Kompakte modulare Symbole auf der Eisenstein-Kohomologie von $GL(n)$ und kritische Werte von Hecke-L-Funktionen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Johannes Schlippe
aus Uslar/Solling

Bonn 2005

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Erster Referent: Prof. Dr. G. Harder
Zweiter Referent: Prof. Dr. J. Franke
Tag der Promotion: 13. 10. 2005

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung und Danksagungen

0.1 Kontext der Arbeit: die DELIGNE-Vermutung

Diese Arbeit befaßt sich im Grunde mit *speziellen Werten von L-Reihen.* Dies ist ein alt-ehrwürdiger und aktueller Gegenstand der Zahlentheorie, zu dessen Urgründen einige berühmte konkrete Resultate gehören, die man (hoffentlich) früh im Studium der Mathematik kennenlernt. Zu diesen gehört die Reihendarstellung für π,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \pm \dots,$$

die ihr Entdecker Gottfried Wilhelm LEIBNIZ mit den Worten „Gott hat Freude an den ungeraden Zahlen“ kommentiert haben soll (er gewann diese Reihe –in moderner Ausdrucksweise– aus der Potenzreihenentwicklung des Arcustangens). Ein weiteres prominentes Beispiel ist die (aus der Partialbruch-Entwicklung des inversen Cosinus herleitbare) Entdeckung von Leonhard EULER, die er für eines seiner schönsten Resultate hielt, daß nämlich für eine beliebige positive natürliche Zahl m die Summe der reziproken $2m$-ten Potenzen bis auf einen „elementaren“ rationalen Faktor dem Produkt aus der $2n$-ten Potenz von π (oder $2\pi i$) und der $2m$-ten BERNOULLI-Zahl gleich ist – die präzise Formel lautet

$$\forall m \in \mathbb{N}_+ : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = (-1)^{m+1} \cdot \frac{(2\pi)^{2m}}{2 \cdot (2m)!} \cdot B_{2m};$$

die BERNOULLI-Zahlen sind als *rationale* Zahlen bekannt, da sie die TAYLOR-Koeffizienten der Potenzreihe $\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cdot \frac{t^n}{n!}$ sind!

Mit heutigen sprachlichen Mitteln kann man die LEIBNIZ-Identität auch deuten als Aussage über den Wert $\frac{\pi}{4} \overset{!}{=} L(\chi_4, 1) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ der DIRICHLET-L-Reihe zum nichttrivialen Charakter $\chi_4 \pmod 4$ in ihrem kritischen Punkt 1, und der Satz von EULER spricht über die Werte $\zeta(2m) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2m}$ der Zetafunktion („von RIEMANN“) in ihren kritischen Punkten, den geraden positiven Zahlen. –Diesen Ergebnissen ist eine große Zahl von (sowohl allgemeinen wie speziellen) Resultaten über die Natur spezieller Werte von arithmetisch interessanten Zeta- und L-Reihen zur Seite gestellt worden: unter anderem etabliert der Satz von SIEGEL–KLINGEN die Werte von DIRICHLET-L-Reihen zu *totalreellen* Zahlkörpern in natürlichen Zahlen der „richtigen“ Parität als Produkte aus gewissen Potenzen von π und ganz-algebraischen Zahlen, die im Kompositum des betreffenden Zahlkörpers und des Charakter-Werte-Körpers liegen. Auf einer etwas anderen Entwicklungslinie führte das Studium von elliptischen Kurven mit Komplexer Multiplikation zu Resultaten von (u.a.) EISENSTEIN, KRONECKER, HURWITZ, HERGLOTZ und DAMERELL über gewisse Werte der Zeta-Funktionen einiger *imaginär-quadratischer* Körper. –Man kann dann *einerseits* „Formeln“ wie die eben genannten als Mittel zum Studium der in ihnen auftretenden transzendenten (oder unter Transzendenz-Verdacht stehenden) Zahlen (wie π) ansehen, oder man beachtet *andererseits*, daß dieselbe „transzendente“ Zahl (z.B. π) in vielen derartigen Formeln verwandter Natur auftritt, und interessiert sich dann für die Natur der mit diesen auftretenden „Koeffizienten“ wie der BERNOULLI-Zahlen B_{2m}; die Sätze von HERBRAND–RIBET (neben anderen) zeigen, daß solche Koeffizienten tiefliegende Informationen über die Natur von Zahlkörpern enthalten!

In der Arbeit [DeVP] von 1977 hat Pierre Deligne die „damals“ bekannten Aussagen und Erwartungen über derartige Werte in einer weitreichenden Vermutung über die kritischen Werte von motivischen L-Funktionen zusammengefaßt und erweitert. –Die in einem gewissen Sinne einfachsten in diesem Kontext studierten „Motive“ entsprechen den Hecke-Charakteren (oder Größencharakteren) von Zahlkörpern F, d.h. stetigen $\mathbb{C}^*$-wertigen Homomorphismen der Ideleklassengruppe $\mathbb{I}_F/F^*$ des Körpers, und deren L-Funktionen umfassen alle oben genannten speziellen L-Reihen. Man darf nun nicht erwarten, Aussagen über die Werte an *allen* ganzzahligen Stellen zu erzielen –vergleiche die vollständig mysteriöse Natur der Werte der Zetafunktion an ungeraden Argumenten–, man hat die Klasse der betrachteten L-Reihen geeignet einzuschränken –so können wohl nicht *alle*, sondern nur die *algebraischen* Hecke-Charaktere behandelt werden–, und die Spezifikation der transzendenten „Perioden“ und der Zahlkörper, in denen die „Koeffizienten“ liegen, ist subtil.

Die zu diesem Zeitpunkt noch offenen Fälle dieser „Rationalitäts“-Vermutung von Deligne über Hecke-L-Werte beziehen sich auf die algebraischen Hecke-Charaktere von *totalimaginären* Zahlkörpern (denn nur für totalreelle und für totalimaginäre Zahlkörper existieren überhaupt kritische Stellen, und die Situation für die erstgenannte Klasse von Körpern ist ja gerade durch den Satz von Siegel-Klingen geklärt). Eine „kleine“ Unterklasse der totalimaginären Zahlkörper sind die CM-Körper: dies sind diejenigen Zahlkörper, die als Endomorphismen-Schiefkörper von gewissen einfachen abelschen Varietäten mit „besonders vielen“ Endomorphismen auftreten. Die genannten abelschen Varietäten entsprechen nun besonderen (sog. CM-) Punkten auf gewissen Modulvarietäten abelscher Varietäten, und die kritischen L-Werte von algebraischen Hecke-Charakteren auf CM-Körpern können mittels der Werte von (holomorphen) (Hilbert–Siegel-)Modulformen in diesen besonderen Punkten studiert werden. Dies erlaubte es Don Blasius, in der Arbeit [Bl86] (die auf Resultate von Goro Shimura aufbaut) mittels tiefliegender Methoden der arithmetischen algebraischen Geometrie zu zeigen, daß für CM-Körper die kritischen Werte der L-Funktionen zu algebraischen Hecke-Charakteren tatsächlich Produkte aus den Deligne-Perioden und aus algebraischen Zahlen in den „richtigen“ Zahlkörpern sind, d.h. daß die Deligne-Vermutung in diesem Falle zutrifft!

Im Falle eines allgemeinen totalimaginären Zahlkörpers, der also kein CM-Körper ist, sah man nun zunächst keine Möglichkeit eines Beweisansatzes „mittels algebraischer Geometrie“, und andere Zugänge zu Etablierung von Rationalität waren nicht sichtbar. – Abhilfe schuf hier die Theorie von Günter Harder der rational definierten, besonders der Eisenstein-Kohomologieklassen arithmetischer Gruppen. Konkreter: sei E ein totalimaginärer Zahlkörper und η ein algebraischer Hecke-Charakter von E. Dann faktorisiert η –bis auf Multiplikation mit Charakteren endlicher Ordnung– über die Normabbildung zum maximalen Teilkörper F von E, der vom Typ CM ist: $\eta = \chi \cdot (\psi \circ N_F^E)$ für ein χ von endlicher Ordnung und einen algebraischen Hecke-Charakter ψ von F; es muß nach Blasius ja nur noch der Fall $n := [E : F] \geq 2$ behandelt werden. Hat nun η kritische Stellen, so ist F ein CM-Körper, und nach den Resultaten von Blasius ist die Natur der kritischen Werte der L-Reihen zu algebraischen Hecke-Charakteren auf F bekannt. Ferner hat man gute Kontrolle über das Verhalten der Deligne-Perioden unter Zurückziehung entlang Normabbildungen und unter Multiplikation mit Charakteren endlicher Ordnung. In dem Artikel [HaSc] (teilweise präzisiert in dem Buch [Schap]) leiten Harder und Norbert Schappacher folgendes her: es sei $\varphi = (\chi|_F) \cdot \psi^n$ die Einschränkung von η auf F; es darf oBdA angenommen werden, daß 0 eine kritische Stelle von η (und damit von φ) ist. Es sei $K \subset \mathbb{C}$ der Wertekörper der endlich-adelischen Anteile η_f und φ_f; dies ist ein Zahlkörper! –In Termen der DELIGNE-Perioden und der ∞-Typen von η und φ kann nun eine Zahl $\Delta = \Delta(E/F, \eta) \in \mathbb{C}^*$ definiert werden, so daß es zum Beweis der DELIGNE-Vermutung für E und η genügt zu zeigen, daß die komplexe Zahl $L^*(\eta) := \Delta \cdot \frac{L_E(\eta,0)}{L_F(\varphi,0)}$ schon im Zahlkörper K liegt! (Ähnliches leitet auch BLASIUS in der später publizierten Arbeit [Bl97] her.)

Der Ansatz von HARDER besteht nun –zunächst sehr grob gesprochen– in folgendem: man konstruiert eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{S}$ mit einem lokalen Koeffizientensystem $\widetilde{\mathcal{M}}$ und zwei Kohomologieklassen von $\mathcal{S}$ (in komplementären Graden) mit Koeffizienten in $\widetilde{\mathcal{M}}$ bzw. im dualen System $\widetilde{\mathcal{M}}^\vee$, so daß die POINCARÉ-Paarung dieser Klassen gerade den Wert $L^*(\eta)$ ergibt. Kann man nun sagen, daß die beiden genannten Klassen „rational definiert“ im Sinne von [Ha87, Kap. 1] sind, so liegt der Wert ihrer Paarung schließlich in K, womit die DELIGNE-Vermutung in diesem Falle gezeigt ist!

0.2 Die Beweisstrategie von HARDER: EISENSTEIN-Kohomologie

Es sei also E ein (nicht-CM-)totalimaginärer Zahlkörper und η ein algebraischer HECKE-Charakter von E, für den 0 eine (rechts-)kritische Stelle ist; es bezeichne F den maximalen CM-Teilkörper von E, f_0 dessen halben Körpergrad $\frac{[F:\mathbb{Q}]}{2}$ (also die Anzahl seiner archimedischen Stellen), $n := [E : F] \geq 2$ den Erweiterungsgrad und ψ einen algebraischen HECKE-Charakter von F, so daß mit einen DIRICHLET-Charakter (einem HECKE-Charakter endlicher Ordnung) χ von E und dessen Einschränkung $\omega := \chi\big|_{\mathbb{I}_F}$ die Zerlegungen

$$\eta = \chi \cdot (\psi \circ N_F^E) \text{ und } \varphi := \eta\big|_{\mathbb{I}_F} = \omega \cdot \psi^n$$

bestehen.

0.2.1 Lokalsymmetrische Räume und kompakte modulare Symbole

Man betrachtet von der F-Algebra $E =: V$ zunächst nur ihre Struktur als n-dimensionaler F-Vektorraum und definiert die algebraische Gruppe $G_0/_F := GL_F(V) \cong GL_n/_F$, das Wieder-Erinnern an die „Zusatz“-Struktur von V als F-Algebra bettet dann $H_0/_F := \mathrm{Res}_F^E(\mathbb{G}_m/_E)$ wegen $\mathbb{G}_m/_E = GL_E(V)$ als eine F-Untergruppe nach G_0 ein, die dort ein maximal-anisotroper Torus ist. –Das Streichen eines Subskripts $_0$ an einer F-algebraischen Gruppe bezeichne immer Skalarrestriktion nach $\mathbb{Q}$, also $G = \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^F(G_0)$, etc. . Die Gruppen der $\mathbb{R}$-wertigen Punkte haben dann folgende Struktur: es ist $H(\mathbb{R}) = (E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^* \cong (\mathbb{C}^*)^{n \cdot f_0}$ und $G(\mathbb{R}) = GL_n(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) \cong GL_n(\mathbb{C}^{f_0}) \cong GL_n(\mathbb{C})^{f_0}$. Es sei $K_\infty^{G,\circ} \subset G(\mathbb{R})$ eine maximale zusammenhängende kompakte Untergruppe (sie ist dann zu $U(n)^{f_0}$ isomorph), die eine gegebene maximale zusammenhängende kompakte Untergruppe $K_\infty^{H,\circ} \subset H(\mathbb{R})$ umfaßt (die zu $(\mathsf{S}^1)^{n \cdot f_0}$ isomorph ist), und für $\bullet = G, H$ sei $\mathsf{K}^\bullet$ das Produkt aus $K_\infty^{\bullet,\circ}$ und aus der Eins-Zusammenhangskomponente des Zentrums $Z_G(\mathbb{R}) = (F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^*$ (letztere kann noch etwas variiert werden); auch ein *Niveau*, d.h. eine offen-kompakte Untergruppe $K_f^G \subset GL_{\widehat{\mathcal{O}_F}}(\widehat{\mathcal{O}_E}) \subset G(\mathbb{A}_f)$ sei gegeben, und K_f^H sei deren Schnitt mit $H(\mathbb{A}_f)$. Dann betrachtet man den *adelisch-lokalsymmetrischen Raum*

$$\mathcal{S}^G_{K^G_f} := G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/\mathsf{K}^G \cdot K^G_f,$$

eine endliche disjunkte Vereinigung von Mannigfaltigkeiten (oder orbifolds, falls das Niveau nicht „klein genug" ist), die lokalsymmetrische Räume zur LIE-Gruppe $GL_n(\mathbb{C})^{f_0}$ sind; dieser Raum hat jedenfalls endliches invariantes Volumen. (Die hier ausdividierten arithmetischen Untergruppen gehören zur Kommensurabilitätsklasse von $(P)GL_n(\mathcal{O}_F)$.) –Ebenso wird die Untermannigfaltigkeit $\mathcal{S}^H_{K^H_f}$ gebildet; diese ist nach dem Einheitensatz von DIRICHLET ein *kompakter* „flacher Torus" (im differentialgeometrischen Sinn) von der Dimension $(n-1) \cdot f_0$.

