§ 2. Die Exponentialfunktion

(1) **Satz 1** $\exists!$ Lsg. im AWP

$$\dot{x} = x \quad , \quad x(0) = 1 \quad , \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

Beweis. 1) Eindeutigkeit wie in § 1: Übg!

2) Existenz: Betrachte für $f: \mathbb{R}$ stetig mit $f(0)=1$

$$Tf(t) \overset{\text{def}}{=} 1 + \int_0^t f(t)\,dt$$

Tf diffbar, und $Tf = f \iff f = \dot{f}$.
Also: suche Fixpunkt von T.

Setze
$$f_0 \equiv 1.$$
$$f_1 = Tf_0$$
$$f_2 = Tf_1$$
$$\vdots$$

Nimm an, $\lim_{k\to\infty} T^k f_0 \overset{\text{def}}{=} f$ existiert.
Dann $Tf = f$.

Berechne f_k. Sofort

$$f_k = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!}$$

$\leadsto$ $\lim f_k = f = \sum_0^\infty \frac{t^k}{k!}$; lokal glm. konv., stetig. Wegen $Tf = f$ auch diffbar, $\dot{f} = f$

Bemerkung: Schulunterricht ? ...

⑤ Exponentialfkt von Matrizen

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}, = (a_{kl})_{k,l=1 \dots n}$$

Def 1 $\quad |A| = n \cdot \max |a_{kl}|$

Def 2 $\quad A_j \to A \Leftrightarrow |A - A_j| \to 0$

$$\Leftrightarrow a^j_{kl} \to a_{kl}$$

analog: Konvergenz etc von Reihen v Matrizen

Hs. 1) $|A| \geq 0$, $= 0 \Leftrightarrow A = 0$

2) $|\lambda A| = |\lambda||A|$

3) $|A + B| \leq |A| + |B|$

4) $|AB| \leq |A||B|$

Beweis von 4) $\quad |AB| = n \cdot \max\limits_{k,l} \left|\sum_r a_{kr} b_{rl}\right|$

$$\leq n \max_{k,l} \sum_r |a_{kr}||b_{rl}|$$

$$\leq \cancel{n \max_{k,l} n \max |a_{kr}| |b_{rl}|}$$

$$\leq n \max_{k,l} n \max_{k,r} |a_{kr}| \max_{r,l} |b_{rl}|$$

$$= n^2 \max |a_{kr}| \max |b_{rl}| = |A||B|$$

Def 3 $\exp A = e^A = \sum_k \frac{1}{k!} A^k$ Exp fkt

Hs. Reihe ist lokal gleichm absolut konvergent

Beweis. $\left| \sum_{\nu=0}^{k} \frac{A^\nu}{\nu!} - \sum_{\nu=0}^{\ell} \frac{A^\nu}{\nu!} \right|$

$$= \left| \sum_{k+1}^{\ell} \frac{A^\nu}{\nu!} \right| \le \sum_{k+1}^{\ell} \frac{1}{\nu!} |A|^\nu \xrightarrow[k,\ell \to \infty]{} 0$$

Offenbar ist

$\exp 0 = E = [1, 1, \ldots, 1]$ („diagonal")
$\exp [\lambda_1, \ldots, \lambda_n] = [e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}]$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ definiere nun

$$\exp tA = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$$

Jede Komponente ist ein auf $\mathbb{R}$ konv PR
$\Rightarrow \exp tA$ nach t diffbar.

Satz 2 $t \mapsto \exp tA$ diffbare Abb von $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n \times n}$

Berechne Ableitg!

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \frac{d}{dt} \sum \frac{1}{k!} A^k t^k$$

$$= \sum \frac{1}{k!} k A^k t^{k-1}$$

$$= A \exp tA = (\exp tA) A$$

$\rightsquigarrow \quad \frac{d^n}{dt^n} \exp tA = A^n \exp tA = (\exp tA)\, A^n$

$\rightsquigarrow$ Taylorreihe

$$\exp tA = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n \exp t_0 A}{n!} (t-t_0)^n$$

$$= \exp t_0 A \; \exp (t-t_0) A$$

Satz 3 1) $\exp\,(t_1+t_2)A = \exp t_1 A \cdot \exp t_2 A$
2) $\exp\,(-A) = (\exp A)^{-1}$
3) $\exp 0 \quad = E$

Also: $\exp A$ immer regulär!

Vorsicht: $\exp(A+B) \neq \exp A \cdot \exp B$

(5) Sei

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$J^2 = -E$, $J^3 = -J$, $J^4 = E$ usw

Hs. $aE + bJ = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

$$\exp tJ = E + \frac{t}{1!} J - \frac{t^2}{2!} E - \frac{t^3}{3!} J \pm \dots$$

$$= \sum (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} E + \sum (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} J$$

$$= c(t) \cdot E + s(t) J$$

Def 4. Die Fktn $\cos t$, $\sin t$ werden durch

$$e^{tJ} = \cos t\, E + \sin t\, J$$

eingeführt.

$\leadsto$ übliche Eigenschaften, z. B.

$$\frac{d}{dt} e^{tJ} = J e^{tJ} = J(\cos t\, E + \sin t \cdot J)$$
$$= \cos t \cdot J - \sin t \cdot E$$

$$\leadsto \frac{d}{dt} \cos t = -\sin t \qquad \frac{d}{dt} \sin t = \cos t$$

usw.

(4) Alternativer Zugang

Satz 4 Die Dgl $\ddot{x} + x = 0$ hat 2-dim Lösungsraum (siehe §1)

Def 5 $\cos t$ Lsg mit $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$
$\sin t$ — $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$

Satz 5 $\cos t$, $\sin t$ erzeugen Lösungsraum.

$\leadsto$ die üblichen Eigenschaften