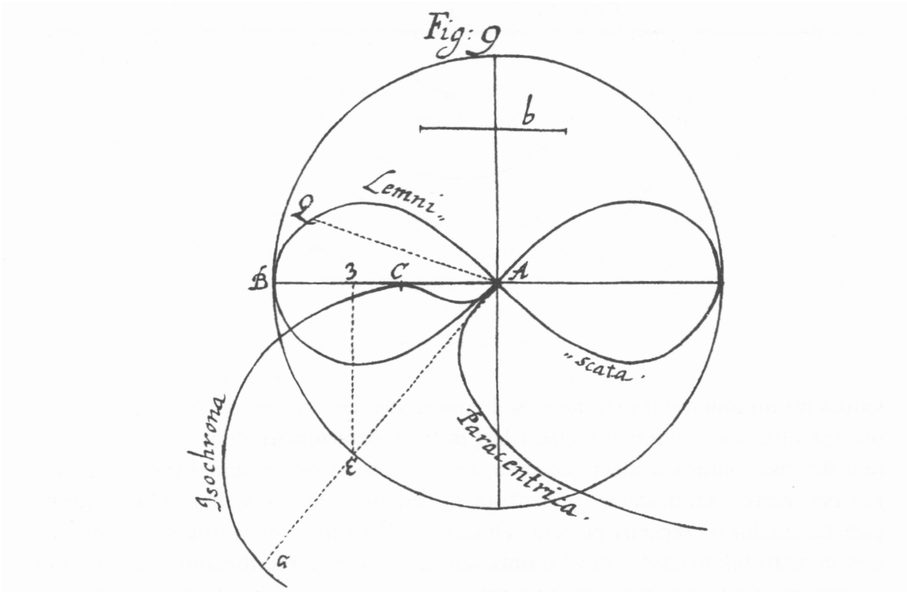
Übungsaufgaben zur Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2014

Blatt 3 Abgabetermin : Montag, 28.4.2014



Eine Lemniskate aus der Hand ihres Erfinders Jakob Bernoulli. Die Lemniskate ist ein Spezialfall der Cassinischen Kurven, die von Cassini als Planetenumlaufbahnen vorgeschlagen wurden. Dies geschah 7 Jahre vor der Veröffentlichung der Newtonschen Gesetze. Allerdings waren zu diesem Zeitpunkt die Keplerschen Gesetze, nach denen Planeten die Sonne auf Ellipsen umlaufen und die durch Newtons Arbeit erklärbar wurden, zu diesem Zeitpunkt schon bekannt.

Aufgabe 1 (Möbiustransformation)

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ eine invertierbare (2×2)-Matrix. Wir definieren die Möbiustransformation zu A auf $\mathbb{C}$, bzw. $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ falls $c \neq 0$, durch

$$g_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Beweise die folgenden Aussagen:

1. Für alle $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ gilt $g_{AB} = g_A \circ g_B$. Ferner gilt $g_{Id} = Id_{\mathbb{C}}$.
2. g_A erhält genau dann die Zerlegung $\mathbb{C} = \mathbb{H}_- \cup \mathbb{R} \cup \mathbb{H}$, wobei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ die obere und $\mathbb{H}_- = -\mathbb{H}$ die untere Halbebene bezeichnet, wenn $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $\det(A) > 0$ gilt.

3. Jedes $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ lässt sich als Produkt von Elementen der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},\ a, d \in \mathbb{C}^\times; \quad \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{C} \tag{1}$$

schreiben.

4. g_A bildet Kreise und Geraden in $\mathbb{C}$ auf Kreise und Geraden ab.
5. Beschreibe die Abbildung g_A für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$: Finde eine Zerlegung von Matrizen der Form (1), beschreibe die Bilder der Geraden $\Re(z) = x_0$ und $\Im(z) = y_0$ unter g_A und bestimme alle Fixpunkte.

Aufgabe 2 (Cayley-Transformation)
Gegeben sei die Abbildung $F\colon \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ durch $F(z) = \frac{z-i}{z+i}$. Beweise die folgenden Aussagen:

1. F bildet die obere Halbebene $\mathbb{H}$ bijektiv auf die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ab.
2. F bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ ab, wobei $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ die Einheitssphäre bezeichnet.
3. Es sei $D_\alpha\colon E \to E$ die Drehung der Einheitskreisscheibe um den Winkel α um den Nullpunkt. Drücke $F \circ D_\alpha \circ F^{-1}$ als Möbiustransformation aus. Erhält diese Transformation die obere Halbebene?

Aufgabe 3 (Stereographische Projektion)
Es sei $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$. Zeige, dass die Abbildung

$$S(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i\frac{x_2}{1 - x_3}$$

eine Bijektion von $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ auf $\mathbb{C}$ definiert.

Sei nun $Q = (Q_1, Q_2, Q_3) \in \mathbb{S}^2$ aus der nördlichen Hemisphäre, d.h. es gelte $Q_3 > 0$. Wir definieren auf $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \mid x_3 < Q_3\}$ die Abbildung f_Q, die jedes derartige x auf den Schnittpunkt der Gerade durch x und Q mit der Ebene $\{(y_1, y_2, 0) \mid (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2\}$ abbildet. Beschreibe das Bild von f_Q in dieser Ebene.

Aufgabe 4 (Die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$)
Für $z \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sei $q(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Beweise die folgenden Aussagen:

1. Die Abbildung q bildet $\mathbb{C}^\times$ surjektiv auf $\mathbb{C}$ ab. Ferner existieren für jedes $w \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ genau zwei Elemente $a, b \in \mathbb{C}^\times$ mit $q(a) = q(b) = w$ und es gilt $ab = 1$.
2. Die Abbildung q bildet $\mathbb{E} \setminus \{0\}$ bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ ab.
3. Die Abbildung q bildet $\mathbb{H}$ bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$ ab.
4. Die Abbildung q bildet Kreislinien $|z| = R < 1$ auf Ellipsen ab. Bestimme ihre Brennpunkte und Achsenlängen.
5. Die Abbildung q bildet jeden Radiusstrahl $z = ct$ mit $|c| = 1$ und $0 < t < 1$ auf einen Hyperbelast ab.

***Aufgabe 5** (Kompaktifizierung der komplexen Zahlen)
Es sei $\bar{\mathbb{C}}$ die Vereinigung $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und wir versehen $\bar{\mathbb{C}}$ mit folgender Topologie: Eine Teilmenge $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ ist genau dann offen in $\bar{\mathbb{C}}$, wenn $U \cap \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ offen ist und $\infty \in U$ impliziert, dass für ein geeignetes R alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ zu U gehören.

1. Zeige, dass sich jede Möbiustransformation f stetig zu einer bijektiven Abbildung $\tilde{f}\colon \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ fortsetzen lässt.
2. Zeige, dass sich die Stereographische Projektion stetig zu einer Bijektion $\tilde{S}\colon \mathbb{S}^2 \to \bar{\mathbb{C}}$ fortsetzen lässt. Was ist das Bild des Schnittes einer Ebene mit $\mathbb{S}^2$ unter $\tilde{S}$. Erkläre damit das Abbildungsverhalten von Kreisen und Geraden unter Möbiustransformationen.