Nach einer wohlbekannten Konstruktion ergibt jede algebraische Darstellung $\mathcal{M}$ $\big($genauer bezeichnet: jeder Homomorphismus $\rho : G \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \to GL_{\mathbb{C}}(\mathcal{M})\big)$ eine Garbe von $\mathbb{C}$-Vektorräumen bzw. ein lokales Koeffizientensystem auf $\mathcal{S}^G_{K^G_f}$, dessen Kohomologie also als „Kohomologie arithmetischer Gruppen" (im Sinne von [Ha88]) studiert werden kann; sie hängt eng mit (kohomologischen) automorphen Formen zu G zusammen. Nach Einschränkung leben diese Garben auch auf der Untermannigfaltigkeit $\mathcal{S}^H_{K^H_f}$; die Kohomologie dieser eingeschränkten Garben ist vollständig verstanden, da ja jede Darstellung von G bei Einschränkung auf den maximalen Torus H in Gewichtsräume zerfällt und die Kohomologie von eindimensionalen Darstellungen/Charakteren auf H explizit (im Wesentlichen als eine äußere Algebra über dem Vektorraum E/F) bekannt ist. Ist die gewählte Darstellung von G eine Darstellung „vom Polynom-Typ" (d.h.: ihre Komponenten an den archimedischen Stellen von F sind symmetrische Potenzen der Standarddarstellung oder ihrer Contragredienten), so sind diese Gewichtsräume sogar sämtlich eindimensional! Für eine geeignete Wahl einer derartigen Darstellung (die weiter hinten immer $\underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}$ heißen wird) und für geeignetes Niveau hat man dann einen *eindimensionalen* Summanden in der Höchstgrad-Kohomologie von $\mathcal{S}^H_{K^H_f}$, der von dem algebraischen HECKE-Charakter η herkommt; dieser ist dann „aus allgemeinen Gründen" rational definiert. Ein gut gewähltes erzeugendes Element dieses eindimensionalen η-Anteils kann dann als eine kompakt getragene Kohomologieklasse $[m^\vee_{\eta^{-1}}]$ im Grade $(n-1) \cdot f_0$ von $\mathcal{S}^G_{K^G_f}$ mit $\underline{\mathcal{M}^\vee_{\underline{d}}}$-Koeffizienten aufgefaßt werden –man kann es als einen mit dem inversen Charakter zu η belegten Fundamentalzykel von $\mathcal{S}^H_{K^H_f}$ interpretieren und nennt es ein (kompaktes) *modulares Symbol*–, es eignet sich also, um mit beliebigen $\underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}$-Kohomologieklassen dieses Grades gepaart zu werden, und falls auch diese Klassen rational definiert sind, wird der Wert der Paarung eine (kontrollierte) algebraische Zahl sein! (Der kundigen Leserperson wird aufgefallen sein, daß diese Beschreibung [nicht nur hier] wesentliche technische Schritte unterschlägt – dies wird im Hauptteil der Arbeit anders sein; der Verfasser hält es in einer Einleitung für vertretbar, da der Lesbarkeit förderlich.)

0.2.2 EISENSTEIN-Kohomologieklassen

Die Konstruktion der Kohomologieklassen, deren Paarung mit den modularen Symbolen zu Quotienten von L-Werten führt, ist nun der Angelpunkt der Beweisstrategie. –Es sei $v \in V \setminus \{0\} = E^*$ ein beliebiger Vektor und $P = P_v \subset G$ der Stabilisator der F-Geraden durch v; dies ist eine maximal-parabolische Untergruppe von G, und der Quotient $P\backslash G$ ist der $(n-1)$-dimensionale projektive Raum über F, insbesondere kann die Menge der

$\mathbb{Q}$-Punkte $P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q}) = \mathbb{P}_F(V)$ dieses Quotienten mit der Gruppe der $\mathbb{Q}$-Punkte des Quotiententorus' $(H/Z_G)(\mathbb{Q}) = E^*/F^* = (V \setminus \{0\})/F^*$ identifiziert werden!

Aus dem algebraischen HECKE-Charakter $\varphi : \mathbb{I}_F\big(= \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{A}_F)\big) \to \mathbb{C}^*$ kann leicht ein Charakter auf der Gruppe der Adele-wertigen Punkte von P gemacht werden: der LEVI-Quotient M_{P_0} von P_0 ist ja das Produkt von $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/F = GL_1/F$ und GL_{n-1}/F; man nehme φ als Charakter auf dem ersten und einen später passend gewählten Charakter auf dem zweiten Faktor des LEVI-Quotienten und mache dies dadurch zu einem Charakter auf P, daß man auch auf dem unipotenten Radikal U_P den trivialen Charakter einsetzt. Dies ergibt schon eine Kohomologieklasse im Grad 0 eines adelisch-lokalsymmetrischen Raumes zu M_P mit Koeffizienten in einer Darstellung, die φ (genauer: seinen ∞-Typ) als M_P-direkten Summanden hat.

Hieraus kann nun eine Kohomologieklasse im Grade $(n-1)\cdot f_0$ für ganz $\mathcal{S}^G_{K^G_f}$ (eine „globale Klasse", oder eine „Klasse für G") hergestellt werden, und zwar nach der von HARDER und SCHWERMER entwickelten Theorie der EISENSTEIN-Kohomologie. Man macht sich zu Nutze, daß die adelischen Doppelquotienten „$\mathcal{S}^R_{K^R_f}$" $:= R(\mathbb{Q})\backslash R(\mathbb{A})/\mathsf{K}^R \cdot K^R_f$ zu parabolischen Untergruppen $R \subset G$ in natürlicher Weise eine Struktur als Faserbündel haben, wobei die *Basis* ein adelisch-lokalsymmetrischer Raum $\mathcal{S}^{M_R}_{K^{M_R}_f}$ zu einer (ggf. Standard-)LEVI-Untergruppe $M_R \subset R$ (zu geeignetem Niveau $K^{M_R}_f$) ist; die *Faser* ist ein Doppelquotient zum unipotenten Radikal U_R von R von der Form $U_R(\mathbb{Q})\backslash U_R(\mathbb{A})/K^{U_R}_f$ (für wiederum geeignetes Niveau): das unipotente Radikal ist ja eine nilpotente algebraische Gruppe mit Vektorraum-Schemata als Filtrierungsquotienten, aber ein $\mathbb{R}$-Vektorraum hat *keine* nichttrivialen kompakten Untergruppen, woraus $U_R(\mathbb{A}) \cap \mathsf{K}^R = \{1\}$ folgt, und ein zugehöriger adelischer Doppelquotient ist damit eine endliche[1] disjunkte Vereinigung von „kompakten Nilmannigfaltigkeiten", d.h. Mannigfaltigkeiten der Form $\Gamma_{U_R,i}\backslash U_R(\mathbb{R})$ für gewisse arithmetische Untergruppen $\Gamma_{U_R,i}$, und diese sind iterierte Bündel von Tori (im topologischen Sinne: Produkte von Kopien von S^1!) über Tori ... über Tori (entsprechend der Normalreihe von U_R). –Im hier betrachteten Falle $R = P \subset G$ ist das unipotente Radikal U_P sogar abelsch, und jede Zusammenhangskomponente der Faser ist zu $\big((F \otimes \mathbb{R})/\mathcal{O}_F\big)^{n-1}$ „kommensurabel", also insbesondere zu $(\mathsf{S}^1)^{(n-1)\cdot[F:\mathbb{Q}]}$ diffeomorph.

Die Kohomologie eines solchen arithmetischen Quotienten einer unipotenten algebraischen Gruppe U kann nun nach einem Satz von VAN EST (vgl. auch [GHM94, §24]) auch als die LIE-Algebra-Kohomologie seiner LIE-Algebra $\mathfrak{u}$ (mit denselben Koeffizienten) erhalten werden; handelt es sich um das unipotente Radikal U_R einer Parabolischen R, so respektiert diese Isomorphie auch die natürlichen Strukturen als Modul unter einer LEVI-Untergruppe M_R. –Ein bekanntes Theorem von KOSTANT klärt die die M_R-Struktur der $\mathfrak{u}_R$-Kohomologie mit Koeffizienten in (der Einschränkung auf M_R) einer Höchstgewichtsdarstellung $\mathcal{M}_G(\lambda)$ von G (wobei also $0 \neq \lambda \in X^*(T)$ ein dominantes ganzes Gewicht von G sein soll): es existert ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem W^R des Quotienten der WEYL-Gruppe $W = W_G$ von G nach der WEYL-Gruppe W_{M_R} der einschlägigen LEVI-Untergruppe, und die Kohomologie in einem Grade q, $H^q\big(\mathfrak{u}_R, \mathcal{M}_G(\lambda)\big)$, ist isomorph zur direkten Summe der Darstellungen $\mathcal{M}_{M_R}(w * \lambda)$ über alle $w \in W^R$ von der Länge q; die hierbei auftretenden Gewichte $(w * \lambda)\big|_{M_R}$ von M_R sind ganz, dominant und paarweise verschieden.

[1]wegen der Endlichkeit der Klassenzahl!

Nach allgemeinen Sätzen ist die Kohomologie des oben als Faserbündel beschriebenen Doppelquotienten $R(\mathbb{Q})\backslash R(\mathbb{A})/\mathsf{K}^R \cdot K_f^R$ dann der Limes einer Spektralsequenz, deren E_2-Terme die Kohomologien der Basis $\mathcal{S}^{M_R}$ mit den Kohomologiegruppen der Faser als Koeffizienten ist; da aber die für die Basis „verantwortliche" Gruppe M_R *reduktiv* und somit die Kategorie ihrer Charakteristik-0-Darstellungen *halbeinfach* ist, degeneriert diese Spektralsequenz hier auf den E_2-Termen, und es gilt somit

$$H^q\big(R(\mathbb{Q})\backslash R(\mathbb{A})/\mathsf{K}^R \cdot K_f^R,\ \widetilde{\mathcal{M}_G(\lambda)}\big) = \bigoplus_{\substack{w\in W^R:\\ \ell(w)\leq q}} H^{q-\ell(w)}\big(\mathcal{S}^{M_R}_{K_f^{M_R}},\ \widetilde{\mathcal{M}_{M_R}(w*\lambda)}\big).$$

Man erhält also zu dem hier betrachteten algebraischen HECKE-Charakter φ einen eindimensionalen (!) φ-Summanden in der Kohomologie von Doppelquotienten zur maximalen Parabolischen $P \subset G$ im gewünschten Grade $(n-1)\cdot f_0$, wenn es gelingt, den ∞-Typ δ von φ (ein ganzes, jedoch im allgemeinen nicht dominantes Gewicht von G) in der Form $\delta = w*\lambda$ mit einem KOSTANT-Vertreter $w \in W^P$ der Länge $(n-1)\cdot f_0$ und einem dominanten Gewicht λ von G zu schreiben. Dies gelingt „leicht": für eine von δ diktierte Wahl eines CM-Typs von F (d.h. eine Auswahl je einer Einbettung $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ in jeder archimedischen Stelle $|\sigma| = \{\sigma, \mathsf{c}\sigma\}$ von F) wählt man „lokal an $|\sigma|$" das Element $\Theta_{|\sigma|} = (s_\sigma^{\{n-1\}}, \mathrm{id}_{\mathsf{c}\sigma})$ der Länge $n-1$ in der zu $S_n \times S_n$ isomorphen „lokalen" WEYL-Gruppe (es ist ein KOSTANT-Vertreter bzgl. P!) und das Gewicht $\lambda_{|\sigma|}$ so, daß $\mathcal{M}_{G_{|\sigma|}}(\lambda_{|\sigma|}) = \mathrm{Sym}^{d'}(V_\sigma^\vee) \otimes \mathrm{Sym}^{d''}(\overline{V_\sigma})$ für geeignete $d', d'' \in \mathbb{N}_0$ gilt. –Man prüft noch, daß dann tatsächlich der ∞-Typ des ursprünglich gewählten Charakters η in der Einschränkung auf H der Darstellung $\mathcal{M}_G(\lambda) =: \underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}$ vorkommt.

