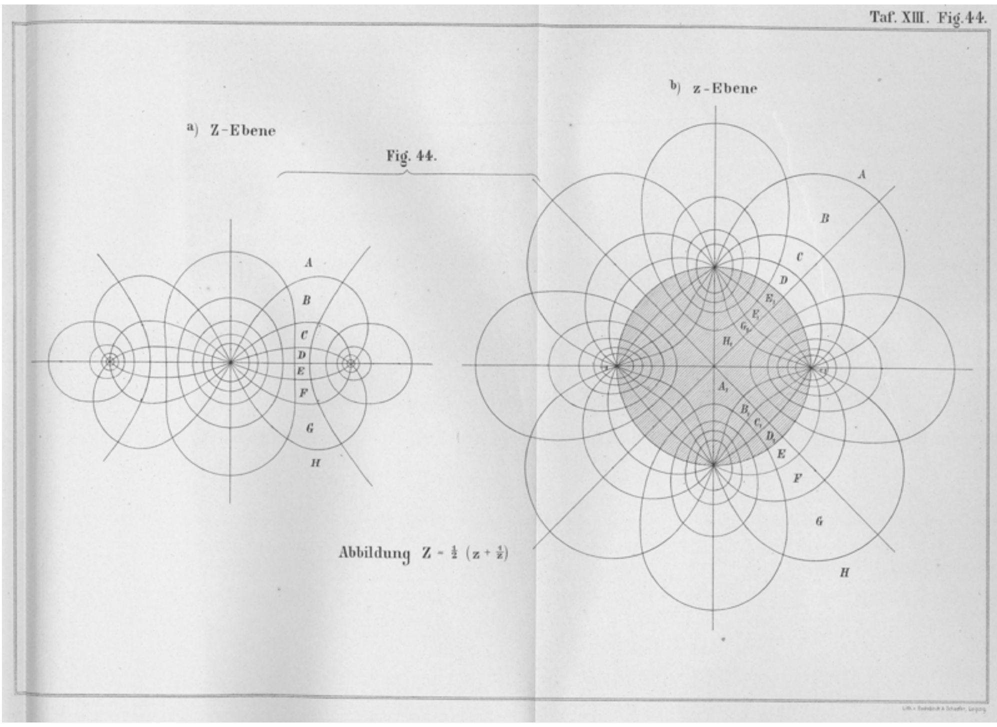
Übungsaufgaben zur Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2014

Blatt 11 Abgabetermin : Montag, 30.6.2014



Lithographische Tafel zur Abbildung $Z = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$. Aus G. Holzmüller: *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen, verbunden mit Anwendung auf mathematische Physik*. Leipzig, 1882.

Aufgabe 1 (Klassifikation isolierter Singularitäten)

Wir betrachten holomorphe Funktionen $f\colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit einer isolierten Singularität in z_0.

1. Entscheide und begründe, ob es sich in den nachfolgenden Fällen um eine Polstelle, eine hebbare oder eine wesentliche Singularität handelt.

$$f(z) = \frac{z^4 + z^3 - 5z^2 + z - 6}{z^3 - 2z^2 + z - 2} \qquad z_0 = 2$$

$$f(z) = \sin\Big(\frac{1}{z^2 + 1}\Big) \qquad z_0 = i$$

$$f(z) = \frac{e^z - e^{-z} - 2z - z^3\cos(z)/3}{(1 - \cos(z))^2} \qquad z_0 = 0$$

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\log(z)} \qquad z_0 = 1$$

2. Die Funktion f habe eine Polstelle in z_0. Zeige, dass die Funktion $\exp(f)$ in z_0 eine wesentliche Singularität hat.

