Über den Autor:

Prof. Dr. Eberhard Zeidler wurde 1940 in Leipzig geboren. Dort studierte er Mathematik und Physik. 1974 wurde er zum ordentlichen Professor für Analysis an die Universität Leipzig berufen. Zusammen mit Prof. Dr. Jürgen Jost und Prof. Dr. Stefan Müller gründete er 1996 das Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften in Leipzig und war von 1996 bis 2003 dessen geschäftsführender Direktor. Er ist Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina. Für sein Lebenswerk erhielt er den Alfried Krupp Wissenschaftspreis 2006 der Alfried Krupp von Bohlen und Halbach-Stiftung.

Eberhard Zeidler

Die Faszination der Wechselwirkungen zwischen Mathematik und Naturwissenschaften

> Die Mathematik ist das Tor und der Schlüssel zu den Wissenschaften.
>
> Roger Bacon (1214-1294)

> Ich liebe die Mathematik nicht nur, weil man sie auf viele Bereiche unseres Lebens anwenden kann, sondern auch wegen ihrer Schönheit.
>
> Rósza Péter (1905-1977)

> In einem langen Leben habe ich gelernt, dass all unsere Wissenschaft primitiv und naiv ist, verglichen mit der Wirklichkeit; und doch ist sie das Wertvollste, was wir haben.
>
> Albert Einstein (1879-1955)

Blickt man in einer klaren Nacht im Hochgebirge oder in den Tropen zum Himmel, dann ist man fasziniert vom majestätischen Anblick der Sterne. Dieser erhabene Anblick hat seit uralten Zeiten die Menschen fragen lassen, ob es eherne Gesetze gibt, die in den Weiten des Kosmos herrschen. Die einzige Quelle, die uns zur Beantwortung dieser Frage zur Verfügung steht, ist das Licht der Sterne. Das Licht der Sonne ist zugleich Spender unseres Lebens.

Ich möchte mit Ihnen einen Streifzug durch die Geschichte der Naturwissenschaften unternehmen und zeigen, dass das Licht nicht nur Spender unseres Lebens, sondern auch eine wichtige Quelle der menschlichen Erkenntnis ist. Wir werden dabei zwanglos auf die Mathematik geführt. Ist Mathematik nur eine seelenlose Ansammlung von trockenen Formeln und Rechenrezepten? Nein!

> Die Mathematik ist ein wundervolles zusätzliches Erkenntnisorgan des Menschen, ein geistiges Auge, das ihn etwa in der modernen Elementarteilchenphysik, der Kosmologie und der Hochtechnologie in Bereiche vorstoßen lässt, die ohne Mathematik nicht zu verstehen sind, weil sie von unserer täglichen Erfahrungswelt extrem weit entfernt sind.

In der Welt des Mikrokosmos und in den Weiten des Universums gelten völlig andere Gesetzmäßigkeiten als in der uns vertrauten Welt. Diese Gesetzmäßigkeiten kann man mathematisch erfassen, allerdings bedarf es dabei sehr abstrakter Mathematik, die jedoch bei Wahl einer geeigneten Sprache auf einer höheren Ebene wieder einfach und durchsichtig wird. Albert Einstein hat einmal gesagt:

> Man sollte alles so einfach wie möglich machen, aber nicht einfacher.

Für jeden von uns, der junge Menschen mit der Mathematik vertraut machen möchte, stellt sich immer wieder die Frage: Wie erreicht man dieses Ziel am besten? Blicke ich auf meine eigene Schul- und Studienzeit zurück, dann haben mir immer diejenigen Lehrveranstaltungen die meiste Freude bereitet, in denen die Lehrenden selbst von ihrem Fach begeistert waren. Junge Menschen haben dafür ein sehr feines Gespür. Im Fall der Mathematik besteht eine Gefahr darin, dass man den Eindruck erweckt, sie bestehe nur aus logischer Strenge, ohne Motivation, Intuition und Phantasie und somit ohne menschliche Dimension. Tatsächlich ist die historische Entwicklung der Mathematik sehr verschlungene Pfade gegangen - voller Irrtümer, wie alle menschlichen Erkenntnisprozesse. Von Max Planck stammt der Ausspruch:

> Wenn man nicht manchmal das Unlogische denkt, wird man nie neue Ideen in der Wissenschaft entdecken.

Blickt man auf Bachs Partituren, dann sind diese voll an logischer Struktur. Seine Musik ist jedoch mehr als Struktur. Sie bringt die Seele zum Schwingen. So ergeht es dem Mathematiker mit seiner Wissenschaft. Wäre die Mathematik nichts weiter als eine Sammlung von Axiomen und logischen Formalismen, ohne Lebensnähe und ohne tiefe Bezüge zum menschlichen Erkenntnisprozess, sie wäre schon längst verkümmert. Wie Literatur, Malerei, bildende Kunst und Musik, so ist auch die Mathematik ein wertvoller Bestandteil der menschlichen Kultur. Heutzutage ist sie beides, eine Herausforderung des menschlichen Geistes und Schlüsseltechnologie. Die Mathematik ist abstrakt und zugleich voller praktischer Anwendungen.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung, Symmetrien und Erhaltungsgesetze

Lassen Sie uns den historischen Streifzug mit dem Titel "Das Licht als Quelle der menschlichen Erkenntnis" mit dem französischen Mathematiker Pierre de Fermat beginnen, der in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts lebte. Von ihm stammt das sogenannte Fermatsche Prinzip:

> Das Licht bewegt sich so zwischen zwei Raumpunkten, dass es dafür die kürzeste Zeit benötigt.

Hier begegnet uns zum ersten Mal ein Extremalprinzip zur mathematischen Beschreibung von Vorgängen in der Natur. Rund 100 Jahre nach Fermat begründete Leonhard Euler mit einer fundamentalen Arbeit aus dem Jahre 1744 die Variationsrechnung, die sich damit beschäftigt, wie man Kurven berechnet, die ein Integral minimal werden lassen. Zum Beispiel stellt die Berechnung von kürzesten Fluglinien der Lufthansa ein durch die Variationsrechnung gelöstes Problem dar. Das Fermatsche Prinzip der kürzesten Zeit kann man als Variationsproblem formulieren. Die Eulersche Methode ließ sich nur auf eindimensionale Variationsprobleme anwenden. Der 26jährige Joseph Louis Lagrange entwickelte 1762 eine äußerst elegante Methode zur Behandlung von Variationsproblemen für mehrdimensionale Integrale, die man noch heute in den Lehrbüchern findet. 1788 veröffentlichte Lagrange seine "Méchanique analitique" (später nach der französischen Rechtschreibereform in Mécanique analytique umbenannt), in der er etwa 100 Jahre nach Newton dessen Grundgleichung "Kraft gleich Masse mal Beschleunigung" mit Hilfe eines Variationsprinzips auf mechanische Systeme mit beliebigen Nebenbedingungen verallgemeinerte. Lagrange gelang damit ein Durchbruch, der sich nicht nur für die Mechanik, sondern für die gesamte Physik als fundamental erwies. Aus heutiger Sicht ergibt sich folgendes Bild:

(i) Die Naturgesetze werden besonders einfach, wenn man die *infinitesimale Strategie* von Newton und Leibniz benutzt, d. h. wenn man zu "unendlich-kleinen" räumlichen Abständen und Zeitdifferenzen übergeht. Dann entstehen nur wenige fundamentale Differentialgleichungen, z. B. die Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik, die Einsteinschen Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie, die die Entwicklung des Kosmos beherrschen und die Gleichungen für das Standardmodell der Elementarteilchen.

> Es ist erstaunlich, dass man die Fülle der Naturerscheinungen durch wenige Grundgleichungen beschreiben kann. Die Aufgabe der Mathematik ist es, diese Differentialgleichungen zu lösen. Wegen der Vielgestaltigkeit der Phänomene in der Natur ist es jedoch nicht verwunderlich, dass die Lösung von Differentialgleichungen mit erheblichen mathematischen Schwierigkeiten verbunden ist und einen höchst aktuellen Forschungsgegenstand darstellt.

(ii) Die Grundgleichungen der Physik besitzen die wichtige zusätzliche Eigenschaft, dass man sie aus einem *Variationsprinzip* gewinnen kann. Das vereinfacht die mathematische Behandlung physikalischer Probleme außerordentlich, weil das Verhalten der Systeme in einer einzigen Funktion - der sogenannten *Lagrangefunktion* - kodiert ist.

(iii) Die *Symmetrieeigenschaften* der Lagrangefunktion führen auf E*rhaltungsgrößen*. Beispielsweise ist die Erhaltung der Energie eine Konsequenz der Invarianz der Lagrangefunktion unter Zeittranslationen. Ohne die Existenz von Erhaltungsgrößen wäre unsere Welt ein einziges Chaos - ohne einen relativ stabilen Formenreichtum.