Da $G(\mathbb{A})$ eine IWASAWA-Zerlegung als Produkt der Untergruppen $R(\mathbb{A})$ und $\mathsf{K}^G \cdot K_f^G$ hat, ist der adelische Doppelquotient $R(\mathbb{Q})\backslash R(\mathbb{A})/\mathsf{K}^R \cdot K_f^R$ von $R(\mathbb{A})$ [nach der diskreten Untergruppe $R(\mathbb{Q})$ und den „kompakten" Untergruppen $\mathsf{K}^R := \mathsf{K}^G \cap R(\mathbb{R})$ und $K_f^R := K_f^G \cap P(\mathbb{A}_f)$] dasselbe wie der Quotient ${}_R\mathcal{S}^G_{K_f^G}$ von $G(\mathbb{A})/\mathsf{K}^G \cdot K_f^G$ nach der Links-Operation von $R(\mathbb{Q})$; aus der R-Beschreibung dieses Raumes kann man nun leicht einsehen, daß er die Struktur eines Hauptfaserbündels über der Zusammenhangskomponente der $\mathbb{R}$-Punktegruppe eines gewissen $\mathbb{Q}$-spaltenden, in M_R zentralen Torus' hat –hierbei ist die Faser selbst wiederum ein Faserbündel, nämlich mit (i.w.) einem adelischen Doppelquotienten zum halbeinfachen Anteil der LEVI-Untergruppe als Basis und mit dem vorn besprochenen Doppelquotienten zum unipotenten Radikal U_R als Faser. Die Basis des „großen" Hauptfaserbündels ist nun aber topologisch ein euklidischer Raum, also zusammenziehbar, und somit hat ihr (Nicht-)Vorhandensein „keinen" Einfluß auf die Kohomologie. Die Faser hierüber kann zum einen als der Quotient des R-Doppelquotienten nach der sog. *geodätischen Operation* des Basis-Torus, aber zum anderen auch als eine (genügend reguläre) Niveaumenge einer gewissen R-Randdistanz-Abbildung auf ${}_R\mathcal{S}^G_{K_f^G}$ angesehen werden; als solche ist sie isomorph zu der Randkomponente $\partial_R\mathcal{S}^G_{K_f^G}$ der BOREL-SERRE-Kompaktifizierung von $\mathcal{S}^G_{K_f^G}$, die zur Konjugationsklasse der Parabolischen R gehört.

Aus dieser „Inklusion bis auf Homotopie" des R-Doppelquotienten in den G-Doppelquotienten $\mathcal{S}^G_{K_f^G}$ folgt nun die Existenz von Einschränkungsabbildungen auf der Kohomologie,

$$r_{\partial_R} : H^*(\mathcal{S}^G_{K_f^G}, \widetilde{\mathcal{M}}) \to H^*({}_R\mathcal{S}^G_{K_f^G}, \widetilde{\mathcal{M}})!$$

Unter der DE RHAM-Interpretation der Kohomologien sind nun Elemente des Urbildraumes dieser Abbildung (der globalen Kohomologie) gewisse $\mathcal{M}$-wertige Differentialformen auf dem „symmetrischen Raum" $G(\mathbb{A})\big/\mathsf{K}^G\cdot K_f^G$, die bei Argument-Verschiebung von links unter ganz $G(\mathbb{Q})$ invariant sind; Elemente des Bildraumes sind ebensolche Formen, bei denen aber Invarianz „nur" unter der Gruppe $R(\mathbb{Q})$ vorliegt. Der Versuch liegt nahe, durch Summation über die Nebenklassen-Menge $R(\mathbb{Q})\big\backslash G(\mathbb{Q})$ aus den Formen der letztgenannten Art tatsächlich $G(\mathbb{Q})$-invariante Formen herzustellen, also einen (sog. EISENSTEIN-) Schnitt zur Restriktionsabbildung r_{∂_R} zu konstruieren. Solche EISENSTEIN-Reihen für die hier interessierenden P-Kohomologieklassen zum algebraischen HECKE-Charakter φ sind (wie üblich) absolut konvergent, sobald ein gewisser ganzzahliger Parameter d von φ „groß genug" ist! Man hat in diesen Fällen also EISENSTEIN-Kohomologieklassen zu φ in $H^{(n-1)\cdot f_0}(\mathcal{S}^G_{K_f^G},\widetilde{\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}})$ konstruiert; für allgemeines positives d erhält man dann durch meromorphe Fortsetzung ebenfalls EISENSTEIN-Kohomologieklassen. (In der hier interessierenden Situation ist der ∞-Typ von φ niemals eine Potenz der Norm, so daß in Wirklichkeit keine Pole auftreten!) Es gelang HARDER nun zu zeigen, daß der EISENSTEIN-Schnitt in dieser Situation (existiert, s.o., und) *rational definiert* ist und daß somit zu gegebenem φ diese EISENSTEIN-Klassen einen eindimensionalen, rational definierten Raum von globalen Kohomologieklassen bilden.

[Für $n = 2$ wurde dies in [Ha87] geleistet; für beliebiges n „bis auf eine Kleinigkeit" (die allerdings formal noch ungeklärt ist) in [Ha92]: die Rationalität des φ-EISENSTEIN-Schnitts wird für von der BOREL-Untergruppe B kommende EISENSTEIN-Klassen gezeigt, die nach menschlichem Ermessen mit den o.g. P-EISENSTEIN-Klassen übereinstimmen sollten: die eindimensionale automorphe Darstellung φ von P ist ein $(n-2)\cdot f_0$-faches Residuum der EISENSTEIN-Reihe von B nach P zu demselben Charakter; das Bilden des Residuums sollte höchstens arithmetisch harmlose Faktoren einführen, was allerdings bisher nicht in gedruckter Form verifiziert wurde, auch in dieser Arbeit leider nicht.]

0.2.3 Die Paarung als adelisches Torus-Integral: der RANKIN-Trick

Es bezeichne $\underline{\omega_{\underline{d}}}$ eine $\underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}$-wertige Differentialform, die einen „rationalen" Erzeuger des φ-Anteils von $H^{(n-1)\cdot f_0}({}_P\mathcal{S}^G_{K_f^G},\widetilde{\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}})$ darstellt, so daß nach dem Vorgenannten also ihre EISENSTEIN-Reihe (evtl. meromorph fortgesetzt)

$$\mathrm{Eis}^G_{P,\varphi}\left(\underline{\omega_{\underline{d}}}(\bullet)\right) = \sum_{[\gamma]\in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} \underline{\omega_{\underline{d}}}(\gamma\cdot\bullet)$$

eine ebenfalls rationale Klasse in $H^{(n-1)\cdot f_0}(\mathcal{S}^G_{K_f^G},\widetilde{\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}})$ repräsentiert. Nun soll die POINCARÉ-Paarung dieser EISENSTEIN-Klasse mit dem Bild in der Kohomologie von $\mathcal{S}^G_{K_f^G}$ eines η-Projektors $m^\vee_{\eta^{-1}} \in H^{(n-1)\cdot f_0}_{(c)}(\mathcal{S}^H_{K_f^H},\widetilde{\underline{\mathcal{M}}^\vee_{\underline{d}}})$ bestimmt werden; die letztgenannte Klasse war ja schon als ein Charakter-belegter Fundamentalzykel bzw. als ein Tensorprodukt eines Modul-Elements mit einer Volumenform auf der kompakten Mannigfaltigkeit $\mathcal{S}^H_{K_f^H}$ gedeutet worden. Diese Mannigfaltigkeit ist ja i.w. der Quotient der Idele-Klassengruppe $\overline{H}(\mathbb{Q})\big\backslash\overline{H}(\mathbb{A})$ des Torus' $\overline{H} := H/Z_G$ nach einer kompakten Untergruppe, so daß der Wert der Paarung letztendlich (nachdem man Konstanzbereiche von Funktionen gegen Volumina-Faktoren verrechnet hat) das Integral der EISENSTEIN-Differentialform (mit η-Gewichtung) über $\overline{H}(\mathbb{Q})\big\backslash\overline{H}(\mathbb{A})$ ist.

Die Summationsmenge $P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})$ der Eisenstein-Reihe ist der $(n-1)$-dimensionale projektive Raum über F, nämlich der Quotient von $F^n \setminus \{0\} = E \setminus \{0\} = E^*$ (!) nach der Homothetie-Operation von F^*, also gerade die Gruppe $H(\mathbb{Q}) = E^*/F^*$ (eigentlich ein Torseur unter ihr). Bei absoluter Konvergenz der Eisenstein-Reihe darf zunächst die Reihenfolge von Integration und Summation vertauscht werden, und dann lassen sich (nach Fubini-Argumenten) die Integration über den Quotienten von $\overline{H}(\mathbb{A})$ nach $\overline{H}(\mathbb{Q})$ und die anschließende Summation über alle $\overline{H}(\mathbb{Q})$-Linkstranslatierten zu einer Integration über $\overline{H}(\mathbb{A})$ zusammenbringen; dies kann mit bekannten Methoden auch in den „meromorph fortgesetzten“ Fällen erreicht werden. Dies heißt also: der Wert der Paarung ist das Integral der Form $\underline{\omega_{\underline{d}}}$ über die gesamte Gruppe der adelischen Punkte $\overline{H}(\mathbb{A})$! Ist nun diese Form auch als ein „reiner Tensor“ $\underline{\omega_{\underline{d}}} = \hat{\otimes}_{\mathfrak{v}\in\mathbb{V}_F}\omega_{\underline{d},\mathfrak{v}}$ mit einer Differentialform $\omega_{\underline{d},\infty}$ auf $G(\mathbb{R})$ und Funktionen $\omega_{\underline{d},\mathfrak{p}}$ auf $G_0(F_\mathfrak{p})$ für alle endlichen Stellen $\mathfrak{p}$ von F, so ist dies Integral also ein „adelisches Integral“, d.h. es kann als das Produkt „lokaler“ Integrale $\prod_\mathfrak{v}\int_{G_0(F_\mathfrak{v})}\eta_\mathfrak{v}^{-1}(h_\mathfrak{v})\omega_{\underline{d},\mathfrak{v}}(h_\mathfrak{v})\mathrm{d}\overline{h}_\mathfrak{v}$ ausgedrückt werden! (Diese Beobachtung ist eine Inkarnation des Rankin-Tricks.)

0.2.4 Räume von Verkettungsoperatoren

Wie soll nun nach dieser Strategie von Harder ein Beweis der Rationalität des Quotienten $L^*(\eta)$ von kritischen Hecke-L-Werten erfolgen? Man betrachte die aus den Charakteren η auf $P(\mathbb{A})$ und φ auf $H(\mathbb{A})$ induzierten Darstellungen von $G(\mathbb{A})$,

$$\mathcal{J}_\varphi := \mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\varphi) \text{ und } \mathcal{K}_\eta := \mathrm{Ind}_{H(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\eta),$$

die beide natürlich wieder eingeschränkte Tensorprodukte sind: $\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}_{\varphi_\infty}\otimes\mathcal{J}_{\varphi_f} = \mathcal{J}_{\varphi_\infty}\otimes\widehat{\bigotimes}_{\mathfrak{p}\in\mathbb{V}_{F,f}}\mathcal{J}_{\varphi_\mathfrak{p}}$ mit den zulässigen $GL_n(F_\mathfrak{p})$-Darstellungen $\mathcal{J}_{\varphi_\mathfrak{p}} = \mathrm{Ind}_{P_0(F_\mathfrak{p})}^{G_0(F_\mathfrak{p})}(\varphi_\mathfrak{p})$ an den endlichen Stellen und dem $(\mathfrak{g},\mathsf{K}^G)$-Modul $\mathcal{J}_{\varphi_\infty}$ an der archimedischen Stelle; desgleichen für $\mathcal{K}_\eta$. Der Raum von $G(\mathbb{A}_f)$-Verkettungsoperatoren $\mathrm{Hom}_{G(\mathbb{A}_f)}(\mathcal{J}_{\varphi_f},\mathcal{K}_{\eta_f}) = \hat{\bigotimes}_\mathfrak{p}\mathrm{Hom}_{G_0(F_\mathfrak{p})}(\mathcal{J}_{\varphi_\mathfrak{p}},\mathcal{K}_{\eta_\mathfrak{p}})$ ist dann das eingeschränkte Tensorprodukt der Räume der „lokalen“ Verkettungsoperatoren; man zeigt, daß er die Dimension 1 hat, indem man nachweist, daß jeder einzelne dieser „lokalen“ Räume eindimensional ist. Hierzu ist es nützlich, daß in jedem Falle $\mathcal{J}_{\varphi_\mathfrak{p}}$ als ein Raum von Funktionen auf $(E_\mathfrak{p}\setminus\{0\})/F_\mathfrak{p}^* \cong \mathbb{P}^{n-1}(F_\mathfrak{p}) \cong P_0(F_\mathfrak{p})\backslash G_0(F_\mathfrak{p})$ aufgefaßt werden kann!

Die Eindimensionalitätsaussage ist ziemlich klar an den Stellen $\mathfrak{p}$ von F, die in E träge sind, d.h. für die die n-dimensionale étale Algebra $E_\mathfrak{p} := E\otimes_F F_\mathfrak{p}$ über dem nichtarchimedischen lokalen Körper $F_\mathfrak{p}$ sogar ein Körper ist: hier hat dann $E_\mathfrak{p}^* = H_0(F_\mathfrak{p})$ *genau einen* Orbit auf $E_\mathfrak{p}\setminus\{0\} \overset{(!)}{=} E_\mathfrak{p}^*$ und auf dessen Quotienten $(E_\mathfrak{p}\setminus\{0\})/F_\mathfrak{p}^*$; die Vielfachheit-1-Aussage ist i.w. äquivalent zur wohlbekannten „Existenz und Eindeutigkeit des Haar-Maßes“ auf der lokalkompakten abelschen Gruppe $E_\mathfrak{p}^*$, und ein erzeugender Verkettungsoperator ist durch $\eta_\mathfrak{p}$-gewichtete Integration der Elemente von $\mathcal{J}_{\varphi_\mathfrak{p}}$ über $(E_\mathfrak{p}\setminus\{0\})/F_\mathfrak{p}^*$ gegeben.

