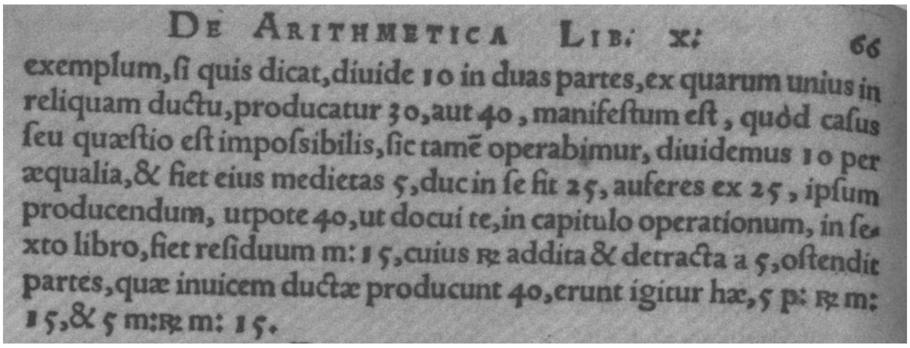
Übungsaufgaben zur Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2014

Blatt 1 Abgabetermin : Montag, 14.04.2014



De Arithmetica Lib. x. 66

exemplum, ſi quis dicat, diuide 10 in duas partes, ex quarum unius in reliquam ductu, producatur 30, aut 40, manifeſtum eſt, quòd caſus ſeu quæſtio eſt impoſsibilis, ſic tamẽ operabimur, diuidemus 10 per æqualia, & fiet eius medietas 5, duc in ſe fit 25, auferes ex 25, ipſum producendum, utpote 40, ut docui te, in capitulo operationum, in ſexto libro, fiet reſiduum m: 15, cuius ℞ addita & detracta a 5, oſtendit partes, quæ inuicem ductæ producunt 40, erunt igitur hæ, 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15.

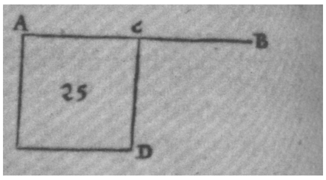


Abbildung 1: „Beispiel. Wenn jemand Dir sagt, teile 10 in zwei Teile, so dass der eine mit dem anderen multipliziert [...] 40 ergibt, so ist es offensichtlich, dass dieser Fall oder Frage unmöglich ist. Trotzdem werden wir ihn [mit unserer Methode] lösen. Sei 10 geteilt in zwei gleiche Teile, 5 sei diese Hälfte. Mit sich selbst multipliziert ist dies 25. Von 25 subtrahiere das Produkt, also 40, welches [...] einen Rest von -15 ergibt. Die Wurzel davon, addiert zu 5 oder subtrahiert von 5, ergibt die Faktoren, die zusammenmultipliziert 40 ergeben. Diese sind $5 + \sqrt{-15}$ und $5 - \sqrt{-15}$." Aus G. Cardano: *Ars Magna* (1545).

Aufgabe 1 (Real- und Imaginärteile)

Bestimme Real- und Imaginärteil der folgenden Zahlen:

$$\frac{i+1}{i-1}; \quad \frac{3+4i}{2-i}; \quad i^n,\, n \in \mathbb{Z}; \quad \left(\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right)^n,\, n \in \mathbb{Z}; \quad \sum_{k=1}^{7} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^k.$$

Aufgabe 2 (Betrag und Argument)

Bestimme Betrag und ein Argument der folgenden Zahlen:

$$1+3i; \quad (1+i)^9 - (1-i)^9; \quad i^{2014}; \quad \frac{1+ia}{1-ia},\, a \in \mathbb{R}; \quad (i-1)^n,\, n \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 3 (Bestimmte Teilmengen)
Skizziere die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene:

1.
$$A_0 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im\Big(\frac{z-3}{1+i}\Big) = 0 \right\}$$
$$A_+ = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im\Big(\frac{z-3}{1+i}\Big) > 0 \right\}$$
$$A_- = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im\Big(\frac{z-3}{1+i}\Big) < 0 \right\}$$

2.
$$B = \{ z \in \mathbb{C} \mid 3z\overline{z} + iz - i\overline{z} + 2 - i = 0 \}$$

3.
$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left| z - \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 \cdot \left| z + \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

Aufgabe 4 (Kleine Stereographische Projektion)
Es bezeichne $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ den Einheitskreis. Zeige, dass sich jedes $z \in S^1 \setminus \{1\}$ eindeutig in der Form
$$z = \frac{i\lambda + 1}{i\lambda - 1} = \frac{\lambda^2 - 1}{1 + \lambda^2} - \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} i$$
mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$ schreiben lässt.

***-Aufgabe 5** (Verschärfte Dreiecksungleichung)
Zeige, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ die Ungleichungen
$$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$$
gelten. Für welche Paare (z, w) gilt jeweils Gleichheit?