

(Lässt sich diese Definition sinnvoll auf paarweise verschiedene $z_j \in \bar{\mathbb{C}}$ ausdehnen?)

1. Sind $z_1, \ldots, z_4$ festgehalten, so gibt es 24 Anordnungen als 4-Tupel. Auf der Menge dieser Tupel operiert die Gruppe S_4. Sei nun $\lambda = \mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Zeige, dass das Doppelverhältnis der Permutationen von $(z_1, \ldots, z_4)$ nur Werte in

$$\left\{ \lambda; \quad \frac{1}{\lambda}; \quad 1 - \lambda; \quad \frac{1}{1-\lambda}; \quad \frac{\lambda}{\lambda - 1}; \quad \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right\} \tag{1}$$

annimmt.

2. Zeige, dass die von den Möbiustransformationen (als Funktionen von λ) in (1) erzeugte Gruppe zur S_3 isomorph ist. Dies definiert eine Abbildung $S_4 \to S_3$. Bestimme ihren Kern. (Ein anderer Weg diese Abbildung zu konstruieren ist, die S_4 auf der Menge der ungeordneten $2+2$ Zerlegungen einer vierelementigen Menge wirken zu lassen.)
3. Zeige, dass für jede Möbiustransformation g_A mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$

$$\mathrm{DV}(g_A(z_1), g_A(z_2), g_A(z_3), g_A(z_4)) = \mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

   gilt.
4. Zeige, dass die Funktion

$$f(z) = \mathrm{DV}(z, z_2, z_3, z_4)$$

   die eindeutig bestimmte Möbiustransformation ist, die z_2, z_3 und z_4 auf 1, 0 und ∞ abbildet.

Aufgabe 2 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)
Bestimme alle Punkte in denen die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind.

$$f(z) = \Re(z); \quad f(z) = \cos(z^2); \quad f(z) = |z|^2; \quad f(x+iy) = xy - 2ixy;$$
$$f(x+iy) = -6(\cos(x) + i\sin(x)) + (2-2i)y^3 + 15(y^2+2y); \quad f(z) = e^{\Re(z)}.$$

Aufgabe 3 (Abhängigkeit zwischen Real- und Imaginärteil)
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, und es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Beweise die folgenden Aussagen.

1. Ist $g\colon U \to C$ eine weitere holomorphe Funktion mit $\Re g = \Re f$, so ist $\Im(f-g)$ in U konstant.
2. Nimmt f in U nur reelle Werte an, so ist f in U konstant.
3. Ist $\Re f$ ein Polynom in $x = \Re(z)$ und $y = \Im(z)$, so ist auch $\Im f$ ein Polynom in x und y.

Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass f im dritten Fall schon ein komplexes Polynom sein muss. Allerdings empfiehlt es sich, diesen Aufgabenteil auf einen späteren Zeitpunkt im Semester zu verschieben.

Aufgabe 4 (Logarithmus und Exponentialfunktion) Es sei

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

die Exponentialfunktion und es bezeichne $\log\colon \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ den Hauptzweig des Logarithmus.

1. Zeige, dass $\exp(z)$ an jeder Stelle komplex differenzierbar ist. Folgere daraus, dass log ebenfalls an jeder Stelle in $\mathbb{C}^-$ komplex differenzierbar ist.
2. Wie im Reellen definiert man nun die allgemeine Potenz z^s für zwei komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}^-$ und $s \in \mathbb{C}$ beliebig als

$$z^s := \exp(s \log(z)).$$

   Zeige, dass z^s nach z komplex differenzierbar mit Ableitungen sx^{s-1} ist.

***Aufgabe 5** (Wirkung der modularen Gruppe)
Es sei $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Gruppe aller Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\det(A) = ad - bc = 1$. Ferner sei

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid |\Re(z)| \leq \frac{1}{2},\ |z| \geq 1 \right\}.$$

Beweise die folgenden Aussagen:

1. Die Gruppe G wird von den Elementen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   erzeugt.

2. Für jedes $z \in \mathbb{H}$ existiert ein $A \in G$ mit $g_A(z) \in \mathcal{D}$, wobei g_A die zu A gehörige Möbiustransformation bezeichnet.
3. Falls $z' = g_A(z)$ mit $z, z' \in \mathcal{D}$ für ein $A \in G$ gilt, so liegen z und z' auf dem Rand von $\mathcal{D}$ und es gilt entweder $z' = z \pm 1 \quad \text{oder} \quad z' = -\frac{1}{z}$.
4. Welchen Raum erhält man, wenn man in $\mathcal{D}$ die obige Identifizierung der Randpunkte vornimmt?