An *jeder* endlichen Stelle hat man eine übersichtliche Stratifizierung von $E_\mathfrak{p}\setminus\{0\}$ mittels Orbiten der Einheitengruppe $E_\mathfrak{p}^*$ der étalen Algebra [entsprechend der Struktur von $\mathbb{P}^{n-1}(F_\mathfrak{p})$ als „torische Varietät“ unter dem Torus $H_0(F_\mathfrak{p})$], und wie eben gilt Existenz und Eindeutigkeit eines durch Integrale gegebenen Verkettungs-Funktionals auf den Funktionen, die auf dem offenen (dichten!) Orbit $E_\mathfrak{p}^*/F_\mathfrak{p}^*$ „leben“. Dieses Funktional kann nun (bei Vorliegen einer Nichttrivialitätsbedingung an die Charaktere) in jeweils eindeutiger Weise sukzessive auf die gesamte lokale parabolisch-induzierte Darstellung $\mathcal{J}_{\varphi_\mathfrak{p}}$ fortgesetzt werden; Auswertungen von verketteten Funktionen im Einselement sind dann durch Tate-Zeta-Integrale gegeben, wobei dieser Begriff noch von lokalen Körpern auf étale Algebren über diesen ausgedehnt werden muß (was harmlos ist). –Es bezeichne $\mathsf{T}_\mathfrak{p}^{\mathrm{int}}$ einen (durch Normierung der o.g. Auswertungen fixierten) Erzeuger dieses eindimensionalen Raums von Verkettungsoperatoren.

Ist an einer Stelle $\mathfrak{p}$ von F die gesamte Situation *unverzweigt*, so gibt es einen weiteren ausgezeichneten Verkettungsoperator $\mathsf{T}_\mathfrak{p}^{\mathrm{sph}}$ in diesem Raum; er ist dadurch beschrieben, daß er die (eindeutige!) Standard-sphärische Funktion in $\mathcal{J}_{\varphi_\mathfrak{p}}$ auf eine sphärische Funktion von $\mathcal{K}_{\eta_\mathfrak{p}}$ mit Wert 1 im Einselement abbildet; eine einfache Weiterführung der oben begonnenen Rechnungen mit Zeta-Integralen zeigt dann die Proportionalität

$$\mathsf{T}_\mathfrak{p}^{\mathrm{int}} = \frac{L_{E_\mathfrak{p}}(\eta_\mathfrak{p}, 0)}{L_{F_\mathfrak{p}}(\varphi_\mathfrak{p}, 0)} \cdot \mathsf{T}_\mathfrak{p}^{\mathrm{sph}}.$$

Es folgt dann insgesamt (wie oben angedeutet), daß der Raum endlich-adelischer Verkettungsoperatoren $\mathrm{Hom}_{G(\mathbb{A}_f)}(\mathcal{J}_{\varphi_f}, \mathcal{K}_{\eta_f})$ eindimensional ist und daß eine Proportionalität

$$\mathsf{T}_f^{\mathrm{int}} = \frac{L_E(\eta, 0)}{L_F(\varphi, 0)} \cdot \mathsf{T}_f^{\mathrm{loc}}$$

besteht, wenn der „lokale“ Operator $\mathsf{T}_f^{\mathrm{loc}}$ an den an den unverzweigten Stellen durch den „sphärischen“ Operator $\mathsf{T}_\mathfrak{p}^{\mathrm{sph}}$ und an den verzweigten Stellen geeignet festgelegt wird; der Operator $\mathsf{T}_f^{\mathrm{int}}$ ist durch das Integral der Funktionen in $\mathcal{J}_{\varphi_f}$ gegen den Charakter η_f^{-1} über $\overline{H}(\mathbb{A}_f)$ gegeben. (Derartige Ideen zur Realisierung von Quotienten von L-Funktionen durch Torusintegrale von Eisenstein-Reihen finden sich auch in der Arbeit [Wi85] von Franck Wielonsky.)

0.2.5 Rationalität

Die von allen Werten eines endlich-adelischen Charakters wie η_f und φ_f über $\mathbb{Q}$ erzeugten Körper sind *Zahlkörper*, desgleichen also das Kompositum $K := \mathbb{Q}(\eta_f, \varphi_f)$. Die induzierten Darstellungen $\mathcal{J}_{\varphi_f}$ und $\mathcal{K}_{\eta_f}$ sind natürlich schon über diesem Charakter-Wertekörper definierbar, und somit ist der eindimensionale $\mathbb{C}$- (oder $\overline{\mathbb{Q}}$-)Vektorraum $\mathrm{Hom}_{G(\mathbb{A}_f)}(\mathcal{J}_{\varphi_f}, \mathcal{K}_{\eta_f})$ durch Skalarerweiterung aus einem zugrundeliegenden K-Vektorraum entstanden. Aufgrund seiner „algebraischen“ Konstruktion gehört der sphärische Operator $\mathsf{T}_f^{\mathrm{sph}}$ bereits zu dieser K-Struktur, und er ist selbstverständlich nichttrivial; ein weiterer dieser K-Struktur angehörender Verkettungsoperator ist also zu $\mathsf{T}_f^{\mathrm{sph}}$ proportional, wobei der Proportionalitätsfaktor dann eine algebraische Zahl in K ist! Die weiter oben diskutierte Paarung zwischen der φ-Eisenstein-Kohomologieklasse und dem η-modularen Symbol, die ja beide als „rational definiert“ nachgewiesen wurden[2], kann nun als ein solcher K-definierter Verkettungsoperator gedeutet werden, und die Proportionalitätskonstante wird sich hierbei[3] gerade als die letztendlich zu untersuchende Zahl $L^*(\eta)$ herausstellen.

[2]bis auf die nicht vollständig geklärte Beziehung zwischen P- und B-Eisenstein-Klasse!

[3]hoffentlich ...

Zur Bequemlichkeit wird nun nur noch der Fall $f_0 = 1$, d.h. F imaginär-quadratisch, betrachtet; dies vereinfacht außer der Notation nichts! Es ist also $G(\mathbb{R}) = GL_n(\mathbb{C})$ (als reelle LIE-Gruppe) und $\mathsf{K}^G \cong (\mathbb{C}^* \cdot \mathbb{1}_n) \cdot U(n) = GU(n)$. –Der φ-isotypische Anteil in $H^{(n-1)}({}_P\mathcal{S}^G_{K^G_f}, \widetilde{\mathcal{M}_{\underline{d}}})$ ist –genauer gesagt– das Tensorprodukt aus den K^G_f-Fixvektoren der endlich-adelisch parabolisch-induzierten Darstellung $\mathcal{J}_{\varphi_f}$ und aus dem $(\mathfrak{g}, \mathsf{K}^G)$-Kohomologieraum $H^{(n-1)}\big((\mathfrak{g}, \mathsf{K}^G), \mathcal{J}_{\varphi_\infty} \otimes \mathcal{M}_{\underline{d}}\big)$, „also" dem Raum der K^G-Fixvektoren in dem vielfaktorigen Tensorprodukt $\big(\bigwedge^{n-1}(\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}/\mathfrak{k}^G\otimes\mathbb{C})\big)^\vee \otimes \mathcal{J}_{\varphi_\infty} \otimes \mathcal{M}_{\underline{d}}$. Den letztgenannten Raum kann man mit klassischer (endlichdimensionaler) Darstellungstheorie für $\mathfrak{gl}_n$ bestimmen: es ist ja die maximalkompakte Untergruppe $K^{G,\circ}_\infty \cong U(n)$ eine reelle Form von GL_n, und hier stehen u.a. die LITTLEWOOD–RICHARDSON-Regeln für die Ausreduktion von Tensorprodukten zur Verfügung. Der genannte Raum erweist sich als eindimensional; der „kohomologietragende" $U(n)$-Typ in $\mathcal{J}_{\varphi_\infty}\big|_{U(n)}$ ist der dortige *minimale* $U(n)$-Typ, die Darstellung $\mathrm{Sym}^{n+d'+d''}(\mathbb{C}^n)$. Man hat dann sorgfältig eine Differentialform $\omega_{\underline{d}}$ auszuwählen, die nach Tensorieren mit einem geeigneten Modulelement einen *rationalen* Erzeuger dieses eindimensionalen Kohomologieraums (in seiner DE RHAM-Interpretation) ergibt.

Um nun auf Verkettungsoperatoren in eine H-induzierte Darstellung zu kommen, benutzt man „alle" Einbettungen der lokalsymmetrischen Räume zu H in diejenigen zu G: für jedes $g_f \in G(\mathbb{A}_f)$ gibt es bei zueinander passenden Niveaus K^G_f, K^H_f eine Abbildung $j_{g_f} : \mathcal{S}^H_{K^H_f} \to \mathcal{S}^G_{K^G_f}$. Nun sind sowohl das η-modulare Symbol $m^\vee_{\eta^{-1}}$ wie auch die φ-EISENSTEIN-Kohomologieklasse *unabhängig* von den konkreten Niveaus konstruiert worden (technisch gesprochen: sie „leben" in den respektiven Kohomologien der projektiven Limites $\mathcal{S}^G := \varprojlim_{K^G_f} \mathcal{S}^G_{K^G_f}$ bzw. $\mathcal{S}^H$ der lokalsymmetrischen Räume über alle Niveaus $K^\bullet_f$ der gegebenen Kommensurabilitätsklassen), so daß man für ein gegebenes $\phi \in \mathcal{J}_{\varphi_f}$ die Paarung der EISENSTEIN-Klasse $\mathrm{Eis}(\omega_{\underline{d}} \times \phi)$ mit dem j_{g_f}-Bild des modularen Symbols als Funktion der $G(\mathbb{A}_f)$-Variablen g_f betrachten kann (bzw. äquivalent die Paarung „auf H" des η-belegten Fundamentalzykels mit der j_{g_f}-Zurückziehung der EISENSTEIN-Klasse). Diese Funktion hat nun nach Konstruktion das Verhalten eines Elements von $\mathcal{K}_{\eta_f} = \mathrm{Ind}^{G(\mathbb{A}_f}_{H(\mathbb{A}_f)}(\eta_f)$, man hat also einen „geometrischen", rational definierten Verkettungsoperator $\mathsf{T}^{\mathrm{geom}}_f \in \mathrm{Hom}_{G(\mathbb{A}_f)}(\mathcal{J}_{\varphi_f}, \mathcal{K}_{\eta_f})$ konstruiert, der auf dem endlich-adelischen Anteil durch eine η-gewichtete Integration über $\overline{H}(\mathbb{A}_f)$ gegeben, also von vornherein ein Vielfaches von $\mathsf{T}^{\mathrm{int}}_f(= \frac{L_E(\eta,0)}{L_F(\varphi,0)} \cdot \mathsf{T}^{\mathrm{sph}}_f)$ ist. Es muß nun noch das Integral an der unendlichen Stelle ausgewertet und sein Wert als ein geeignetes Vielfaches des Diskriminanten-Faktors $\Delta(E/F, \gamma)$ identifiziert werden; dann hat man insgesamt etabliert, daß der Proportionalitätsfaktor $\Delta(E/F, \gamma) \cdot \frac{L_E(\eta,0)}{L_F(\varphi,0)} = L^*(\eta)$ zwischen den Operatoren $\mathsf{T}^{\mathrm{geom}}$ und $\mathsf{T}^{\mathrm{sph}}$ algebraisch ist und sogar im richtigen Zahlkörper liegt, was hier die Richtigkeit der DELIGNE-Vermutung etabliert! –Für den Fall $n = 2$ findet sich all dies in der Arbeit [Ha87] ausgeführt; hier konnte zur Auswertung der Integrale „rechnerischer" vorgegangen werden, als dies für beliebiges n möglich ist, da man quadratische Körpererweiterungen sehr explizit beschreiben kann; außerdem erweist sich hier das Übereinfallen der maximalen Parabolischen P mit der BOREL-Untergruppe B als erleichternd. –In den Quellen [HaSc], [Ha92], [Ha99], [Ha03] und vor allem [Ha05] hat HARDER weitgehende Hinweise zum Angehen des allgemeinen Falles gegeben; die ausführliche Darlegung einiger Punkte dieses Beweisganges ist das Ziel dieser Dissertation.

0.3 Inhalt der Kapitel und Status der Arbeit

Es folgt eine detailliertere Beschreibung dessen, was in den einzelnen Kapiteln getan wird:

Im Kapitel 1: **Algebraische HECKE-Charaktere** werden zunächst Begriffe, Notationen und grundlegende Ergebnisse der algebraischen Zahlentheorie bereitgestellt. Es folgt eine Beschreibung der rationalen Charaktermoduln von SERRE-Tori, d.h. von Quotienten algebraischer Tori über Zahlkörpern nach den ZARISKI-Abschlüssen arithmetischer Untergruppen; zu den genannten Charakteren werden gewisse Produkte von translatierten Γ-Funktionen als „archimedische EULER-Faktoren" und deren „kritische Stellen" eingeführt. Dann werden algebraische HECKE-Charaktere auf $\mathbb{Q}$-Tori besprochen, d.h. stetige $\mathbb{C}^*$-wertige Charaktere auf den Ideleklassengruppen solcher Tori, deren Einschränkung auf die archimedische Komponente mit einem Charakter des zugehörigen SERRE-Torus (dem „∞-Typ") übereinstimmen. Diesen Charakteren ordnet man dann L-Funktionen (in EULER-Produkt-Darstellung) zu, die durch die obigen archimedischen EULER-Faktoren ergänzt werden; kritische Stellen dieser Funktionen (bzw. Charaktere) werden besprochen. Es kann dann die Vermutung von DELIGNE über die Natur der Werte der HECKE-L-Funktionen in ihren kritischen Stellen formuliert werden; im Anschluß wird erläutert, wie nach BLASIUS und HARDER–SCHAPPACHER der Beweis dieser Vermutung auf das am Kapitelende formulierte Theorem von HARDER über gewisse „dekorierte" Quotienten solcher L-Werte zurückgeführt werden kann.