Jeder Mensch besitzt einen Sinn für Schönheit und Harmonie. Dazu gehören Symmetrien, die mathematisch durch die Gruppentheorie beschrieben werden. Der große norwegische Mathematiker Sophus Lie, der als Nachfolger von Felix Klein 1886 bis 1898 in Leipzig wirkte, widmete sein wissenschaftliches Schaffen der Untersuchung von Symmetrien. Ihm verdankt man die Theorie der kontinuierlichen Gruppen und ihrer linearen Approximationen, die man heute als Liegruppen und Liealgebren bezeichnet. Neben anschaulichen Symmetrien - wie der Symmetrie eines Kristalls - existieren in der Natur unanschauliche Symmetrien, die man nur mathematisch erfassen kann. Beispielsweise haben die Physiker etwa Mitte des 20. Jahrhunderts experimentell gefunden, dass in der Natur eine fundamentale Symmetrie existiert, die auf der komplexen Matrizengruppe $SU(3)$ basiert und dafür verantwortlich ist, dass ein Proton kein elementares Teilchen ist, sondern aus drei Quarks besteht.

Zurück zu unserem historischen Streifzug. Lagrange starb 1813. Zu diesem Zeitpunkt war der irische Mathematiker William Rowan Hamilton ein achtjähriger Knabe. Hamilton hatte später die geniale Idee, die Methoden der geometrischen Optik auf die Mechanik auszudehnen. An die Stelle des Fermatschen Prinzips der kürzesten Zeit für die Ausbreitung des Lichts tritt in der Mechanik das *Prinzip der kleinsten Wirkung*. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen werden durch die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen ersetzt. Die Wirkung ist eine physikalische Größe von der Dimension

Energie mal Zeit.

Ich bin versucht zu sagen, dass die Wirkung die wichtigste physikalische Größe ist. Drei Tatsachen unterstreichen diese Feststellung:

(i) Die fundamentalen Prozesse in der Natur laufen so ab, dass ein *Extremalprinzip für die Wirkung* gilt.

(ii) Es gibt nicht beliebig kleine Wirkungen in der Natur, sondern es existiert eine kleinste Einheit der Wirkung - das sogenannte *Plancksche Wirkungs-quantum*. Diese von Max Planck zu Beginn unseres Jahrhunderts gemachte Entdeckung hat die Physik revolutioniert und zur Entwicklung der Quanten-physik geführt. Alle entscheidenden Prozesse im Kosmos werden von der Gravitation und von Quantenphänomenen beherrscht. Der Halbleiter und der Laser, die wichtige Bestandteile unserer Hochtechnologie sind, basieren ebenfalls auf Quantenphänomenen.

(iii) Alle Elementarteilchen werden mathematisch durch die Quantenfeldtheorie beschrieben. Der geniale amerikanische Physiker Richard Feynman ersann Mitte des 20. Jahrhunderts eine Methode, um aus einer klassischen Lagrangefunktion sofort die zugehörige Quantenfeldtheorie zu gewinnen. Er benutzte dabei einen unendlichdimensionalen Integralbegriff - das Pfad-integral oder *Feynmanintegral*. Dabei wird grob gesprochen über alle möglichen klassischen Feldkonfigurationen gemittelt, wobei das *Gewicht der Mittelung von der klassischen Wirkung* abhängt.

Dieser Feynmansche Zugang zur Quantenfeldtheorie wird von den Physikern benutzt, um Elementarteilchenprozesse im Rahmen des Standardmodells zu berechnen. Hier liegt eine merkwürdige Situation vor. Obwohl die Feynmansche Methode nicht mathematisch konsistent ist, liefert sie zum Beispiel in der Quantenelektrodynamik Ergebnisse, die in erstaunlicher Weise mit den Experimenten in Teilchenbeschleunigern übereinstimmen. Um zum Beispiel das mit außerordentlicher Präzision gemessene anomale magnetische Moment des Elektrons bis auf neun Stellen nach dem Komma zu berechnen, benutzt man die Methode der renormierten Störungsrechnung in vierter Ordnung, die auf der Auswertung von 891 Feynmangraphen mit den zugehörigen hochdimensionalen Integralen beruht und nicht mehr von Hand ausgeführt werden kann, weil Jahre an Supercomputerzeit erforderlich sind. Gauß hat bei seinen astronomischen Berechnungen der Planetenmassen im Rahmen der Störungstheorie täglich um die 4000 Ziffern bewältigt. Trotz seines überragenden Intellekts würde er ohne

Computer den Anforderungen der modernen Elementarteilchenphysik hilflos gegenüberstehen.

> Trotz intensiver Bemühungen in den letzten sechzig Jahren gibt es bis heute keine mathematisch streng begründete, allgemeine Quantenfeldtheorie. Der Aufbau einer solchen Theorie stellt eine der größten Herausforderungen an die moderne Mathematik dar.

Die Methoden der Quantenfeldtheorie sind nicht nur für die Elementarteilchenphysik und die Kosmologie von grundlegender Bedeutung, sondern auch für unsere Hochtechnologie. Die Miniaturisierung von Schaltkreisen in Computern hat dazu geführt, dass inzwischen zehn Prozent der Wärmeentwicklung in Großrechnern vom sogenannten Casimir-Effekt der Quantenfeldtheorie herrühren. Die streng mathematische Berechnung dieses Effekts basiert auf neuartigen, geistvollen Methoden der analytischen Zahlentheorie, die von Don Zagier entwickelt wurden, der am Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn und am Collège de France in Paris tätig ist. Diese Methoden haben ihren Ursprung in einer der wichtigsten Arbeiten der Mathematik, die im Jahre 1859 von Bernhard Riemann über die Zetafunktion und ihren Zusammenhang mit der Primzahlverteilung verfasst wurde. Der interessierte Leser findet den von Don Zagier hergestellten Zusammenhang zwischen Zahlentheorie und Quantenfeldtheorie in dem Buch des Autors „Quantum Field Theory: A Bridge between Mathematicians and Physicists," Springer-Verlag, Heidelberg, 2006. Dort findet man auch eine andere Entwicklungslinie in Biologie, Physik, Mathematik und Ökonomie, die höchst überraschend ist. Im Jahre 1905 schuf Albert Einstein eine physikalische Theorie der Bewegung von winzigen Partikeln in Flüssigkeiten, die der englische Botaniker Robert Brown erstmals 1827 unter dem Mikroskop beobachtet hatte. Einstein erkannte qualitativ und quantitativ, dass thermodynamische Fluktuationen die Brownsche Bewegung verursachen. Die zugehörige mathematische Theorie der zufälligen Prozesse wurde von Norbert Wiener im Jahre 1923 entwickelt, der dazu einen unendlichdimensionalen Integralbegriff - das Wienerintegral - ersann. Das von Richard Feynman im Jahre 1942 eingeführte Feynmanintegral (in seiner in Princeton verfassten Dissertation) kann als eine Variante des Wienerintegrals betrachtet werden. Grob gesprochen berechnete Feynman Quantenprozesse als Brownsche Bewegungen in imaginärer Zeit. Die Theorie zufälliger Prozesse dient heute unter anderem auch zur Bestimmung der Schwankungen auf Finanzmärkten und brachte Robert Merton und Maron Scholes vor etwa zehn Jahren den Nobelpreis für Ökonomie ein.

Im Jahre 1917 schrieb Einstein eine Arbeit über die Koeffizienten zur Beschreibung spontaner Emission von Licht in Atomen. Heutzutage ist diese Arbeit die theoretische Basis für den Laser (light amplification by stimulated emission of radiation), für dessen experimentelle Grundlagen Nikolai Basow, Alexander Prochorow und Charles Townes den Nobelpreis für Physik im Jahre 1964 erhielten. Zahlreiche Autofahrer benutzen heutzutage das durch Satelliten gestützte Navigationssystem GPS (global positioning system). Dieses System muss Effekte berücksichtigen, die durch die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen mit Lichtgeschwindigkeit und das Gravitationsfeld der Erde im Rahmen von Einsteins spezieller und allgemeiner Relativitätstheorie verursacht werden. Anderenfalls wäre das Navigationssystem um etwa hundert Meter zu ungenau und für den Straßenverkehr unbrauchbar.

Dass mathematische Methoden auch „zeitlos“ sind, erweist sich an einem aktuellen Phänomen der Astrophysik, an sogenannten Gravitationslinsen. Ein Beispiel dafür ist das „Einsteinkreuz“ im Sternbild der Fische: Es entsteht durch das Licht eines außerordentlich stark strahlenden Quasars (quasistellare Radioquelle) aus der Frühzeit des Universums, das auf seiner Jahrmilliarden dauernden Reise zur Erde eine Galaxis durchläuft, und dabei gemäß Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie durch die Schwerkraft der Sterne innerhalb dieser Galaxie gebrochen und in mehrere Teilstrahlen aufgespalten wird. Auf diese Weise erscheinen im Teleskop um das helle Zentrum der Galaxie herum vier Bilder des Quasars. Die Mathematik, mit der sich solche Gravitationslinsen beschreiben lassen, ist die gleiche, die Pierre de Fermat und Christian Huygens, die Begründer der geometrischen Optik, im 17. Jahrhundert für die Berechnung „irdischer“ Linsensysteme entwickelten. Die Mathematik des 20. Jahrhunderts hat jedoch einen zusätzlichen Beitrag geleistet. Im Rahmen der aus der algebraischen Geometrie stammenden Singularitätentheorie haben Vladimir Arnold und seine Moskauer Schule unter anderem die möglichen Strukturen von Kaustiken in der geometrischen Optik klassifiziert. Diese Muster werden tatsächlich in der modernen Astronomie im Zusammenhang mit Gravitationslinsen beobachtet.