Aufgabe 2 (Laurentreihenentwicklung)
Es bezeichne $\mathrm{Ann}(w; r_1, r_2)$ den durch $r_1 < |z - w| < r_2$ definierten Kreisring. Entwickle die folgenden Funktionen in den angegebenen Kreisringen in eine Laurentreihe.

$$f(z) = \frac{4z - z^2}{(z^2 - 4)(z + 1)} \quad \text{in } \mathrm{Ann}(0; 1, 2),\ \mathrm{Ann}(0; 2, \infty) \text{ und } \mathrm{Ann}(-1; 0, 1).$$

$$f(z) = \frac{1}{(z - c)^n}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ c \in \mathbb{C}^\times \text{ in } \mathrm{Ann}(0; |c|, \infty) \text{ und } \mathrm{Ann}(c; 0, \infty).$$

$$f(z) = \sin\Big(\frac{z - 1}{z}\Big) \quad \text{in } \mathbb{C}^\times.$$

Aufgabe 3 (Formale Laurentreihen)
Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und sei $\mathcal{L}(R)$ der R-Modul der formalen Laurentreihen, also Elementen der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

mit der Addition

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

und der skalaren Multiplikation

$$\lambda \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda a_n) z^n.$$

Sei ferner $\mathcal{L}_f(R)$ der Untermodul der Laurentreihen mit endlichem Hauptteil, also jener Elemente, für welche a_{-n} nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ nicht verschwindet.

1. Zeige, dass $\mathcal{L}_f(R)$ mit der Multiplikation

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k+l=n} a_k b_l\right) z^n$$

   zu einem Ring wird.
2. Bestimme alle Einheiten in $\mathcal{L}_f(R)$ und folgere, dass $\mathcal{L}_f(R)$ genau dann ein Körper ist, wenn R ein Körper ist.

Aufgabe 4 (Null- und Polstellenordnung)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $\mathcal{M}(U)$ die Klasse der meromorphen Funktionen auf U. Für $c \in U$ besitzt jedes $f \in \mathcal{M}(U)$, welches auf einer Umgebung von c nicht identisch verschwindet, eine Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

mit $a_m \neq 0$. Wir nennen diese eindeutig bestimmte ganze Zahl m die Ordnung von f in c und setzen $\mathrm{ord}_c(f) = m$. Für $m = \mathrm{ord}_c(f) > 0$ ist m offenbar die Nullstellenordnung von f in c und für $m < 0$ ist $-m$ die Polstellenordnung.

Beweise die folgenden Rechenregeln:

1. $\mathrm{ord}_c(fg) = \mathrm{ord}_c(f) + \mathrm{ord}_c(g)$.
2. $\mathrm{ord}_c(f + g) \geq \min\{\mathrm{ord}_c(f), \mathrm{ord}_c(g)\}$, wobei genau dann Gleichheit besteht, wenn $\mathrm{ord}_c(f) \neq \mathrm{ord}_c(g)$ gilt.

***Aufgabe 5** (Fourierreihen)
Es bezeichne $S(r_1, r_2)$ den durch $r_1 < \Im(z) < r_2$ definierten Streifen. Sei $f\colon S(r_1, r_2) \to \mathbb{C}$ holomorph mit Periode 1, d. h. es gelte $f(z+1) = f(z)$ für alle $z \in S(r_1, r_2)$. Beweise die folgenden Aussagen:

1. Es existiert genau eine holomorphe Funktion $F\colon A(0; e^{-2\pi r_2}, e^{-2\pi r_1}) \to \mathbb{C}$ mit
$$f(z) = F(\exp(2\pi i z)).$$

2. Die Funktion f besitzt eine eindeutige Darstellung
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$
als Fourierreihe. Diese konvergiert in allen Streifen $S(t_1, t_2)$ mit $r_1 < t_1 < t_2 < r_2$ gleichmäßig.

3. Für jedes $w \in S(r_1, r_2)$ gilt
$$a_n = \int_{[w, w+1]} f(z) e^{-2\pi i n z}\, dz,$$
wobei $[w, w+1]$ die Gerade von w nach $w+1$ bezeichnet.