Das Kapitel 2: **Präliminarien zur Gruppe GL_n über Körpern** stellt Aussagen zur „geometrischen Algebra" und Darstellungstheorie der algebraischen Gruppe GL_n über Körpern der Charakteristik 0 bereit. Nach Diskussion der grundlegenden Begriffe wie maximale Tori, Charaktergitter, parabolische Untergruppen, WEYL-Gruppen wird der SCHUR–WEYL-Formalismus der algebraischen Darstellungstheorie besprochen; die Anwendung der LITTLEWOOD–RICHARDSON-Regeln erlaubt dann Aussagen über (Nicht-)Existenz gewisser Unterdarstellungen in einigen komplexeren Tensorprodukten. Danach werden die maximalen Tori der GL_n in Termen étaler Algebren klassifiziert und eine Torus-invariante Stratifizierung der Fahnenmannigfaltigkeit $\mathbb{P}^{n-1}$ für GL_n in Termen der rationalen Charaktere eines beliebigen maximalen Torus' eingeführt. Zum Schluß dieses Kapitels erfolgt eine Erweiterung auf Gruppen vom Typ $\mathrm{Res}_F^E(GL_n/_E)$, d.h. WEIL-Skalarrestriktion einer GL_n entlang einer separablen Körpererweiterung.

Das Kapitel 3: **Lokale Verkettungsoperatoren: nichtarchimedische Stellen** befaßt sich zunächst mit folgender Situation: sei F ein nichtarchimedischer lokaler Körper, P eine Geraden-Stabilisator-Parabolische in $G = GL_n/_F$ und $H \subset G$ die Einheitengruppe einer étalen Algebra der Dimension n über F; es seien $\varphi : P \to \mathbb{C}^*$ und $\eta : H \to \mathbb{C}^*$ zwei hinreichend nichttriviale Charaktere dieser Untergruppen, deren Einschränkungen aus die gemeinsame Untergruppe $Z_G \cong F^*$ übereinstimmen. Dann wird durch Induktion über die Strata einer H-invarianten Stratifizierung von $\mathbb{P}^{n-1}(F)$ gezeigt, daß der Raum der G-Homomorphismen von der parabolisch-induzierten (zulässigen) Darstellung $\mathcal{J}_\varphi := \mathrm{Ind}_P^G(\varphi)$ in die torisch-induzierte Darstellung $\mathcal{K}_\eta := \mathrm{Ind}_H^G(\eta)$ genau eindimensional ist; der Proportionalitätsfaktor zwischen zwei sich im unverzweigten Falle aufdrängenden Operatoren $\mathsf{T}^{\mathrm{int}}$ und $\mathsf{T}^{\mathrm{sph}}$ in diesem Raum ist gerade der Quotient $\frac{L_E(\eta,0)}{L_F(\varphi,0)}$ der zu den Charakteren gehörigen TATE-Zeta-Integrale. –Dies „lokale" Resultat wird dann zu dem in der Erläuterung des Beweisganges angesprochenen Resultat über Homomorphismen von analog gebildeten induzierten Darstellungen der Gruppe $GL_n(\mathbb{A}_f)$ ausgebaut.

Das Thema von Kapitel 4: **Archimedisch-Lokales: $(\mathfrak{g}, K)$–Kohomologie** ist die relative LIE-Algebren-Kohomologie von $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ bezüglich der maximalkompakten Untergruppe $K = U(n) \subset G = GL_n(\mathbb{C})$. Nach Präliminarien über die Darstellungstheorie von G und K als $\mathbb{R}$-algebraische Gruppen wird der HARISH-CHANDRA-Modul $\mathcal{J}_\varphi$ zu einer aus einem Charakter $\varphi : P \to \mathbb{C}^*$ parabolisch induzierten Darstellung in K-Typen zerlegt, wobei „wieder" $P \subset G$ eine maximalparabolische Untergruppe ist, die als Stabilisator einer komplexen Geraden in $\mathbb{C}^n$ entsteht; sei U_P ihr unipotentes Radikal. Es wird dann mit Hilfe der KOSTANT-Zerlegung gezeigt, daß für eine Darstellung der Form $\underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}} := \mathrm{Sym}^{d'}\left((\mathbb{C}^n)^\vee\right) \otimes \mathrm{Sym}^{d''}(\overline{\mathbb{C}^n})$ von G ihre LIE-Algebren-Kohomologie bzgl. des genannten unipotenten Radikals gerade im „mittleren" Grad $n-1$ konzentriert und eindimensional ist; hieraus läßt sich mittels der DELORME-Formel folgern, daß die Kohomologiegruppe $H^{n-1}(\mathfrak{g}, K; \mathcal{J}_\varphi \otimes \underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}})$ nicht verschwindet. Eine in Kapitel 2 gezeigte Aussage über Tensorprodukt-Zerlegung kann mit der eben erarbeiteten K-Typen-Bestimmung kombiniert werden, um zu zeigen, daß diese Kohomologie eindimensional ist; der „kohomologietragende" K-Typ wird bestimmt. Eine analoge Eindimensionalitäts-Aussage gilt dann für die relative LIE-Algebren-Kohomologie zur Gruppe der $\mathbb{R}$-wertigen Punkte einer algebraischen Gruppe, die als Skalarrestriktion nach $\mathbb{Q}$ der GL_n über einem totalimaginären Körper definiert ist, und das Tensorprodukt einer P-parabolisch aus einem HECKE-Charakter φ induzierten Darstellung $\mathcal{J}_\varphi$ mit einer algebraischen Darstellung auf einem „Polynomraum" $\underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}$ ähnlich wie oben.

Gegenstand des Kapitels 5: **Einige IWASAWA-Zerlegungen** ist die möglichst explizite Bestimmung einiger Matrizen-Einträge der Faktoren einer IWASAWA-Zerlegung $g = p \cdot k$, $p \in P,\ k \in K$, für spezielle $g \in GL_n(F)$, wobei hier immer F ein lokaler Körper und P eine Geraden-stabilisierende Parabolische in $GL_n(F)$ ist; sowohl der Fall F archimedisch (mit $K = U(n)$ bzw. $K = O(n)$) wie auch F nichtarchimedisch (mit $K = GL_n(\mathcal{O}_F)$) werden behandelt. Dann wird noch hergeleitet, wie die archimedischen IWASAWA-Faktoren sich ändern, wenn g von rechts mit mit einer Diagonalmatrix multipliziert wird; für einige Einträge gibt es hierbei einigermaßen beherrschbare Formeln. –Die Ergebnisse bezüglich „unterer Streifenmatrizen" an *allen* Stellen eines Zahlkörpers können dann eingesetzt werden, um Aussagen über den Konvergenzbereich von adelischen P-EISENSTEIN-Reihen zu Funktionen aus $\mathcal{J}_\varphi$ (wie im vorigen Kapitel) zu erzielen.

Nachdem nun schon aus den verschiedenen lokalen Situationen in einen globalen Kontext übergegangen wurde, werden im Kapitel 6: **Adelisch-lokalsymmetrische Räume zu reduktiven Gruppen und ihre Kohomologie** die geometrischen Objekte globaler Natur eingeführt, die schließlich die Ausführung des Beweisprogramms von HARDER ermöglichen. Für eine –zunächst beliebige– reduktive lineare Gruppe $L/_{\mathbb{Q}}$ wird die Struktur der Gruppe $L(\mathbb{A})$ ihrer adelewertigen Punkte betrachtet: es wird eine Kommensurabilitätsklasse von offen-kompakten Untergruppen $K_f^L \subset L(\mathbb{A}_f)$ eingeführt und als deren archimedischer Konterpart eine Gruppe K^L, die durch Hinzufügen gewisser Anteile des Zentrums an eine maximale zusammenhängend-kompakte Untergruppe $K_\infty^{L,\circ}$ von $L(\mathbb{R})$ entsteht. Die *adelischen Doppelquotienten* oder *adelisch-lokalsymmetrischen Räume*

$$\mathcal{S}^L_{K_f^L} := L(\mathbb{Q})\Big\backslash L(\mathbb{A})\Big/\mathsf{K}^L \cdot K_f^L$$

sind dann endliche disjunkte Vereinigungen von lokalsymmetrischen Mannigfaltigkeiten (oder orbifolds) von endlichem Volumen. Zu „rationalen" Darstellungen $\rho : L \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}} \to GL_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{M})$ gehören Garben $\widetilde{\mathcal{M}}$ auf diesen Räumen, deren Kohomologie zu studieren ist. Aus den endlichen Überlagerungen $\mathcal{S}^L_{K^L_f} \to \mathcal{S}^L_{K^{L,\prime}_f}$ zu Untergruppen $K^{L,\prime}_f \subset K^L_f$ von endlichem Index und gewissen kanonischen Homomorphismen zwischen Garben von der obigen Bauart leitet sich die Operation der HECKE-Algebra $\mathcal{H}_{K^L_f}$ mittels HECKE-Korrespondenzen auf den Kohomologieräumen $H^*(\mathcal{S}^L_{K^L_f}, \widetilde{\mathcal{M}})$ ab. –Neben dieser Kohomologie hat man auch *Homologie*räume $H_*(\mathcal{S}^L_{K^L_f}, \underset{\sim}{\mathcal{M}})$, die mit der Kohomologie-mit-kompakten-Trägern H^*_c eng verbunden sind; sie lassen sich natürlich mit der gewöhnlichen Kohomologie paaren, und dies ergibt Manifestationen der POINCARÉ-Dualität. Für $\mathbb{Q}$-anisotrope (bis evtl. aufs Zentrum) Gruppen L sind die Räume $\mathcal{S}^L_{K^L_f}$ kompakt, mit den üblichen „Erleichterungen", die dies fürs Studium der Kohomologie mit sich bringt. Ist L dagegen *isotrop* über $\mathbb{Q}$, so sind diese Räume $\mathcal{S}^L_{K^L_f}$ zwar niemals kompakt, aber man verfügt über die Methode der BOREL–SERRE-Kompaktifizierung. Die Randstrata dieser Kompaktifizierung sind durch die Standard-Parabolischen von L parametrisiert, und man kann ein Randstratum $\partial_R \mathcal{S}^L_{K^L_f}$ zur Parabolischen $R \subset L$ als Faserbündel über $\mathcal{S}^{M_R}_{K^{M_R}_f}$ (i.w.) auffassen, wobei M_R eine LEVI-Untergruppe von R ist; die Faser ist eine kompakte arithmetische Nilmannigfaltigkeit zum unipotenten Radikal U_R von R. Diese Strukturaussage erlaubt eine weitreichende Analyse der $\widetilde{\mathcal{M}}$-Kohomologie dieser Randstrata und mitunter die Konstruktion interessanter Kohomologieklassen.

Diese Einsichten allgemeiner Natur werden dann für die Situation aus der Einleitung konkretisiert und spezialisiert: Zu einem totalimaginären Zahlkörper E und einem algebraischen HECKE-Charakter η auf seiner Ideleklassengruppe, für den 0 eine rechtskritische Stelle ist, gehört sein maximaler CM-Teilkörper F und ein HECKE-Charakter φ auf diesem; es bezeichne wieder f_0 den halben Grad von F über $\mathbb{Q}$. Hier interessiert nur der Fall, daß der Erweiterungsgrad $n := [E : F]$ mindestens 2 ist. Es ist dann $H_0 := \mathrm{Res}^E_F(\mathbb{G}_m/_E) \mathrel{\widehat{=}} GL_E(E)$ ein maximaler (und fast anisotroper) Torus in der reduktiven Gruppe $G_0 := GL_F(E) \cong GL_n/_F$. Sei $P_0 \subset G_0$ der Stabilisator einer beliebigen F-Geraden in E und M_{P_0} eine Standard-LEVI-Untergruppe hierin. Mit $P \subset G \supset H$ seien die Skalarrestriktionen $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}(\bullet_0)$ der Gruppen $P_0 \subset G_0 \supset H_0$ bezeichnet; es werden dann die Beispiele $L = G, H, M_P$ eingehender diskutiert. Die Räume $\mathcal{S}^H_{K^H_f}$ sind kompakte topologische Tori der Dimension $(n-1) \cdot f_0$, und für geeignete Wahl (des Niveaus und) der Darstellung $\mathcal{M} = \underline{\mathcal{M}_d}^\vee$ von G findet man einen eindimensionalen Beitrag zum Inversen des Charakters η in der Höchstgrad-Kohomologie. Für *jede* Einbettung von $H(\mathbb{A})$ nach $G(\mathbb{A})$, welche die gewählten maximalkompakten Untergruppen richtig ineinander abbildet (sog. angepaßte Einbettungen), erhält man somit kompakt getragene Kohomologieklassen von $\mathcal{S}^G_{K^G_f}$ zum Ausgangscharakter η im Grad $(n-1) \cdot f_0$, die *modularen Symbole.* Die Räume $\mathcal{S}^{M_P}_{K^{M_P}_f}$ tragen im Grade 0 Kohomologieklassen (*nicht* kompakt getragen), die zum Charakter φ gehören; die Ergebnisse von Kapitel 4 erlauben es, hieraus Kohomologieklassen im gewünschten Grade $(n-1) \cdot f_0$ auf der P-Randkomponente der BOREL–SERRE-Kompaktifizierung von $\mathcal{S}^G_{K^G_f}$ mit $\underline{\mathcal{M}_d}$-Koeffizienten zu konstruieren.