Abschließend möchte ich darauf hinweisen, dass der Hamiltonsche Zugang zur Mechanik zugleich den Schlüssel zur modernen *Optimierungstheorie* liefert, die sich mit der optimalen Gestaltung von Prozessen in Wirtschaft und Technik beschäftigt, zum Beispiel mit der optimalen Bewegung von Industrierobotern. In der geometrischen Optik beobachtet man eine

Dualität zwischen Lichtstrahlen und Wellenfronten.

Mitte des 20. Jahrhunderts wurde die Optimierungstheorie in zwei Varianten entwickelt, die durch die beiden Stichworte „Bellmansche dynamische Optimierung“ und „Pontrjaginsches Maximumprinzip“ umschrieben werden können. Der mathematische Formalismus der dynamischen Optimierung untersucht eine Funktionalgleichung für die zu optimierende Größe, die beispielsweise den Kosten für ein Produkt oder dem Treibstoffverbrauch für eine Mission zum Mars entspricht. Dieser Zugang entspricht der Untersuchung von Wellenfronten in der Optik. Dagegen basiert das Pontrjaginsche Maximumprinzip auf einer Verallgemeinerung der Hamiltonschen kanonischen Gleichungen und steht somit in Analogie zu den Lichtstrahlen.

> Eine der wesentlichen Stärken der Mathematik besteht darin, dass sie den gemeinsamen abstrakten Kern völlig unterschiedlicher Phänomene in Wissenschaft und Technik herausarbeiten kann und dadurch in der Lage ist, scheinbar sehr verschiedenartige Probleme mit der gleichen mathematischen Methode zu lösen.

Die Mathematik ist eine Querschnittswissenschaft.

Wellen, Korpuskeln und Quanten

Eine alte Streitfrage der Physik lautete:

Besteht das Licht aus Teilchen oder Wellen?

Huygens propagierte im 17. Jahrhundert den Wellencharakter des Lichts, während Newton sich zur gleichen Zeit für den Teilchencharakter des Lichts stark machte. Newton hatte insofern recht, als man zu seiner Zeit noch keine polarisierten Wellen von Vektorfeldern kannte und die ihm bekannten Experimente skalare Wellen ausschlossen. Mitte des 19. Jahrhunderts formulierte James Clerk Maxwell seine Grundgleichungen für alle elektrischen und magnetischen Erscheinungen - die sogenannten Maxwellschen Gleichungen - und sagte die Existenz elektromagnetischer Wellen voraus, die 1888 von Heinrich Hertz experimentell nachgewiesen wurden. Damit schien die Wellennatur des Lichts in Gestalt elektromagnetischer Wellen festzustehen. Obwohl die Maxwellschen Gleichungen von unübertroffener Eleganz waren, blieben zwei wichtige Fragen offen:

- In welchem Bezugssystem gelten diese Gleichungen,

- und wie hat man das elektromagnetische Feld bei Übergang zu einem anderen Bezugssystem zu transformieren?

Die Antwort, die Einstein im Jahre 1905 gab, war genial und verblüffend einfach. Einstein postulierte in seiner speziellen Relativitätstheorie, dass in allen sogenannten *Inertialsystemen* die physikalischen Prozesse bei gleichen Anfangs- und Randbedingungen in *gleicher Weise* ablaufen. Speziell sind die Maxwellschen Gleichungen in jedem Inertialsystem gültig. Das hat zur Folge, dass sich Licht in jedem Inertialsystem mit der gleichen Geschwindigkeit ausbreitet. Diese Tatsache führte zu einer Revolution der klassischen Vorstellungen von Raum und Zeit. Es gibt keine absolute Zeit, wie Newton annahm. Die Zeitmessung hängt vom gewählten Inertialsystem ab. Einstein benutzte ferner die einfachste denkbare relativistisch invariante Lagrangefunktion für ein freies Teilchen, um das fundamentale Naturgesetz

Energie ist gleich Masse mal Quadrat der Lichtgeschwindigkeit

zu gewinnen. Dieses Gesetz beherrscht die Energieproduktion in unserer Sonne.

Zurück zu unserer Frage über die Teilchen- oder Wellennatur des Lichtes. Im gleichen Jahre 1905, in dem Einstein seine spezielle Relativitätstheorie begründete, postulierte er die Existenz von Lichtquanten, die man später *Photonen* nannte. Die Energie eines Photons ergibt sich nach Einstein aus der Beziehung

Energie gleich Plancksches Wirkungsquantum mal Frequenz.

Interessanterweise erhielt Albert Einstein 1921 den Physik-Nobelpreis nicht für seine spezielle und allgemeine Relativitätstheorie, sondern für seine Photonentheorie. Aus heutiger Sicht besteht das Licht weder aus elektromagnetischen Wellen noch aus Teilchen. Es besteht aus sogenannten *Quanten*. Grob gesprochen wird ein solches Objekt mathematisch durch eine von Raum und Zeit abhängige Operatorfunktion mit Werten in einem unendlichdimensionalen Hilbertraum beschrieben und besitzt sowohl Welleneigenschaften als auch Teilcheneigenschaften. Die unendliche Raumdimension ist nötig, um die unendlich vielen Freiheitsgrade eines Quantenfeldes zu erfassen. Viele der mathematischen Schwierigkeiten in der Quantenfeldtheorie rühren daher, dass der

Übergang von endlich vielen zu unendlichvielen Freiheitsgraden mit qualitativ neuen Effekten verbunden ist.

Kraft gleich Krümmung

Das Photon ist aus moderner Sicht für die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen elektrisch geladenen Teilchen (z.B. Elektronen und Positronen) verantwortlich. Wir kommen damit zu der wohl faszinierendsten Erkenntnis der modernen Physik, die man auf die Kurzformel

Kraft gleich Krümmung

bringen kann. Dabei handelt es sich um den wohl tiefsten, heute bekannten Zusammenhang zwischen Mathematik und Physik. Das möchte ich Ihnen jetzt erläutern. Das Stichwort lautet "Geometrisierung der Physik".

Wir wollen uns zunächst mit dem Begriff der Krümmung beschäftigen. Einer der größten Mathematiker aller Zeiten war Carl Friedrich Gauß, der von 1777 bis 1855 lebte. Für ihn gab es keine Trennung zwischen reiner und angewandter Mathematik. Im Deutschen Museum in München liest man unter seinem Bildnis:

> Sein Geist drang in die tiefsten Geheimnisse der Zahl, des Raumes und der Natur; er maß den Lauf der Gestirne, die Gestalt und die Kräfte der Erde; die Entwicklung der mathematischen Wissenschaft eines kommenden Jahrhunderts trug er in sich.

Von 1821 bis 1825 führte Gauß im Königreich Hannover unter großen körperlichen Strapazen umfangreiche Landvermessungsarbeiten durch. Im Jahre 1827 veröffentlichte er seine allgemeine Flächentheorie - die "Disquisitiones generales circa curvas". Mit diesem Werk begründete Gauß die Differentialgeometrie als mathematische Disziplin. Seine Arbeiten als Landvermesser hatten ihn auf die Frage geführt:

> Kann man die Krümmung einer Fläche allein durch Messungen auf der Fläche bestimmen, ohne den die Fläche umgebenden Raum zu benutzen?

Um die Beantwortung dieser Frage hat er lange Zeit gerungen. Seine Antwort lautete schließlich: Ja, die Krümmung einer Fläche ist eine *innere* Eigenschaft der Fläche. Zur Berechnung der Krümmung benötigt man *nicht* den die Fläche umgebenden Raum. Das ist der Inhalt des "theorema egregium" von Gauß - des köstlichen Theorems. Die spätere Entwicklung von Mathematik und Physik hat gezeigt, dass Gauß mit dem "theorema egregium" eine Goldader der Mathematik entdeckt hatte - mit weitreichenden Konsequenzen für die Entwicklung der modernen Physik.

In seinem Habilitationsvortrag "Über die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen" im Jahre 1854 verallgemeinerte Bernhard Riemann die Gaußschen Ideen auf höherdimensionale geometrische Gebilde, die man heute Riemannsche Mannigfaltigkeiten nennt. Erich Worbs schreibt in seiner Gauß-Biographie:

> Drei Themen legte Riemann für die Probevorlesung vor. Von dem Wunsch beseelt, sich in dem Jüngeren fortzusetzen, und im Gedenken an sein eigenes Ringen mit dem Euklidischen Parallelaxiom, wählte Gauß - der Tradition entgegen - nicht das erste, sondern das dritte Thema.
>
> Die Vorlesung Riemanns über dieses Thema muss bei dem damals schon recht schwachen Gauß einen außerordentlich starken Eindruck hinterlassen haben. Mit einer bei ihm ungewöhnlichen Erregung sprach er auf dem Heimweg zu Wilhelm Weber über die Tiefe des Dargebotenen. Es war also gut um seine geliebte Wissenschaft bestellt. Dienten ihr solche Männer, so brauchte man um sie nicht bange zu sein.

