§5. Algebraische Gleichungen

0) Was hat Galois mit algebraischen Gleichungen zu tun?

① K Körper, $f(X)$ normiertes Polynom über K, $\deg f(X) = n$.

(A) $$f(X) = 0$$

Def 1. $E|K$ Zerfällungskörper von $f(X) \Leftrightarrow$

1) In E zerfällt $f(X)$ in Lin.-faktoren: (mit Wiederholungen)

$$f(X) = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n), \quad \alpha_i \in E$$

2) $E = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Satz 1. Jedes $f(X)$ hat (bis auf Iso) genau einen Zerfällungskörper

Beweis. ~~OE~~. Sei $f_1(X)$ ein irr. Faktor von $f(X)$. Setze

$$E = K[X]/(f_1(X))$$

$\rightsquigarrow$ in E eine Nullstelle von $f_1(X)$ nämlich $X \bmod f_1(X)$. Dann ist $f(X) \in E[X]$ von kleinerem Grad: Iteriere

Theorem 2: Es sei char $K = 0$. Jede Galoiserweiterung ist Zerfallungskörper eines Polynoms, ~~...~~ und umgekehrt.

(Zum Beweis Algebravorlesung) Beweisidee:

f irred $\in K[X]$, $\varphi : K \xrightarrow{\sim} \tilde{K}$,
$\tilde{f}$ das entspr Pol in $\tilde{K}$,
α Nullstelle von f in $L \supset K$
$\tilde{\alpha}$ " " $\tilde{f}$ in $\tilde{L} \supset \tilde{K}$
dann ex genau eine Fortsetzung $\varphi_1 : K[\alpha] \xrightarrow{\sim} \tilde{K}[\tilde{\alpha}]$
mit $\varphi_1 | K = \varphi$.

(2) Def 2 char $K = 0$, $f \in K[X]$, E Zerfallungskörper von f, $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(E|K)$. Dann heißt $\mathcal{G}$ die Galoisgruppe von $f(X)$.

Bemerkung. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln von f. Jedes $\sigma \in \mathcal{G}$ permutiert die α_i und ist durch diese Permutation festgelegt, also $\mathcal{G} \subset S_n$. —
So hat Galois die Gruppe eingeführt!
(Die Permutationen, die sich zu Autos von E fortsetzen)

Def 3 $E|K$ Radikalerweiterung $\Leftrightarrow$
$K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_r = E$

so daß $K_{i+1} = K_i(\alpha_i)$, α_i Nullstelle eines Pol $X^{n_i} - a_i$, $a_i \in K_{i-1}$.

Def 4 $f(X) \in K[X]$ irr, durch Radikale lösbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ Radikalerweiterung E/K, in der f eine Wurzel hat.

Def 5 $\mathcal{G}$ auflösbar $\Leftrightarrow$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \supset \mathcal{G}_1 \supset \mathcal{G}_2 \supset \dots \supset \mathcal{G}_r = \varepsilon$$

$\mathcal{G}_i$ normal in $\mathcal{G}_{i-1}$, $\mathcal{G}_i / \mathcal{G}_{i-1}$ abelsch.

Theorem 3 (char $K = 0$). $f(X)$ irr $\in K[X]$ mit Galoisgruppe $\mathcal{G}$. f ist durch Radikale ~~auf~~lösbar, wenn $\mathcal{G}$ auflösbar ist. Dann ex eine Radikalerweiterung, in der alle Wurzeln von $f(X)$ liegen.

3 K Körper, $K(u_1, \dots, u_n)$ rat Funktkörper über K, $f(X) \in K(\dots)[X]$:

$$f(X) = X^n + u_1 X^{n-1} + \dots + u_n.$$

Dann: $f(X) = 0$ die allgemeine Gleichung n-ten Grades über K.

Theorem 4. Gal $f(X)$ ist S_n

Theorem 5. $n \geq 5$, ist S_n nicht auflösbar.
$n \leq 4$: auflösbar

Damit: die allgemeine Gleichung ≥ 5. Grades ist nicht durch Radikale lösbar, wohl aber die Gleichung vom Grad ≤ 4