Das <u>Kapitel 7: **Die Integrale**</u> beginnt mit einem Exkurs, in welchem gewisse Integrale über $(\mathbb{R}^{>0})^n$ von Produkten aus Monomen in den Koordinaten t_i und Potenzen von Ausdrücken der Form $\sqrt{1 + t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2}$ in Termen von Beta- und Gamma-Funktionen ausgewertet werden; ähnliche Integrale sollten als Integrale „an den unendlichen Stellen" bei den im Anschluß besprochenen Paarungen auftreten.

Dann werden aus den eben konstruierten Kohomologieklassen auf der P-Randkomponente der BOREL–SERRE-Kompaktifizierung durch EISENSTEIN-Summation über die Nebenklassen von $P(\mathbb{Q})$ in $G(\mathbb{Q})$ *rationale* Klassen von $\mathcal{S}^G_{K^G_f}$ mit $\underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}$-Koeffizienten gewonnen (wobei die Summation nach Kapitel 5 für genügend große Werte des Parameters d absolut konvergiert), und diese paaren sich mit den vorher genannten modularen Symbolen (ebenfalls rationalen Klassen) zu algebraischen Zahlen! –Diese Paarung zwischen einer festen (rationalen) EISENSTEIN-Klasse und den g_f-Translaten eines festen modularen Symbols (wobei g_f ganz $G(\mathbb{A}_f)$ durchläuft) liefert einen Verkettungsoperator $\mathsf{T}^{\mathrm{geom}}_f : \mathcal{J}_{\varphi_f} \to \mathcal{K}_{\eta_f}$, der in derselben $\overline{\mathbb{Q}}$-Struktur wie der in Kapitel 3 eingeführte Operator $\mathsf{T}^{\mathrm{loc}}_f$ liegt. Das den Wert der Paarung darstellende Integral über $\mathcal{S}^H_{K^H_f}$ wird mit dem RANKIN-Trick in ein Integral über ganz $\overline{H}(\mathbb{A}) = \mathbb{I}_E/\mathbb{I}_F$ umgeformt: die Summationsmenge der EISENSTEIN-Reihe „ist" gerade die diskrete Untergruppe $\overline{H}(\mathbb{Q}) = E^*/F^*$, die aus $\overline{H}(\mathbb{A})$ links ausdividiert wird; die vorgenommenen Vertauschungen von Grenzprozessen sind zunächst bei absoluter Konvergenz der EISENSTEIN-Reihe „legal", und sie sollten auch im „meromorph fortgesetzten" Fall gerechtfertigt werden können. –Hiermit ist dann sichtbar, daß $\mathsf{T}^{\mathrm{geom}}_f$ zu dem weiteren Verkettungsoperator $\mathsf{T}^{\mathrm{int}}_f$ proportional ist, wobei der Proportionalitätsfaktor gerade das Integral an den unendlichen Stellen ist.

. . . .

Diese Arbeit ist unfertig, wie sich an verschiedenen Stellen zeigt: die Kapitel 1 und 2 tragen noch sehr stark den Charakter der Materialsammlungen für den Verfasser, als die sie entstanden sind; sehr viel dort Aufgeschriebenes ist wohlbekannt und fast ebenso wohldokumentiert (so sind die Abschnitte 1.2 und 1.3 im wesentlichen eine Exegese von [Se68, Ch. III], und „alle" Darstellungstheorie aus Kapitel 2 findet sich in [FH91] an geeigneten Stellen). Auch die weiteren Kapitel sind sehr wortreich geschrieben und bedürften eigentlich einer stilistischen Bearbeitung, vor allem Straffung. Manche Anschlüsse zwischen Kapiteln sind nicht passend, und leider haben sich einige inkonsistente und fälschlich-suggestive Notationen eingeschlichen. Einige eigentlich hier zu erwartende „Verifikationen" werden nicht erbracht: die Gleichheit von P- und B-EISENSTEIN-Klasse zu demselben Charakter φ; die Verträglichkeit der Rationalitätsvermutung mit der Funktionalgleichung (bzw. dem Wechsel von links- zu rechtskritischen Werten mittels dieser); die genaue Bestimmung des Konvergenzbereichs der EISENSTEIN-Reihen und die Begründung gewisser Integral-Manipulationen im nicht absolut konvergenten Fall. Am schwersten dürfte aber wiegen, daß „das Integral an den unendlichen Stellen" nicht wirklich ausgerechnet wird, was einstmals das eigentliche Ziel dieses Projektes war. (Es fehlt außerdem die Bearbeitung der algebraischen HECKE-Charaktere von *totalreellen* Zahlkörpern: wenn die $\big(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), SO(n)\big)$-Analoga der Ergebnisse von Kapitel 4 vorgelegt wären, so ergäbe sich ein „kohomologischer" Beweis des Satzes von SIEGEL–KLINGEN, da die Rationalität der EISENSTEIN-Klasse hier wegen der Abwesenheit cuspidaler Kohomologie kein Problem ist und alle weiteren Rechnungen –mutatis mutandis– genauso gehen. –Die entsprechenden Ergebnisse über Zerlegung gewisser Tensorprodukte von $SO(n)$-Darstellungen liegen dem Verfasser vor, er hofft; sie bei anderer Gelegenheit schriftlich niederlegen zu können.)

Derzeit ist es dem Verfasser unmöglich, die oben genannten wünschenswerten Änderungen vorzunehmen; er hofft, daß diese Arbeit auch als eine unaufgeräumte und unvollständige Werkzeugsammlung nicht ganz ohne Wert ist.

0.4 Danksagungen

Vom November 1996 bis September 1999 erhielt ich ein Promotionsstipendium des Graduiertenkollegs „Algebraische, geometrische und analytische Methoden der modernen Mathematik und ihre Wechselwirkungen“ an den Mathematischen Instituten der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, und von Februar 2000 bis Oktober 2000, im April 2001 sowie von April bis Dezember 2004 war ich als Doktorand am Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn angestellt; diesen Institutionen und den beteiligten Personen möchte ich meinen herzlichen Dank für die gewährte materielle und ideelle Unterstützung sagen.

Ebenso danke ich dem Mathematischen Institut der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn für die Möglichkeit, in den Jahren 1999 bis 2004 (mit Unterbrechungen) immer wieder einzelne Stellen wissenschaftlicher Mitarbeiter oder Hilfskräfte vertreten und dabei auch an dieser Dissertation arbeiten zu können.

Herrn Prof. Jens Franke möchte ich danken für sein Interesse an dieser Arbeit und für Hinweise und Anregungen, die ich aus Gesprächen und aus seinen Seminaren entnehmen konnte.

Meine Kollegen und Zimmer-Mitnutzer Dr. Alexander Caspar, Dr. Jochen Heinloth, Dr. Thorsten Kleinjung und Jens Putzka haben sich mir oft als Diskussionspartner und Beantworter törichter Fragen zur Verfügung gestellt; auf ihre Beratung und Hilfe in LaTeX-nischen Fragen hätte ich nicht verzichten können.

Dr. Christian Kaiser hat verschiedenen hier vorgetragenen Argumenten einen entscheidenden Schubs gegeben, und er konnte jederzeit fundierte Auskünfte zu allen möglichen Themen geben; noch mehr als hierfür gebührt ihm aber Dank für die sicherlich schmerzhafte Arbeit des Korrekturlesens und für Hilfestellung bei der Beseitigung selbstgelegter Fußangeln.

An verschiedenen Stellen ist schon klargeworden, daß diese Arbeit ohne die Ideen von Prof. Günter Harder weder begonnen noch durchgeführt hätte werden können. Ihm als meinem akademischen Lehrer möchte ich herzlich danken für die Überlassung dieses wichtigen Themas, das ich nun doch nicht bis zum Ende durchführen konnte, für ungezählte Anregungen und Impulse aus Vorlesungen, Seminaren und persönlichen Gesprächen und für die Förderung und Unterstützung, die er mir in den langen Jahren der Bearbeitung dieses Themas zuteil werden ließ.

Meiner Familie –meinen Kindern Jan und Miriam und meiner Ehefrau Pia Leonards– danke ich für Geduld, Ungeduld, Verständnis und Unterstützung in jeder Hinsicht!

Johannes Schlippe, im März 2005

1 Algebraische HECKE-Charaktere

1.1 Zahlkörper und ihre Stellen; Adeleringe und Idealklassengruppen

In diesem Kapitel bezeichne immer F (und später auch E) einen *Zahlkörper*, d.h. eine endliche algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.

1.1.1 Archimedische Stellen

Es werde ein algebraischer Abschluß $\overline{F} = \overline{\mathbb{Q}}$ von F (und $\mathbb{Q}$) fixiert, d.h. ein Zahlkörper wird als Teilkörper von $\overline{\mathbb{Q}}$ angesehen. Die komplexe Konjugation $\mathsf{c} \mathrel{\widehat{=}} \overline{(\cdot)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (das erzeugende Element der GALOIS-Gruppe von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$) operiert auf der Menge der Einbetttungen $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{Alg}}(F, \overline{\mathbb{Q}})$, „sobald" eine Einbettung $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ fixiert wird; die (ein- oder zweielementigen) Bahnen dieser Operation nennt man die *unendlichen* oder *archimedischen Stellen* von F; die Menge dieser Stellen (d.h. der Orbitraum $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{Alg}}(F, \mathbb{C})/ <\mathsf{c}>$) wird mit $\mathbb{V}_{F,\infty}$ bezeichnet. Ein $\tau = \{\sigma, \mathsf{c}\sigma\} \in \mathbb{V}_{F,\infty}$ induziert eine Topologie auf dem Bild von F in $\mathbb{C}$. Die Vervollständigung von F bezüglich dieser Topologie wird F_τ genannt (und ist natürlich zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ isomorph), sie trägt eine mit $|\cdot|_\tau : F_\tau^* \to \mathbb{R}^{>0}$ bezeichnete, auch τ-Norm genannte Exponentialbewertung durch den Modulus-Charakter der Aktion von $(F^* \subset) F_\tau^*$ auf $(F_\tau, +, dx)$, wobei dx ein Haarmaß ist. Man hat demnach für $x \in F$ und $\tau \in \mathbb{V}_{F,\infty}$:

$$|x|_\tau = \begin{cases} |\rho(x)|_{\mathbb{R}}, & \text{falls} \quad \tau = \{\rho\} = \{\mathsf{c}\rho\} \quad \text{eine reelle Stelle ist, } \rho : F \hookrightarrow \mathbb{R}; \\ \sigma(f) \cdot \mathsf{c}\sigma(f), & \text{falls} \quad \tau = \{\sigma, \mathsf{c}\sigma\} =: |\sigma| \quad \text{eine komplexe Stelle ist, } \sigma(F) \not\subset \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ein *CM-Typ* $\mathcal{T}$ von F ist ein Schnitt der Projektion $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{Alg}}(F, \mathbb{C}) \to \mathbb{V}_{F,\infty}$, auch mit der Menge seiner Bilder in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{Alg}}(F, \overline{\mathbb{Q}})$ identifiziert.

Setze $\mathbb{A}_{F,\infty} := F_\infty := F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, dann gilt $\mathbb{A}_{F,\infty} \cong \mathbb{R}^{r_F} \oplus \mathbb{C}^{s_F}$ für gewisse $r_F, s_F \in \mathbb{N}_0$, die natürlich $[F : \mathbb{Q}] = r_F + 2s_F$ erfüllen; schreibe diag_∞ für die Einbettung von $F = F \otimes 1$ nach F_∞ bzw. von F^* nach $\mathbb{I}_{F,\infty} := F_\infty^*$. Nun ist $\mathbb{C}^*$ zusammenhängend und $\mathbb{R}^*$ hat zwei und somit $\mathbb{I}_{F,\infty}$ genau 2^{r_F} Zusammenhangskomponenten, von denen die das Einselement enthaltende $\mathbb{I}_{F,\infty}^+$ heiße; mit $F^{*,+}$ werde die Untergruppe der *totalpositiven* Elemente von F^* bezeichnet:

$$F^{*,+} := \{f \in F^* |\, \mathrm{diag}_\infty(f) \in \mathbb{I}_{F,\infty}^+\}.$$

1.1.2 Nichtarchimedische Stellen

Die Menge $\mathrm{Specmax}(\mathcal{O}_F)$ der maximalen Ideale des Ganzzahlringes $\mathcal{O}_F$ von F heißt im folgenden auch $\mathbb{V}_{F,f}$, die Menge der *endlichen* oder *nichtarchimedischen* Stellen von F. Einem Primideal $(0) \neq \mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_F$ entspricht hierbei ein ultrametrischer Absolutbetrag wie folgt: es bettet sich F ein in $F_\mathfrak{p}$, den Quotientenkörper der $\mathfrak{p}$-adischen Komplettierung $\mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}$ von $\mathcal{O}_F$, die ein diskreter Bewertungsring ist; es sei $\pi_\mathfrak{p}$ ein Uniformisierendes, und es bezeichne $v_\mathfrak{p} : F$ (bzw. $F_\mathfrak{p}$) $\to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ die zugehörige normierte Bewertung, d.h. $v_\mathfrak{p}(\pi_\mathfrak{p}) = 1$. Der Absolutbetrag $|\cdot|_\mathfrak{p}$ von F oder $F_\mathfrak{p}$ wird dann normiert durch die Festsetzung

$$|\pi_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} := N(\mathfrak{p})^{-1},$$

wobei für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ in $\mathcal{O}_F$ die *Norm* $N(\mathfrak{a})$ als die Mächtigkeit $\sharp(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a})$ des endlichen Ringes $\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}$ definiert ist; im Falle eines maximalen Ideals $\mathfrak{p}$ ist $\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}$ ja auch der Restklassenkörper $\mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\cdot\mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}$ der Vervollständigung, und $N(\mathfrak{p})$ ist eine positive Potenz der durch $\mathfrak{p}\cap\mathbb{Z} = (p)$ festgelegten Primzahl p. –Der Modulus-Charakter (zu einem Haarmaß dx auf $(F_\mathfrak{p}, +)$) nimmt dann auf einem $x \in F_\mathfrak{p}$, das durch Linksmultiplikation als Endomorphismus auf $(F, +)$ operiert, gerade den Wert $|x|_\mathfrak{p} = N(\mathfrak{p})^{-v_\mathfrak{p}(x)}$ an (dies ist für $x \in \mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}$ auch $= \#\mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}/x\cdot\mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}$).