Im Jahre 1908 wurde ein erster entscheidender Schritt zur Geometrisierung der Physik vollzogen. Hermann Minkowski zeigte, dass man die Einsteinsche spezielle Relativitätstheorie im Rahmen einer Geometrie für die vierdimensionale Raum-Zeit-Mannigfaltigeit verstehen kann. In seinem Vortrag vor der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte sagte Minkowski:

> Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen hier entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden gewachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale... Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken, und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.

Einstein ging mit seiner allgemeinen Relativitätstheorie noch einen wesentlichen Schritt weiter. In der Newtonschen Mechanik wurde angenommen, dass sich die Gravitationswirkung mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreitet. Das stand im Widerspruch zum Postulat der speziellen Relativitätstheorie, wonach sich physikalische Wirkungen höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Deshalb suchte Einstein nach einer neuen Gravitationstheorie, die die Newtonsche Theorie als Näherung enthielt und - im Gegensatz zur Newtonschen Mechanik - die von den Astronomen beobachtete Periheldrehung der großen Halbachse des Merkur von 43 Bogensekunden im Jahrhundert richtig berechnen konnte. Einsteins geniale Idee bestand darin, die mathematischen Ideen Riemanns aufzugreifen und die Gravitationskraft zu geometrisieren. In der allgemeinen Relativitätstheorie beeinflussen die Massen die Krümmung der vierdimensionalen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit. Die Bewegung der Sterne und des Lichts entspricht geodätischen Linien. Das sind vierdimensionale Raum-Zeit-Kurven, auf denen die Bogenlänge extremal wird. Zusammenfassend gilt:

Die Gravitationskraft entspricht der Krümmung der vierdimensionalen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit.

Damit ist das Prinzip "Kraft gleich Krümmung" im Bereich der Gravitation verwirklicht. Neben der Gravitationskraft kennen wir heute noch drei weitere fundamentale Kräfte: die elektromagnetische Wechselwirkung, die schwache Wechselwirkung, die für den radioaktiven Zerfall verantwortlich ist, und die starke Wechselwirkung, die zwischen den Quarks wirkt und die Atomkerne zusammenhält. Einstein hat Zeit seines Lebens vergeblich nach einem einheitlichen geometrischen Prinzip gesucht, das nicht nur die Gravitationskraft, sondern auch die anderen fundamentalen Kräfte der Natur beschreibt. Wir kennen heute im Rahmen des Standardmodells der Elementarteilchen ein solches Prinzip. Das Zauberwort lautet:

Lokale Symmetrie und Eichfeldtheorie.

Lassen Sie uns mit der elektromagnetischen Wechselwirkung beginnen. Paul Dirac formulierte im Jahre 1928 eine Gleichung für das Elektron, welches die Quantentheorie und die spezielle Relativitätstheorie miteinander verschmolz. Unter einer lokalen *Phasentransformation* der Wellenfunktion des Elektrons versteht man die Multiplikation mit einer Phasenfunktion, die von Ort und Zeit abhängt. Solche Transformationen heißen auch *Eichtransformationen*. Postuliert man die lokale Symmetrie der Lagrangefunktion für das Elektron, d. h. postuliert man die Invarianz der Lagrangefunktion unter Eichtransformationen, dann geschieht etwas Erstaunliches. Dieses einfache Postulat hat zur Folge, dass man mathematisch zwingend ein *zusätzliches Feld* einführen muss. Wie sich herausstellt, stimmt dieses zusätzliche Feld mit dem elektromagnetischen Feld überein. Nach Quantisierung ergibt sich ferner neben dem Elektron dessen Antiteilchen - das Positron. Die Forderung nach lokaler Symmetrie liefert somit automatisch das Photon, also jenes Teilchen, welches die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen Elektronen und Positronen beschreibt. Dieses elegante Prinzip lässt sich auch auf die starke und die schwache Wechselwirkung ausdehnen. Insgesamt zeichnet sich das Standardmodell der Elementarteilchen durch große Eleganz aus:

(i) Es gibt zwölf Basisteilchen und zwölf Wechselwirkungsteilchen, die für die fundamentalen Kräfte (mit Ausnahme der Newtonschen Gravitation) verantwortlich sind.

(ii) Die Basisteilchen bestehen aus sechs Quarks und sechs Leptonen, zu denen beispielsweise das Elektron und das Neutrino gehören. Jedes Basisteilchen besitzt ein Antiteilchen, wobei jedoch im Kosmos die Antimaterie nur eine geringe Rolle spielt.

(iii) Die Wechselwirkungsteilchen bestehen aus acht masselosen Gluonen für die starke Wechselwirkung, dem masselosen Photon für die elektromag-netische Wechselwirkung und drei massiven Vektorbosonen, die man mit den Symbolen W^+, W^- und Z^0 bezeichnet.

Die klassische Maxwellsche Theorie vereinigte elektrische und magnetische Wechselwirkungen miteinander. Im modernen Standardmodell der Elementarteilchen werden die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung zur elektroschwachen Kraft vereinheitlicht, d. h. Licht und radioaktiver Zerfall stehen in einem engen mathematischen Zusammenhang. Die Existenz der zwei *W*-Bosonen und des *Z*-Bosons wurde theoretisch in den sechziger Jahren vorausgesagt und 1983 am CERN-Teilchenbeschleuniger in Genf experimentell nachgewiesen. Wie sehr die Physiker von der Richtigkeit dieser Theorie überzeugt waren, zeigt die Tatsache, dass Glashow, Salam und Weinberg bereits 1979, also vier Jahre vor der experimentellen Bestätigung, den Physik-Nobelpreis für diese Theorie erhielten. Um die Massen der Vektorbosonen erklären zu können, postulierte Weinberg die Existenz eines schweren Teilchens, das man das Higgsteilchen nennt. Etwa im Jahre 2008 wird der größte Teilchenbeschleuniger der Welt am CERN seine Arbeit aufnehmen. Er kann Teilchenenergien erzeugen, die

die Ruheenergie eines Protons um ungefähr das zehntausendfache übertreffen. An diesem LHC-Beschleuniger (Large Hadron Collider) hofft man das Higgsteilchen nachzuweisen, um das Standardmodell der Elementarteilchen experimentell voll zu bestätigen. Außerdem haben Physiker und Mathematiker in den letzten dreißig Jahren intensiv eine neue Symmetrie untersucht, die man als Supersymmetrie bezeichnet. Es liegt bereits eine supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells der Elementarteilchen vor. Der neue Teilchenbeschleuniger am CERN soll experimentell die Frage beantworten, ob es supersymmetrische Teilchen in der Natur gibt.

Unser Ausgangspunkt war die Zauberformel "Kraft gleich Krümmung". Was hat das alles mit Krümmung zu tun? Der große französische Geometer Élie Cartan stellte sich in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts die Aufgabe, den Begriff der Krümmung auf immer abstraktere mathematische Gebilde zu verallgemeinern. Das führte um 1950 schließlich zu Ehresmanns allgemeiner Krümmungstheorie für sogenannte Hauptfaserbündel und ihre assoziierten Vektorbündel. Dabei spielt die Liesche Theorie der Symmetriegruppen eine entscheidende Rolle. Genau dieser mathematische Apparat wird in der Eichfeldtheorie benutzt, ohne dass die Physiker dies zunächst bemerkten. Tatsächlich haben in Princeton Mitte der fünfziger Jahre Physiker und Mathematiker Tür an Tür gewohnt, ohne zu wissen, dass sie an verwandten Problemen arbeiteten. Die Physiker haben sich seit der Antike um ein Verständnis des *Kraftbegriffs* bemüht. Die Mathematiker wollten die *Krümmung* geometrischer Gebilde analysieren. Auf völlig getrennten Wegen sind so Physiker und Mathematiker zu einer mathematischen Theorie gelangt, die zeigt, dass die Krümmung von geeigneten mathematischen Objekten, die man Bündel nennt, fundamentale Wechselwirkungen in der Natur beschreibt.

Geometrisierung der Physik

Noch ein Wort zu Geometrien. Im Jahre 1872 versuchte Felix Klein mit seinem Erlanger Programm, Ordnung in die Vielfalt der bis dahin bekannten euklidischen und nichteuklidischen Geometrien zu bringen, indem er definierte:

Geometrien sind Invariantentheorien von Transformationsgruppen.

Das bedeutet, Felix Klein fasste eine Geometrie als Summe aller Eigenschaften auf, die bei gewissen Gruppen von Transformationen unverändert bleiben. Das unterstreicht die zentrale Rolle des Gruppenbegriffs für die Geometrie. Beispielsweise gehört jede Eigenschaft, die bei Drehungen und Verschiebungen des Raumes unverändert bleibt, zur eigentlichen euklidischen Geometrie, wie etwa die Begriffe "Abstand" und "rechter Winkel". Die Untersuchung ähnlicher Dreiecke gehört nicht zur euklidischen Geometrie, sondern zur sogenannten Ähnlichkeitsgeometrie, die sich mit Eigenschaften beschäftigt, welche bei Ähnlichkeitstransformationen unverändert bleiben.

Die Geometrisierung der Physik erweist sich heute als ein wichtiges methodisches Mittel in vielen Bereichen. Hinter der geometrischen Optik, der klassischen Mechanik und der klassischen statistischen Physik verbirgt sich eine sogenannte symplektische Geometrie. Verallgemeinert man die euklidische Geometrie unserer Anschauung auf unendlichviele Dimensionen, dann erhält man die Geometrie der Hilberträume, die

Quantenphänomene beschreibt. Hinter dem Eigendrehimpuls der Elektronen steht eine sogenannte Cliffordalgebra mit der zugehörigen Spingeometrie. Die in der Natur vorhandenen Symmetrien führen auf nichtkommutative mathematische Strukturen, die man Liealgebren nennt. Der russische Mathematiker Yuri Manin, der bis zu seiner Emeritierung lange Zeit als Direktor am Max-Planck Institut für Mathematik in Bonn arbeitete, schrieb im Jahre 1999:

> Die mathematische Sprache der klassischen Physik basiert auf reellen Zahlen. Die Zustandsräume sind glatte Mannigfaltigkeiten.
> Die mathematische Sprache der Quantumphysik basiert dagegen auf komplexen Zahlen.[1] Natürlicherweise ist zu erwarten, dass die komplex-analytische Geometrie und die algebraische Geometrie in der Quantentheorie die Differentialgeometrie der klassischen
> Physik ablösen. Tatsächlich ist das in einem gewissen Sinne in den letzten zwei oder drei Jahrzehnten schon geschehen und zwar durch Streumatrizen, Twistoren, die Bewegung von Strings in zehndimensionalen Raum-Zeitmannigfaltigkeiten, Quantumkohomologie und *M*-Theorie. Die mathematische Physik des anbrechenden 21. Jahrhunderts hat die Konstruktion einer einheitlichen Quantumtheorie für alle fundamentalen Kräfte einschließlich der Gravitationskraft zum Ziel... In der Zwischenzeit hat sich die mathematische Physik von der traditionellen Bindung an die physikalischen Experimente der Teilchenphysik und der Kosmologie losgelöst und sich nicht nur stark mathematisiert, sondern sie ist selbst ein Teil der Mathematik geworden. Was die Entwicklung für die Mathematiker so aufregend gestaltet ist die Tatsache, dass die Physiker nicht nur neue Ideen, sondern auch mächtige neue Werkzeuge entwickelt haben und frischen Wind in die Mathematik gebracht haben.

Es besteht jedoch kein Zweifel, dass das endgültige Ziel der mathematischen Physik darin besteht, die Einheit zwischen Theorie und Experiment herzustellen. Dieses wesentliche Ziel darf man nicht aus dem Auge verlieren.

Die Hintergrundstrahlung des Kosmos

Die Einsteinschen Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie erlauben eine Lösung, die man heute als Standardmodell der Kosmologie bezeichnet. Das entspricht einem expandierenden Universum. Die riesige Energiekonzentration kurz nach dem Urknall ist durch die Expansion stark verdünnt worden. Sie kann aber heute als sogenannte Hintergrundstrahlung des Kosmos beobachtet werden. Die schwach richtungsabhängige Verteilung der Hintergrundstrahlung über den gesamten Himmel ist von der NASA durch umfangreiche Satellitenmessungen bestimmt worden. Die neueste Version dieses sogenannten WMAP-Experiments wurde im Frühjahr dieses Jahres abgeschlossen. Die Auswertung im Rahmen des Standardmodells der Kosmologie ergibt ein Alter unserer Welt von 13,7 Milliarden Jahren. Die Messdaten kommen aus einem

[1] Komplexe Zahlen wurden um 1550 von Bombieri als Erfindung des menschlichen Geistes eingeführt, um algebraische Gleichungen dritten Grades lösen zu können. Beispielsweise ist $2 + 3i$ mit $i^2 = -1$ eine komplexe Zahl. Das Symbol *i* heißt imaginäre Einheit. Lange Zeit waren die komplexen Zahlen umstrittene mathematische Objekte, weil man sich nicht sicher war, ob sie Widersprüche in sich bargen. Erst im 19. Jahrhundert nahm Gauß den komplexen Zahlen den Hauch des Mystischen.

Frühstadium, in dem unser Universum etwa 400 000 Jahre jung war. Mehr dazu kann man auf der Homepage der NASA finden: http://www.nasa.gov/home/

Astronomische Daten, bei denen die Beobachtung und die theoretische Strukturuntersuchung einer universellen Klasse von Supernova eine besondere Rolle spielen, ergeben die bemerkenswerte Erkenntnis, dass sich unser Universum beschleunigt ausdehnt und im Verlauf von vielen Milliarden Jahren immer dunkler werden wird. In einer Spätphase dieser Entwicklung ist alle Materie einschließlich der schwarzen Löcher zerfallen, und es existieren nur noch extrem geringe Energiefragmente. Es besteht jedoch die Möglichkeit, dass durch starke Quantenfluktuationen ein neuer Urknall zündet. Das ist eine reine Spekulation, die jedoch die Phantasie und das Schöpfertum von Physikern und Mathematikern beflügelt.

Es scheint experimentell gesichert, dass etwa nur zwei Prozent der Masse und Energie des Kosmos klassischen Ursprungs sind. Der Rest besteht aus nichtklassischer dunkler Masse und dunkler Energie. Die Aufklärung der Natur dieser nichtklassischen Materie stellt eine Herausforderung an die Physik und Mathematik der Zukunft dar.

Quantengravitation

Eine fundamentale, heute noch offene Frage lautet:

> Wie kann man die Quantenphysik und die Gravitationsphysik der allgemeinen Relativitätstheorie miteinander verschmelzen?

Einen möglichen theoretischen Ansatz hierfür liefert die Stringtheorie. Danach sind die fundamentalen Bausteine der Natur nicht punktförmig, sondern *fadenförmig* wie winzige Violinsaiten. Den unterschiedlichen Schwingungszuständen dieser sogenannten "Strings" entsprechen die in der Natur beobachteten "Elementarteilchen". Diejenigen Physiker, die sich intensiv mit Stringtheorie beschäftigen und dabei tiefgründige Mathematik einsetzen, sind fasziniert von der Tatsache, dass in den Stringtheorien ein "Teilchen" existiert, welches den Spin (Eigendrehimpuls) zwei besitzt. Somit kann man dieses Teilchen mit dem gesuchten Graviton identifizieren, welches für die Gravitationswechselwirkung in der Natur verantwortlich ist. In letzter Zeit hat man im Rahmen sogenannter dualer Modelle neue wichtige Erkenntnisse über die Struktur von Stringtheorien gewonnen, die zur Schaffung einer universellen Stringtheorie führen könnten, die Edward Witten programmatisch als *M*-Theorie (master theory) bezeichnet. Die Situation in der Stringtheorie kann heute so umrissen werden: Für die Mathematik haben sich wichtige neue Impulse ergeben, die endgültige Bestätigung durch das physikalische Experiment steht jedoch noch aus.

Die Entwicklung der Stringtheorie wurde wesentlich durch den US-amerikanischen Physiker Edward Witten geprägt, der an Einsteins früherer Wirkungsstätte - dem Institute for Adavanced Study in Princeton - tätig ist. Die Stringtheorie ist jedoch nicht der einzige Versuch, Einsteins Traum nach einer einheitlichen Theorie aller Wechselwirkungen zu verwirklichen. Andere Ansätze können mit den Stichworten

- Schleifen-Gravitation (Abhay Ashtekar),
- nichtkommutative Geometrie (Alain Connes) und
- nichtkommutative Deformationen der Raum-Zeit (Julius Wess)

beschrieben werden. In der von dem in den USA lebenden indischen Physiker Abhay Ashtekar geschaffenen Schleifen-Gravitation (loop gravitation) werden mathematische Methoden (sogenannte Monodromie-Methoden) weiterentwickelt, die bereits im Standardmodell der Elementarteilchen sehr erfolgreich waren. Die wesentliche Idee besteht darin, den unterschiedlichen Transport physikalischer Information längs geschlossener Wege mathematisch zu studieren und daraus die Krümmung und somit die wirkenden Kräfte zu berechnen. Sowohl die Stringtheorie als auch die Theorie der Schleifen-Gravitation sind in der Lage, die Hawking-Strahlung schwarzer Löcher im Rahmen der statistischen Physik zu deuten. Das soll kurz erläutert werden. Die Einsteinschen Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie erlauben Lösungen, die ungeheuren Massenkonzentrationen im Weltall entsprechen und schwarze Löcher genannt werden. Inzwischen zeigt die mathematische Auswertung umfangreicher astronomische Messdaten, dass in der Regel jede Galaxis in ihrem Zentrum ein schwarzes Loch besitzt. Das trifft auf jeden Fall auf unsere Galaxis zu. Ein schwarzes Loch von der Masse der Erde ist nicht größer als ein Stück Würfelzucker. Die ungeheure Massenkonzentration bewirkt, dass im Rahmen der semiklassischen Theorie alle Materie in der Umgebung des schwarzen Loches wie von einem Staubsauger aufgesaugt wird und das Licht ein schwarzes Loch nicht verlassen kann. Berücksichtigt man jedoch die Quantenfeldtheorie, dann bewirken Quantenfluktuationen eine Erwärmung schwarzer Löcher und die Abstrahlung von Teilchen, die man als Hawking-Strahlung bezeichnet. Sowohl die Stringtheorie als auch die Schleifen-Gravitation beschreiben mikrokosmische Zustände, deren Statistik mit den Methoden der Vielteilchentheorie die Hawking-Strahlung vorhersagen. Diese sehr schwache Strahlung kann heute noch nicht experimentell nachgewiesen werden.