1.1.3 Adele und Idele

Ist $\widehat{\mathcal{O}}_F := \lim_{(0)\neq\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_F/\mathfrak{a}$ die pro-endliche Komplettierung des Ringes $\mathcal{O}_F$, dann wird $\mathbb{A}_{F,f} := \widehat{\mathcal{O}}_F \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ der Ring der *endlichen Adele* von F genannt, er kann auch als das eingeschränkte direkte Produkt

$$\mathbb{A}_{F,f} \cong \prod_{\mathfrak{p}\in\mathbb{V}_{F,f}}{}' F_\mathfrak{p}(\text{ rel. } \mathcal{O}_\mathfrak{p})$$

aufgefaßt werden; die natürliche Einbettung von F hierein heißt $\mathrm{diag}_f : F \to \mathbb{A}_{F,f}$.

Die F-Algebra $\mathbb{A}_F := F_\infty \times \mathbb{A}_{F,f}$ der *Adele* von F ist ein lokalkompakter Ring, der F via $\mathrm{diag}_\mathbb{A} := (\mathrm{diag}_\infty, \mathrm{diag}_f)$ als diskreten cokompakten Unterring enthält; man hat $\mathbb{A}_F = \mathbb{A} \otimes_\mathbb{Q} F$, wenn wie üblich $\mathbb{A}$ (ohne Subskript) den Adelering von $\mathbb{Q}$ bezeichnet. Für jede Stelle $v \in \mathbb{V}_F$ wird F_v mittels der Einbettung $f \mapsto (0, \ldots, 0, f, 0, \ldots, 0)$ als Teilring von $\mathbb{A}_F$ angesehen.
Die lokalkompakte Gruppe $\mathbb{I}_F := \mathbb{G}_m/_F(\mathbb{A}_F)$ heißt die *Idelegruppe* von F, sie enthält als Untergruppe (u.a.) F^* mittels $\mathrm{diag}_\mathbb{A}$ und für $v \in \mathbb{V}_F$ auch $F_v^* \cong (1, \ldots, 1, F_v^*, 1, \ldots, 1)$.

Die (auch Tate-*Charakter* genannte) Idele-Norm ist nun folgendermaßen definiert:

$$\|\cdot\|_{\mathbb{I}_F} : \begin{array}{ccc} \mathbb{I}_F & \longrightarrow & \mathbb{R}^{>0} \\ \underline{a} = (\ldots, a_v, \ldots)_{v\in\mathbb{V}_F} & \mapsto & \prod_{v\in\mathbb{V}_F} |a_v|_v \,. \end{array}$$

Wenn $\mathbb{I}_F^0$ den Kern der Idelenorm bezeichnet, dann gilt mit den oben beschriebenen Normierungen nach der sog. *Produktformel*, daß F^* in $\mathbb{I}_F^0$ enthalten ist; es ist sogar eine *diskrete cokompakte* Untergruppe (z.B. nach dem *Gitterpunktsatz von* Minkowski in der Version von Fujisaki; [We73, Thm. IV.3.4]).

1.1.4 Idele- und Idealklassengruppen

Einem Element $\underline{a}_f = (\ldots, a_\mathfrak{p}, \ldots)_{\mathfrak{p}\in\mathbb{V}_{F,f}} \in \mathbb{I}_{F,f} \cong \mathbb{I}_F/\mathbb{I}_{F,\infty}$ ist kanonisch ein gebrochenes Ideal von F zugeordnet, nämlich $\mathcal{ID}(\underline{a}_f) := \prod_{\mathfrak{p}\in\mathbb{V}_{F,f}} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(a_\mathfrak{p})}$. Wegen der „eindeutigen Primidealzerlegung" im Dedekindring $\mathcal{O}$ ist jedes gebrochene Ideal von dieser Form, und $\mathcal{ID}(\underline{a}_f)$ hängt von $\underline{a}_f$ offenbar nur modulo der in $\mathbb{I}_{F,f}$ maximalkompakten Untergruppe $\widehat{\mathcal{O}}_F^*$ ab. Schreibt man $\mathcal{ID}(F)$ für die Gruppe der gebrochenen Ideale von F und bezeichnet man die Projektion auf die Idealklassengruppe $\mathcal{C}\ell(F)$ mit $[\cdot]$, so induziert also die Kette von (kanonischen) Projektionen

$$\mathbb{I}_F \xrightarrow{\text{mod } \mathbb{I}_{F,\infty}} \mathbb{I}_{F,f} \xrightarrow{\mathcal{ID}(\cdot)} \mathcal{ID}(F) \xrightarrow{[\cdot]} \mathcal{C}\ell(F)$$

einen Isomorphismus

$$\mathbb{I}_F / (\mathbb{I}_{F,\infty} \cdot \widehat{\mathcal{O}}_F^* \cdot F^*) \cong \mathcal{C}\ell(F).$$

Für einen Torus $T/_{\mathbb{Q}}$ bezeichnet $\pi_0(T_\infty) := T_\infty / T_\infty^0$ die Gruppe der Zusammenhangskomponenten in der LIE-Gruppe der $\mathbb{R}$-wertigen Punkte $T_\infty := T(\mathbb{R}) = T(\mathbb{C})^{\mathfrak{c}}$; für einen „quasispaltenden" Torus $T = T_F := \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^F(\mathbb{G}_m/_F)$ ist also $\pi_0(T_{F,\infty}) = \pi_0\big((F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^*\big) = \{\pm 1\}^{r_F}$. -Man darf sich $\pi_0(T_\infty)$ als Untergruppe in T_∞ vorstellen! Ferner trifft klarerweise $F^* = T_F(\mathbb{Q})$ *jede* Zusammenhangskomponente von F_∞^*; dies ist auch ein Spezialfall eines Satzes von TATE (cf. [PR91, Prop. 7.3.8] und [Vo98, Thm. 11.5]), nach welchem für *jeden* Torus $T/_{\mathbb{Q}}$ die Gruppe $T(\mathbb{Q})$ *dicht* in $T(\mathbb{R})$ liegt.

–Die Quotientengruppe

$$\mathbb{I}_F / (\mathbb{I}_{F,\infty}^+ \cdot \widehat{\mathcal{O}}_F^* \cdot F^*) =: \mathcal{C}\ell^+(F)$$

heißt *Idealklassengruppe im engeren Sinne*, sie kann auch angesehen werden als die Quotientengruppe der Idealgruppe von F nach der Untergruppe derjenigen Hauptideale, die einen totalpositiven Erzeuger haben. Ihre Kardinalität $h^+ = h^+(F)$ ist nach Obigem ebenfalls endlich, der Index $\sharp(\mathcal{C}\ell^+(F)/\mathcal{C}\ell(F))$ ist allerdings wiederum eine subtile Invariante von F. –Es sind damit auch für Untergruppen $U \subset \widehat{\mathcal{O}}_F^*$ *von endlichem Index*die „verallgemeinerten Idealklassengruppen" (im engeren oder weiteren Sinne) zum Niveau U,

$$\mathbb{I}_F / (\mathbb{I}_{F,\infty}^{(+)} \cdot U \cdot F^*) =: \mathcal{C}\ell_U^{(+)}(F),$$

immer endlich; sie können auch als Quotienten der Gruppe der gebrochenen Ideale $\mathcal{ID}(F)$ nach den Hauptidealen und den Kongruenzuntergruppen $\mathcal{O}_F^{*,(+)}(U) := \mathcal{O}_F^* \cap U(\cap F^{*,(+)})$ (die offenbar in $\mathcal{O}_F^*$ endlichen Index haben) erhalten werden. [Nach einem Satz von CHEVALLEY ([Ch51]) haben Tori die Kongruenzuntergruppen-Eigenschaft, insbesondere ist jede Untergruppe von endlichem Index in $\mathcal{O}_F^*$ eine solche Kongruenzuntergruppe; ein lustigerer Beweis findet sich in [Se64, 3.5].]

Für einen gegebenen Zahlkörper F bezeichne $\{\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{h^+}\}$ ein in $\pi_0(F_\infty^*) \times \mathbb{I}_{F,f} \subset \mathbb{I}_F$ gewähltes Repräsentantensystem für $\mathcal{C}\ell^+(F)$; damit kann jedes $\underline{a} \in \mathbb{I}_F$ in der Form

$$(1) \qquad \underline{a} = \lambda \cdot \mathfrak{c}_k \cdot \mathrm{diag}(\alpha) \cdot \underline{\varepsilon} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{I}_{F,\infty}^+, \quad 1 \le k \le h^+, \quad \alpha \in F^{*,+} \text{ und } \underline{\varepsilon} \in \widehat{\mathcal{O}}_F^*$$

geschrieben werden, wobei k eindeutig, λ, α und $\underline{\varepsilon}$ aber nur modulo der Gruppe der *totalpositiven (globalen) Einheiten* $\mathcal{O}_F^* \cap F^{*,+} =: \mathcal{O}_F^{*,+}$ eindeutig aus $\underline{a}$ bestimmt sind.

1.2 SERRE-Tori zu Zahlkörpern und ihre Charaktere

1.2.1 Totalreelle und CM-Zahlkörper

Mit $\mathcal{G}_F := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}} : F)$ werde die absolute GALOIS-Gruppe eines über $\mathbb{Q}$ algebraischen Körpers F (z.B. eines Zahlkörpers) bezeichnet, und $\mathcal{G} := \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ sei die absolute Galoisgruppe von $\mathbb{Q}$ selbst. Zu jeder Einbettung $\sigma : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ hat man eine *komplexe Konjugation* $\mathfrak{c}_\sigma := \sigma^{-1} \circ \mathfrak{c} \circ \sigma \in \mathcal{G}$, also ein Element der genauen Ordnung 2 dieser absoluten Galoisgruppe. –Nach einem Satz von ARTIN sind die derart entstehenden Involutionen die einzigen Elemente von endlicher Ordnung in $\mathcal{G}$, und sie sind alle untereinander konjugiert in $\mathcal{G}$; ihre Konjugationsklasse heiße $\mathcal{C}$. Es sei nun $\mathcal{U} := \overline{<\mathcal{C}>}$ der Abschluß der von allen $\mathfrak{c}_\sigma$ erzeugten

Untergruppe in $\mathcal{G}$, und $\mathcal{V} := \overline{<\{\mathsf{c}_\sigma \cdot \mathsf{c}_\tau \mid \sigma, \tau : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}\}>}$ der Abschluß der von allen Produkten *gerader Länge* von Elementen aus $\mathcal{C}$ erzeugten Untergruppe. Dann sind $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ abgeschlossene Normalteiler (von unendlichem Index) in $\mathcal{G}$, und $\mathcal{V}$ ist eine Untergruppe von Index 2 in $\mathcal{U}$; man kann $\mathcal{V}$ auch als den Schnitt von $\mathcal{U}$ mit dem Kern des quadratischen Charakters $\chi_K : \mathcal{G} \to \{\pm 1\}$ zu einem (beliebigen!) imaginär-quadratischen Zahlkörper K (also $[K : \mathbb{Q}] = 2,\ K \otimes \mathbb{R} = \mathbb{C}$) erhalten. Die Fixkörper $\mathsf{C} := \overline{\mathbb{Q}}^{\mathcal{V}} \supset \mathsf{R} := \overline{\mathbb{Q}}^{\mathcal{U}}$ sind also beide unendlich-galois'sch über $\mathbb{Q}$, und in $\mathrm{Gal}(\mathsf{C} : \mathbb{Q})$ ist die Restklasse (wiederum mit c bezeichnet) eines jeden (!) c_σ ein nichttriviales *zentrales* Element der Ordnung 2, dessen Fixkörper (natürlich) R ist. Man sieht leicht ein, daß es sich bei R um den Körper aller *totalreellen* Zahlen[4] handelt (d.h. den Körper aller $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, so daß für *jedes* $\sigma : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ gilt: $\sigma(\alpha) \in \mathbb{R}$), und C (hierüber imaginär-quadratisch, d.h. entstehend durch Adjunktion der Quadratwurzel eines total-negativen Elements) ist der Körper aller Zahlen *vom CM-Typ*, d.h. derjenigen $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$, zu denen ein (dann notwendig zu β konjugiertes) $\overline{\beta}$ existiert, so daß für jede Einbettung σ des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\beta, \overline{\beta})$ nach $\mathbb{C}$ gilt: $\mathsf{c}\big(\sigma(\beta)\big) = \sigma(\overline{\beta})$.

Ein Unterkörper von $\overline{\mathbb{Q}}$ soll nun *vom Typ CM* bzw. *totalreell* heißen, falls er ein Unterkörper von C bzw. von R ist, und er soll ein *CM-Körper* heißen genau dann, wenn er in C, aber *nicht* in R enthalten ist.