Die nichtkommutative Geometrie, die von dem französischen Mathematiker Alain Connes um 1980 geschaffen wurde, geht davon aus, dass Raum und Zeit unterhalb der winzigen Plancklänge von 10^{-35} Metern ihren Charakter wesentlich ändern oder kurz nach dem Urknall noch gar nicht existieren. Existent sind jedoch stets physikalische Zustände, die als geeignete abstrakte mathematische Objekte an der Spitze der nichtkommutativen Geometrie stehen. In dieser mathematischen Theorie ergeben sich klassische und mögliche nicht-klassische Eigenschaften von Raum und Zeit als abgeleitete Größen aus den physikalischen Zuständen. Einer der großen Erfolge der nichtkommutativen Geometrie besteht darin, dass sie in der Lage ist, das Standardmodel der Elementarteilchenphysik einschließlich des Higgsteilchens aus klar formulierten Grundprinzipien abzuleiten.

Um den algebraischen Zugang zur Quantumgravitationstheorie zu verstehen, müssen wir in der Geschichte zurückgehen. Der Durchbruch in der Quantenphysik wurde im Jahre 1925 durch den vierundzwanzigjährigen Werner Heisenberg erzielt, der die moderne Quantenmechanik begründete. Heisenberg ließ sich von der Idee leiten, dass wir die Bahn und die Geschwindigkeit eines Elektrons nicht beobachten können. Deshalb führte er Fourierreihen als Basisgrößen ein, um mit deren Frequenzen und Amplituden die beobachteten Atomspektren zu beschreiben. Dabei entwickelte er einen multiplikativen Kalkül für Fourierkoeffizienten, der sich kurze Zeit später als ein unendlich-dimensionaler Matrizenkalkül entpuppte, der heute ein Spezialfall der von Neumannschen Operatortheorie in Hilberträumen ist. Paul Dirac, der im Jahre 1928 die Quantenmechanik mit Einsteins spezieller Relativitätstheorie verschmolz, sagte rückblickend in einem Vortrag im Jahre 1968:

> Ich bewundere Werner Heisenberg. Wir waren zur gleichen Zeit junge Studenten, die sich dem gleichen Forschungsgegenstand zuwanden. Heisenberg war erfolgreich, während ich mein Ziel nicht erreichte. Heisenberg stützte sich im Unterschied zu mir auf eine Fülle spektroskopischer Daten und fand dadurch den richtigen Weg, der das goldene Zeitalter der theoretischen Physik begründete.

Heisenberg entdeckte im Jahre 1927 die berühmte Unschärferelation, die besagt, dass man den Ort eines Quantenteilchens (z. B. eines Elektrons) und seine Geschwindigkeit nicht gleichzeitig messen kann. Mathematisch beruht das auf der Tatsache, dass Ort und Impuls (Masse mal Geschwindigkeit) in der klassischen Mechanik reelle Zahlen sind, in der Quantenmechanik aber zu linearen Operatoren werden, die nicht miteinander kommutieren. Das heißt, dass das Produkt dieser Operatoren nicht vertauscht werden darf. Ein Maß für die Nichtkommutativität ist das Plancksche Wirkungsquantum. Im algebraischen Zugang zur Quantengravitation werden Raum und Zeit zu Operatoren, die nicht miteinander kommutieren. Diese Theorie wurde von dem österreichischen Physiker Julius Wess entwickelt, der am Max-Planck Institut für Physik Werner Heisenberg in München tätig ist. Mit Hilfe der sogenannten Seiberg-Witten Abbildung war es ihm möglich, die Eichfeldtheorien des Standardmodells der Elementarteilchenphysik zu deformieren. Zusammen mit dem italienischen Physiker Bruno Zumino ist Julius Wess auch der Vater der supersymmetrischen Methoden in der Elementarteilchenphysik.

> Welcher der soeben diskutierten Zugänge zur Quantengravitation letztlich zum Erfolg führen wird, oder ob noch völlig andersartige Methoden eingesetzt werden müssen, haben allein künftige physikalische Experimente zu entscheiden.

Für einen Überblick über aktuelle Entwicklungen der Quantengravitation verweisen wir auf den von Bertried Fauser, Jürgen Tolksdorf und dem Autor herausgegebenen neuen Sammelband, den wir am Ende zitieren werden. Dort findet man beispielsweise einen völlig neuen Zugang zur Quantengravitation, der von Felix Finster an der Universität Regensburg entwickelt worden ist. Diese Methode des sogenannten "fermionischen Projektors" startet mit einer unstrukturierten diskreten Raum-Zeit und endet auf der Basis eines allgemeinen Variationsprinzips bei der Quantenfeldtheorie auf einer kontinuierlichen Raum-Zeit.

Zur Zeit arbeiten die Physiker intensiv daran, ein neues Fenster zum Weltall zu öffnen. Mit Hilfe von Laserstrahlen will man in nächster Zeit (zum Beispiel in der Nähe von Hannover in einer Zweigstelle des Max-Planck Instituts Albert Einstein für Gravitationsphysik in Golm/Potsdam), Gravitationswellen nachzuweisen. Solche Wellen werden zum Beispiel in der Endphase eines Doppelsterns erwartet, der aus zwei ineinander stürzenden Neutronensternen besteht, oder beim Zusammenstoss zweier schwarzer Löcher. Die dabei entstehenden typischen Gravitationswellenmuster versucht man zur Zeit durch außerordentlich komplizierte Simulationen auf Computern zu bestimmen.

Hier gibt es noch viele ungelöste mathematische Fragen. Das ist eine der großen Herausforderungen an die numerische Mathematik.

Die Mathematisierung der Naturwissenschaften

An der Wiege der modernen Naturwissenschaft stand die Newtonsche Mechanik zusammen mit der Schaffung der Differential- und Integralrechnung durch Newton und Leibniz Ende des 17. Jahrhunderts. Seit dieser Zeit haben sich die Entwicklung von Physik und Mathematik gegenseitig stark beeinflusst und befruchtet. Die anderen Naturwissenschaften, wie Chemie und Biologie, sind noch nicht in so hohem Masse mathematisiert wie die Physik. Das ist eine Aufgabe für die Zukunft. Dabei ist allerdings zu bedenken, dass jede naturwissenschaftliche Disziplin ihren eigenen Charakter und ihre eigenen unverwechselbaren Methoden besitzt. Es gibt jedoch viele Fragestellungen, bei deren Beantwortung der Einsatz mathematischer Hilfsmittel bedeutungsvoll sein kann. Eines der großen Rätsel der Biologie stellt die Arbeitsweise unseres Gehirns dar. An dieser Problematik wird am Max-Planck-Institut für neuropsychologische Forschung in Leipzig gearbeitet. Die Medizin ist heute in der Lage, bei psychologischen Experimenten empfindliche elektrische und magnetische Felder an der Oberfläche des menschlichen Kopfes zu messen. Um Aufschluss über die Gehirnaktivitäten zu erhalten, versucht man, die Furchenstruktur des Gehirns und die elektromagnetischen Felder im Innern des Kopfes zu berechnen. Zum Beispiel kann man Aktivitätszonen des Gehirns durch elektrische Dipole modellieren. Die Bestimmung der Dipolorte stellt ein sogenanntes inverses mathematisches Problem dar. Das große Ziel besteht darin, die Funktionsweise der einzelnen Teile des Gehirns genau zu bestimmen. Diese Informationen sollen dem Chirurgen bei Gehirnoperationen helfen, bleibende Schäden zu vermeiden.

Die Computertomographie gehört heute bereits zu den medizinischen Routineuntersuchungen. Die mathematische Grundlage stellt die sogenannte Radon-Transformation dar, die von Johann Radon im Jahre 1917 aus rein innermathematischen Überlegungen heraus entwickelt wurde. Die Aufgabe besteht darin, aus der Kenntnis der Schnitte eines geometrischen Objekts auf die Gestalt des Objekts selbst zu schließen. Früher wurden zur Untersuchung des Gehirns Kontrastmittel eingespritzt. Die heutige, auf mathematischen Methoden basierende Computertomographie ist völlig schmerzfrei. Damit erhält die Mathematik eine humane Dimension.

Im 19. Jahrhundert haben die Physiker erkannt, dass die ungeheure Fülle an thermodynamischen Prozessen in Biologie, Chemie, und Physik durch zwei Größen bestimmt wird: Energie und Entropie. Die Energie bleibt erhalten, während die gesamte Entropie des Weltalls wächst. Um 1945 begründete der US-amerikanische Ingenieur Claude Shannon die Informationstheorie, um die Übertragung von Daten in Nachrichtenkanälen optimal zu gestalten. Es stellte sich heraus, dass die Begriffe Information und Entropie auf das engste zusammenhängen. Grob gesprochen ist die Information gleich der negativen Entropie. Die Entwicklung von Lebewesen vom Einfachen zum Komplizierten in der Erdgeschichte ist mit einem Wachstum an Information und einem Verlust an Entropie verbunden. Die Entwicklung von Leben auf unserer Erde ist im Rahmen der Informationstheorie dadurch möglich, dass die Sonne ständig Energie bei hoher

Temperatur einstrahlt und diese Energie von der Erde bei sehr niedriger Temperatur in den Weltraum wieder abgestrahlt wird. Diese sogenannte Photonenmühle führt dazu, dass die Erde ständig Entropie verliert und dafür Information durch Strukturbildung gewinnt. Die Entropie hat die physikalische Dimension "Joule/Kelvin" (Energie dividiert durch Temperatur).

> Explizit strahlt jeder Quadratmeter der Erdoberfläche in einer Sekunde die Entropie von einem Joule/Kelvin in den Weltraum ab.

Keiner von uns würde existieren, wenn nicht unsere Eltern ihre Erbinformation an uns weitergegeben hätten. Dieser phantastische Informationstransport geschieht mit Hilfe der DNA (Nukleinsäure - deoxyribonucleicic acid). Die Entschlüsselung des menschlichen Genoms in den letzten Jahren beruhte auf einer raffinierten Kombination von experimenteller Technik mit mathematischen Methoden - der sogenannten Clusteranalyse in der mathematischen Statistik. Offensichtlich spielt bei biologischen Prozessen die außerordentliche Komplexität eine entscheidende Rolle, die weit über die in der unbelebten Materie beobachtete Komplexität hinausgeht. Eine der wichtigen Aufgaben für die Mathematik der Zukunft besteht darin, Gesetzmäßigkeiten dieser Komplexität aufzudecken.

Der Dialog zwischen Naturwissenschaftlern und Mathematikern

Um die Mathematik bei naturwissenschaftlichen Problemstellungen einzusetzen, muss der Mathematiker mit dem Naturwissenschaftler einen intensiven Dialog führen. Die Erfahrung zeigt, dass das nicht einfach ist, weil unterschiedliche Denkweisen aufeinander treffen. Der Mathematiker kann nicht erwarten, dass der Naturwissenschaftler ihm eine Frage vorlegt, die bereits perfekt in der Sprache der Mathematik formuliert ist. Diese Übersetzung ist Aufgabe des Mathematikers. Dabei ist es sehr hilfreich, wenn der Mathematiker gelernt hat, die Mathematik nicht nur nach ihren klassischen Teildisziplinen, sondern auch nach gebietsübergreifenden Phänomenen zu ordnen. Es gibt beispielsweise eine Mathematik

- der Symmetrie (auch Gruppentheorie genannt),
- des Zufalls und der zufälligen Prozesse (auch Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik genannt),
- der optimalen numerischen Simulation von komplizierten Prozessen auf Computern (auch wissenschaftliches Rechnen genannt),
- der Stabilität von Zuständen in der Natur und der Stabilität von Computeralgorithmen gegenüber Rundungsfehlern,
- des optimalen Verhaltens von Systemen (auch Variationsrechnung und Optimierung genannt),
- des optimalen Ausgleichs unterschiedlicher Interessen (auch Spieltheorie genannt),
- der Zeitentwicklung von Systemen (auch Theorie der dynamischen Systeme genannt),
- des qualitativen Verhaltens von Systemen (auch Topologie genannt),
- der Musterbildung und der Selbstorganisation,
- der Komplexität von Vielteilchensystemen (einschließlich Chaos),

- des Phasenübergangs in Vielteilchensystemen,
- der Komplexität von Computeralgorithmen,
- der Struktur von Graphen (z.B. Feynmandiagramme in der Quantenfeldtheorie oder Baumgraphen und Hopfalgebren in der Kombinatorik),
- der Verarbeitung von klassischer Information und Quantuminformation.

Im Bereich der Quanteninformation ist die Theorie der Praxis weit vorausgeeilt. Von dem endgültigen Ziel der praktischen Realisierung von extrem leistungsfähigen Quantencomputern ist man jedoch noch sehr weit entfernt. Die Gemeinsamkeiten mathematischer Strukturen werden in der Kategorientheorie (mit Hilfe von Objekten, Morphismen, Isomorphismen und Funktoren) untersucht, die zunehmend Bedeutung in der Quantenfeldtheorie gewinnt. Die auf die Phänomene gerichtete Sichtweise wird in den beiden Bänden des TEUBNER-TASCHENBUCHES der Mathematik betont, das wir am Ende zitieren werden. Dieses Taschenbuch ist keine trockene Formel- und Faktensammlung, sondern es betont den Ideenreichtum der Mathematik mit ihren Bezügen zu vielseitigen modernen Anwendungen und zur historischen Entwicklung. Die Erfahrung zeigt, dass sich der Lernende für ein neues Wissensgebiet besonders gut motivieren lässt, wenn man ihm den historischen Hintergrund aufzeigt und wenn ihm deutlich wird, wie hart die bedeutendsten Wissenschaftler in der Vergangenheit um neue Erkenntnisse gerungen haben, die heute in kristallklarer Form in den Lehrbüchern zu finden sind. Im Jahre 1984 verfasste die American Mathematical Society einen Bericht über die Zukunft der Mathematik. Der damalige Präsident dieser Society, Arthur Jaffe von der weltberühmten Harvard University, unterstrich folgendes:

> Mathematische Forschung sollte so breit und originell wie möglich sein und sehr langfristige Zielstellungen verfolgen. Wir erwarten, dass sich die Geschichte wiederholt und die tiefsten und wirkungsvollsten Anwendungen auf einer Mathematik beruhen, die wir heute noch nicht kennen und nicht vorhersagen können. Diese Mathematik muss erst noch entdeckt werden.

Es ist richtig, dass die großen Impulse für die Entwicklung einer Wissenschaft von ihren Meistern stammen. Das sollte jedoch den Einzelnen nicht entmutigen. Jeder kann seinen Beitrag leisten. Bereits im 17. Jahrhundert schrieb Blaise Pascal:

> Die Menschheit verhält sich wie ein einziger Organismus, der ewig lebt und nicht aufhört zu lernen.

Es ist ein schönes Gefühl für jeden Lernenden und Lehrenden, diesem Organismus anzugehören.

Theoria cum praxi

Die Universität Leipzig, an der ich lange Zeit gearbeitet habe, wurde im Jahre 1409 gegründet. Der bedeutendste Universalgelehrte der Neuzeit, Gottfried Wilhelm Leibniz, war ihr berühmtester Student. Sein Schaffen stellte er unter das Prinzip "theoria cum praxi". Felix Klein, der schon erwähnte Begründer des Leipziger Mathematischen Seminars im Jahre 1881, schrieb:

> Die größten Mathematiker aller Zeiten wie Archimedes, Newton und haben stets Theorie und Anwendungen in gleicher Weise miteinander vereint.

Epilog

Ich möchte mit einigen philosophischen Gedankensplittern schließen. Der englische Mathematiker, Sozialwissenschaftler und Philosoph Bertrand Russel, der von 1872 bis 1970 lebte und 1950 den Nobelpreis für Literatur erhielt, hat sich intensiv mit der philosophischen Dimension der Mathematik auseinandergesetzt. In den Jahren 1910 bis 1913 verfasste er mit Alfred Whitehead das monumentale dreibändige Werk "Principia Mathematica," in dem versucht wurde, die Mathematik vollständig auf eine formal-logische Grundlage zu stellen. Russels Credo lautete:

> Die Mathematik führt uns über das rein menschliche hinaus in das Reich der absoluten Notwendigkeit, mit dem nicht nur unsere Welt, sondern jede mögliche Welt übereinstimmen muss.

Das ist ein sehr hoher Anspruch. Die Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert hat uns gelehrt, bescheidener zu werden. Einen wichtigen Beitrag dazu leistete der Logiker Kurt Gödel, der die Grenzen des mathematischen Denkens aufzeigte und nach seiner Emigration lange Zeit zusammen mit Einstein am Institute for Advanced Study in Princeton arbeitete. Grob gesprochen bewies Gödel in seiner Wiener Habilitationsschrift aus dem Jahre 1931, dass es nicht möglich ist, aus einem widerspruchsfreien rekursiven Axiomensystem der Arithmetik alle im Bereich der natürlichen Zahlen gelten mathematischen Aussagen abzuleiten. Insbesondere ist es nicht möglich, einen Computer mit Axiomen zu füttern, so dass er jede richtige mathematische Aussage nach endlich vielen, möglicherweise sehr vielen Schritten erhält. Die Vielfalt der Mathematik ist viel reicher. Die Beschäftigung mit ihr erfordert Phantasie und Schöpferkraft. Um einen ersten Einblick zu bekommen, empfehle ich wärmstens die Lektüre des Buches von Martin Aigner und Günter Ziegler mit dem Titel "Das Buch der Beweise." Hierzu ist zu sagen, dass der außerordentlich originelle ungarische Mathematiker Paul Erdös gern davon sprach, dass es im Himmel ein besonderes Buch gibt, in dem die schönsten mathematischen Beweise niedergeschrieben sind. Das Buch von Martin Aigner und Günther Ziegler, der zur Zeit der Vorsitzende der Deutschen Mathematikervereinigung ist, stellt eine Reihe von Perlen der Mathematik einem großen Leserkreis vor. Der anregende, liebenswerte Stil dieses Buches kann als Vorbild für eine Darstellung der Mathematik dienen, die den Leser begeistert. In dem viel gelesenen Buch von Douglas Hofstadter, "Gödel, Escher, Bach", wird anhand von zahlreichen Beispielen erläutert, dass sowohl in der Logik Gödels als auch in der Musik Bachs und der Malerei Eschers ähnliche Strukturen auftreten, die durch ein endlos geflochtenes Band symbolisiert werden können.

Richard Courant, der von 1888 bis 1972 lebte und nach der Machtergreifung des Faschismus in Deutschland emigrierte, um nach dem Vorbild seines Göttinger Instituts in New York das weltberühmte Courant Institut zu gründen, schrieb im Jahre 1964:

> Das Wechselspiel zwischen Allgemeinheit und Individualität - Deduktion und Konstruktion - Logik und Phantasie - das ist die entscheidende Triebkraft einer lebensvollen Mathematik. Im Zusammenhang mit der Gewinnung eines tiefliegenden Results können eine oder mehrere dieser Seiten bedeutungsvoll sein. Eine weitreichende mathematische Entwicklung startet in der Regel von konkreten Fragestellungen, ebenso wie ein Ballon vom festen Boden startet. Dann wirft der Ballon Ballast ab, um in die höheren Schichten der Abstraktion zu gelangen. Dort kann er sich leicht bewegen und Fahrt aufnehmen. Der entscheidende Test ist jedoch die Landung des Ballons auf festem Boden, der einen neuen Landstrich erschließt. Kurz gesagt, der Flug in Neuland muss vom Konkreten starten und beim Konkreten enden.

Erich Kähler, der von 1906 bis 2000 lebte und unter anderem in Königsberg, Leipzig, Berlin und Hamburg wirkte, verfasste im Jahre 1955 für den Gedenkband zum 100. Todestag von Gauß einen Artikel mit dem Titel: "über die Beziehungen der Mathematik zu Astronomie und Physik." Dort schreibt er:

> Die Mathematik ist ein Organ der Erkenntnis und eine unendliche Verfeinerung der Sprache. Sie erhebt sich aus der gewöhnlichen Sprache und Vorstellungswelt wie eine Pflanze aus dem Erdreich, und ihre Wurzeln sind Zahlen und einfache räumliche Vorstellungen... Wir wissen nicht, welcher Inhalt die Mathematik als die ihm allein angemessene Sprache verlangt, wir können nicht ahnen, in welche Ferne und Tiefe dieses geistige Auge den Menschen noch blicken lässt.

Wir begannen unseren Streifzug mit einem Blick zum nächtlichen Himmel. Dieser Anblick regt uns nicht nur an, über eherne Naturgesetze nachzudenken, sondern auch über die menschliche Unvollkommenheit, den Sinn unseres Lebens und ob hinter allem ein göttlicher Plan steht. Im Harnack-Haus der Max-Planck Gesellschaft in Berlin-Dahlem kann man Goethes Ausspruch lesen:

> Das größte Glück des Menschen ist es, das Erforschliche erforscht zu haben und das Unerforschliche ruhig zu verehren.

Sartorius von Waltershausen berichtet:

> Gauß hat einmal erklärt, es gebe Fragen, auf deren Beantwortung er einen unendlich viel höheren Wert legen würde als auf die mathematischen. Es seien dies die Fragen über unser Verhältnis zu Gott, über unsere Bestimmung und unsere Zukunft. Allein, so habe er geendet, ihre Lösung liege ganz unerreichbar über uns und ganz außerhalb des Gebietes der Wissenschaft.

Dieses Zitat entnehme ich der Gauß-Biographie von Erich Worbs, die mir meine Schwester Palmarum 1955 zur Konfirmation schenkte. Auf die erste Seite schrieb sie die Widmung: "Wirke im Raum für Deine Zeit, aber bleibe in der Ewigkeit zu Hause."

Literaturempfehlungen

F. Adams, G. Laughlin, Die fünf Zeitalter des Universums: eine Physik der Ewigkeit, Deutscher Taschenbuchverlag, München, 2004.

M. Aigner and G. Ziegler, Das Buch der Beweise, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

H. Alten, D. Naini, M. Folkerts, H. Schlosser, K. Schlote, H. Wussing, 4000 Jahre Algebra: Geschichte, Kulturen, Menschen, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

M. Atiyah, Mathematics in the 20th Century, Bull. London Math. Soc. **34** (2002), 1-15.

S. Bais, Die Gleichungen der Physik: Meilensteine des Wissens, Birkhäuser, Basel, 2005.

D. Bodanis, Bis Einstein kam: die abenteuerliche Suche nach dem Geheimnis der Welt, Deutsche Verlagsanstalt, Stuttgart, 2001.

G. Börner, The Early Universe: Facts and Fiction, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

R. Brennan, Heisenberg Probably Slept Here: The Lives, Times, and Ideas of the Great Physicists of the 20th Century, Wiley, New York, 1997 (Newton, Einstein, Planck, Rutherford, Bohr, Heisenberg, Feynman, Gell-Mann).

R. Courant, H. Robbins, Was ist Mathematik? Springer-Verlag, Berlin, 1967.

F. Dyson, Origins of Life, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1997.

B. Fauser, J. Tolksdorf, and E. Zeidler (Eds.), Quantum Gravity: Status and Ramifications, Birkhäuser, Basel, 2006 (to appear).

R. Feynman, "Sie belieben wohl zu scherzen, Mr. Feynman!", Piper, München, 2004.

S. Gottwald, H. Ilgauds, K. Schlote (Hrsg.), Lexikon bedeutender Mathematiker, Bibliograhisches Institut, Leipzig, 1990.

B. Greene, Das elegante Universum: Superstrings, verborgene Dimensionen und die Suche nach der Weltformel, Siedler, Berlin, 2000.

G. Grosche, D. Ziegler, V. Ziegler, E. Zeidler (Hrsg.), Teubner-Taschenbuch der Mathematik, Vol. 2, Teubner-Verlag, Leipzig, 2003.

Harenberg Lexikon der Nobelpreisträger: alle Preisträger seit 1901, ihre Leistungen, ihr Leben, ihre Wirkung, Harenberg Lexikon-Verlag, Dortmund, 2000.

D. Hofstadter, Gödel, Escher, Bach: Ein endlos geflochtenes Band, Klett-Cotta, Stuttgart, 1991.

G. Kane, Supersymmetry: Unveiling the Ultimate Laws of Nature, Perseus Publishing, Cambridge, Massachusetts, 2001.

R. Kanigel, Der das Unendlich kannte: das Leben des genialen indischen Mathematikers Srinivasa Ramanujan, Vieweg, Wiesbaden, 1995.

C. Kiefer, Quantum Gravity, Oxford University Press, Oxford, 2004.

Lexikon der Physik, Bände 1-6, Spektrum-Verlag, Wiesenbaden, 1998.

Lexikon der Mathematik, Bände 1-6, Spektrum, Wiesbaden, 2001.

K. Maurin, The Riemann Legacy: Riemannian Ideas in Mathematics and Physics of the 20th Century, Kluwer, Dordrecht, 1997.

R. Penrose, The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe, Jonathan Cape, London, 2004.

E. Regis, Einstein, Gödel & Co: Genialität und Exzentrizität - die Princeton-Geschichte, Birkhäuser, Basel, 1989.

C. Reid, Hilbert, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

C. Reid, Courant in Göttingen und New York, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

C. Scriba, P. Schreiber, 5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen, Menschen, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

S. Singh, Fermats letzter Satz: die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels, das die bedeutendsten Mathematiker 358 Jahre lang in Atem hielt, Hanser-Verlag, München, 1998.

R. Taschner, Der Zahlen gigantische Schatten: Mathematik im Zeichen der Zeit, Vieweg, Wiesbaden, 2005 (die Wechselwirkung der Mathematik in der Geschichte mit Malerei, Musik, Naturwissenschaften und Technik).

K. Thorne, Gekrümmter Raum und verbogene Zeit: Einsteins Vermächtnis, Droemer Knaur, München, 1994 (schwarze Löcher).

M. Veltman, Facts and Mysteries in Elementary Particle Physics, World Scientific, Singapore, 2003.

Vieweg Berufs- und Karriereplaner 2003: Mathematik (Schlüsselqualifikationen für Technik, Wirtschaft und IT; für Studierende und Hochschulabsolventen; ein Studienführer und Ratgeber), Vieweg, Wiesbaden.

G. Walz (Hrsg.), Faszination Mathematik (mit zahlreichen Beiträgen renommierter Autoren, unter anderem von Sir Michael Atiyah und Harold Scott Coexter), Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2003.

E. Worbs, Carl Friedrich Gauß: Ein Lebensbild, Koehler & Amelang, Leipzig, 1955.

H. Wussing (Hrsg.), Geschichte der Naturwissenschaften, Edition Leipzig, 1983.

H. Wussing, Geschichte der Mathematik, Springer-Verlag, Heidelberg (in Vorbereitung).

E. Zeidler (Hrsg.), Teubner-Taschenbuch der Mathematik, Vol. 1, Teubner-Verlag, Leipzig, 2003.

E. Zeidler, Quantum Field Theory: A Bridge between Mathematicians and Physicists, Vol. I: Basics in Mathematics and Physics, Springer-Verlag, Heidelberg, 2006 (geplant ist eine sechsbändige Gesamtdarstellung).