Einem beliebigen Zahlkörper E ordnet man nun seine Unterkörper $E_0 := \overline{\mathbb{Q}}^{\mathcal{G}_E \cdot \mathcal{U}} = E \cap \mathsf{R}$ und $F := \overline{\mathbb{Q}}^{\mathcal{G}_E \cdot \mathcal{V}} = E \cap \mathsf{C}$ zu; somit gilt $E \supset F \supset E_0$, es ist E_0 der maximale totalreelle und F der maximale Teilkörper vom Typ CM, und F stimmt *entweder* mit E_0 überein (dies ist zum Beispiel der Fall, sobald E von ungeradem Grad ist und/oder mindestens eine reelle Einbettung hat), *oder* F ist eine imaginär-quadratische Erweiterung von E_0.

(Bemerkung: Auch für *totalimaginäres* E kann es vorkommen, daß der maximale Teilkörper vom Typ CM totalreell ist! Die folgende Klasse von Beispielen hierfür wurde dem Verfasser von C. Kaiser zur Kenntnis gebracht: Es sei $f \in \mathbb{Q}[T]$ ein irreduzibles Polynom vom Grade 3 mit drei reellen Nullstellen $\alpha_i \in \mathbb{R}$, die so angeordnet sind, daß $\alpha_1 < \alpha_2 < 0 < \alpha_3$, und sei $n \in \mathbb{Q}$ so gewählt, daß mit $\beta_i := -\alpha_{4-i} - n$ gilt: $\beta_1 < \beta_2 < 0 < \beta_3$; setze dann $E_0 := \mathbb{Q}[T]/<f(T)>$, ein totalreeller kubische Zahlkörper (wobei es hier keine Rolle spielt, ob dieser über $\mathbb{Q}$ galois'sch ist oder nicht), und sei $E \supset E_0$ die biquadratische Erweiterung, die durch Adjunktion der Quadratwurzeln aus $\gamma_1 := \alpha_3$ und aus $\gamma_2 := -\beta_3 = \alpha_1 + n$ entsteht. Mit $\gamma_3 := -\alpha_3 \cdot \beta_3$ sind dann die $F_i := E_0[\sqrt{\gamma_i}]$, $i = 1, 2, 3$, die sämtlichen Zwischenkörper dieser Erweiterung. Man prüft nun leicht, daß bei geeigneter Numerierung der drei reellen Einbettungen ρ_j von E_0 gilt: $\rho_j(\gamma_i) > 0 \Leftrightarrow i = j$; folglich kann keiner der Körper F_i totalreell *und* keiner totalimaginär sein! Hiermit ist also gezeigt, daß E totalimaginär ist, daß E_0 (wie durch die Bezeichnung suggeriert) der maximale totalreelle Teilkörper in E ist und daß kein Zwischenkörper, der E_0 enthält, vom Typ CM sein kann: also ist $F = E_0$ auch der maximale Teilkörper vom Typ CM – und totalreell. –Als ein „kleines" konkretes Beispiel kann man $f(T) = T^3 + 3T^2 - 2T - 3$ (mit Diskriminante $11 \cdot 43$) und je einer Nullstelle in den Intervallen $(-4, -3), (-1, 0), (1, 2)$ betrachten; Dank hierfür an PARI und T. Kleinjung.)

1.2.2 Serre-Tori: Quotienten nach arithmetischen Gruppen

Es sei $T/_{\mathbb{Q}}$ ein über $\mathbb{Q}$ definierter algebraischer Torus, d.h. eine lineare algebraische Gruppe mit der Eigenschaft $T \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}} \mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{Q}} \cong (\mathbb{G}_m/_{\overline{\mathbb{Q}}})^n$ (mit $n := \dim T$). Es ist dann sein absoluter Charaktermodul $X^*(T) := \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Q}}-\mathrm{Alg.Gr.}}(T \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{G}_m/_{\overline{\mathbb{Q}}})$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul

[4]nicht zu verwechseln mit dem Körper $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$ aller reellen Zahlen, die algebraisch sind!

vom Range n, auf dem die Galoisgruppe $\mathcal{G}$ stetig operiert. Bekanntlich wird der Torus durch diesen Galoismodul bis auf Isomorphie beschrieben, und der endlichdimensionale $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit stetiger Galoisdarstellung $Y(T) := X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ beschreibt T bis auf Isogenie, d.h. bis auf Homomorphismen mit endlichen Kern und Cokern. Die Galoisdarstellung $Y(T)$ ist halbeinfach nach dem Satz von MASCHKE, da $\mathcal{G}$ nur ein *endliches* Bild in $GL_{\mathbb{Q}}\big(Y(T)\big)$ haben kann. Es seien $Y(T)^0$ diejenige Unterdarstellung, auf der $\mathcal{G}$ trivial operiert, und $Y(T)^-$ diejenige Unterdarstellung, auf der *alle* komplexen Konjugationen $\mathsf{c}_\sigma \in \mathcal{G}$ durch Multiplikation mit -1 operieren (dies ist eine Unterdarstellung, da die komplexen Konjugationen *eine* Konjugationsklasse in $\mathcal{G}$ bilden), und schließlich sei $Y(T)^+$ die Komplementärdarstellung zu $Y(T)^{\leq 0} := Y(T)^0 \oplus Y(T)^-$. Es gehört also $Y(T)^0 \overset{(!)}{=} X^*_{\mathbb{Q}}(T) \otimes \mathbb{Q}$ „bis auf Isogenie“ zu einem maximalen $\mathbb{Q}$-spaltenden Unter-bzw. Quotiententorus T_0 in T, sein Komplement $Y(T)^+ \oplus Y(T)^-$ „kommt“ also von einem $\mathbb{Q}$-anisotropen Torus, und $Y(S)^-$ gehört zu einem maximalen Unter- bzw. Quotienten-Torus T_-, dessen $\mathbb{R}$-Punkte eine *kompakte* Liegruppe bilden [anders gesagt: der Basiswechsel nach $\mathbb{R}$ eines $\mathbb{Q}$-Untertorus, der $Y(T)^-$ „liefert“ , ist (immer noch) $\mathbb{R}$-anisotrop]; ein zu $Y(T)^+$ gehörender Torus T_+ ist also $\mathbb{Q}$-anisotrop, aber isotrop über $\mathbb{R}$.

Nun seien zu gegebenem T Tori $T_\star/_{\mathbb{Q}}$ ($\star \in \{0, +, -\}$) wie oben gewählt, so daß $T' := T_- \times T_0 \times T_+$ zum ursprünglichen T über $\mathbb{Q}$ isogen ist; für die Betrachtung arithmetischer Untergruppen kann dann T durch T' ersetzt werden, und das werde ab jetzt auch getan. Es sei also $\Gamma_T \subset T(\mathbb{Q})$ eine arithmetische Untergruppe, d.h. kommensurabel zu $T(\mathbb{Q}) \cap GL_N(\mathbb{Z})$ für irgendeine Einbettung/treue Darstellung $T/_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow GL_N/_{\mathbb{Q}}$; man darf auch annehmen, daß $\Gamma_T = \Gamma_- \times \Gamma_0 \times \Gamma_+$ gilt, wobei $\Gamma_* = \Gamma_T \cap T_*(\mathbb{Q})$. Da T_0 über $\mathbb{Q}$ spaltet, ist Γ_0 eine *endliche* (abelsche) Gruppe [vom Exponenten 2, nämlich ein Produkt von Kopien von $\{\pm 1\} = \mathbb{Z}^* = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{Z})$], und Γ_- ist ebenfalls endlich – als diskrete Untergruppe in der kompakten Gruppe $T(\mathbb{R})$. Nach evtl. Übergang zu einer Untergruppe von endlichem Index kann also angenommen werde, daß Γ_T ganz in $T_+(\mathbb{Q})$ enthalten ist, bzw. man kann sich für die Strukturuntersuchung arithmetischer Untergruppen von Tori auf den Fall zurückziehen, daß $T = T_+$ ein $\mathbb{Q}$-anisotroper, $\mathbb{R}$-isotroper Torus ist, der (von positiver Dimension ist und) keine echten $\mathbb{Q}$-Untertori hat (d.h.: die $\mathcal{G}$-Darstellung $Y(T) = Y(T)^*$ ist irreduzibel). Die Quotientenmannigfaltigkeit $\Gamma_T \backslash T(\mathbb{R})$ $\big($oder auch $T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A})/T(\hat{\mathbb{Z}})\big)$ist dann *kompakt* [nach dem GODEMENT-Kriterium der Reduktionstheorie]; es muß also Γ_T *unendlich* sein, da jede (topologische) Zusammenhangskomponente von $T(\mathbb{R})$ ein euklidischer Raum positiver Dimension ist. Damit hat aber der $\mathbb{Q}$-Untertorus, der als 1-Zusammenhangskomponente im ZARISKI-Abschluß von Γ_T entsteht, sicher positive Dimension, er muß also, wenn T keine echten $\mathbb{Q}$-Untertori hat, mit T „$= T_+$“ übereinstimmen!

Es wurde also gezeigt: *Ist $T/_{\mathbb{Q}}$ ein Torus, $\Gamma \subset T(\mathbb{Q})$ eine arithmetische Untergruppe und $H_T/_{\mathbb{Q}} := T/\overline{\Gamma}^\circ$ der zugehörige* SERRE-*Torus, so gilt $Y(H_T) = Y^{\leq 0}(T)$.*

1.2.3 SERRE-Tori zu Zahlkörpern

Wie äußert sich das für einen Torus der Form $T_E := \mathrm{Res}^E_{\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/_E)$, wenn $E \subset \overline{\mathbb{Q}}$ ein Zahlkörper ist? Hier ist die *Einheitengruppe $\mathcal{O}^*_E$* eine sich aufdrängende arithmetische Untergruppe in T_E. Ihre Untergruppe (von endlichem Index) der *totalpositiven* Einheiten, $\mathcal{O}^{*,+}_E$, liegt dann ganz in der 1-Zusammenhangskomponente der reellen Punkte der

Norm-1-Untergruppe $T_E^{(1)}(\mathbb{R})$; letztere ist diffeo-homomorph zu $(\mathbb{R}^{>0})^{r_E+s_E-1}\times(\mathsf{S}^1)^{s_E}$, und $\mathcal{O}_E^{*,+}$ ist hierin diskret und *cokompakt* nach dem GODEMENT-Kriterium; diese Aussage ist natürlich (äquivalent zum) *Einheitensatz von* DIRICHLET: bis auf eine wohlbekannte Torsionsgruppe „ist“ $\mathcal{O}_E^*$ ein vollständiges Gitter in einem Euklidischen Raum der Dimension $r_E + s_E - 1$!

Was kann nun aber über die ZARISKI-Hülle der Einheitengruppe (oder über den Quotienten nach dieser, d.h. den SERRE-Torus zum Zahlkörper) gesagt werden?

–Für einen derartigen („quasispaltenden“) Torus $T_E = \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^E(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/E)$ ist ja der Charaktermodul $X^*(T_E)$ erzeugt von den Einbettungen σ von F nach $\overline{\mathbb{Q}}$ bzw. $\mathbb{C}$ (genauer: von deren Einschränkungen auf die multiplikative Gruppe); ein $\mathcal{G}$-invariantes Element ist die *Norm* $N_{\mathbb{Q}}^E$, die sich in $X^*(T_E)$ als $\sum_{\sigma:E\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}}[\sigma]$ ausdrückt, und „nach Galoistheorie“ gilt ja auch $X^*(T_E)^{\mathcal{G}}\big(=X_{\mathbb{Q}}^*(T_E)\big) = \mathbb{Z}\cdot N_{\mathbb{Q}}^E$, anders gesagt: $Y(T_E)^0 = \mathbb{Q}\cdot N_{\mathbb{Q}}^E$. Die Galoisdarstellung $Y^\pm := Y(T_E)^- \oplus Y(T_E)^+$ ist – als Komplement zu dieser Norm-Gerade – der Spur-Null-Raum $\{\sum_\sigma n_\sigma\cdot[\sigma] \bigm| n_\sigma\in\mathbb{Q}, \sum_\sigma n_\sigma = 0\}$.

Im Falle eines Körpers E vom Typ CM, für den also n.Def. alle komplexen Konjugationen c_σ durch *dieselbe* Abbildung auf $Y(T_E)$ operieren, kann die Struktur der Unterdarstellung $Y^\pm$ leicht geklärt werden:

- Ist E totalreell, operiert also jede komplexe Konjugation trivial auf der Menge der Einbettungen, so ist $Y(T_E)^-$ trivial und entsprechend $Y(T_E)^+$ gleich dem Spur-Null-Unterraum, also von der Dimension $[E:\mathbb{Q}]-1$; der SERRE-Torus zu E ist mittels der Normabbildung isogen zu $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/\mathbb{Q}$ (und komplementär zum vollen Norm-1-Torus $E^{(1)}$ des Zahlkörpers).
- Ist E dagegen ein CM-Körper, also imaginär-quadratisch über seinem totalreellen Teilkörper E_0, so operiert ja *jede* komplexe Konjugation einfach durch Vertauschungen innerhalb der Paare konjugierter Einbettungen, es gehört somit für jede Einbettung $\sigma: E\hookrightarrow\mathbb{C}$ das Element $[\sigma]+[\mathsf{c}\circ\sigma]$ zu $Y(T_E)^{\geq 0}$, und $[\sigma]-[\mathsf{c}\circ\sigma]$ gehört zu $Y(T_E)^-$. Die Unterdarstellung $Y(T_E)^-$ hat also die Dimension $\frac{[E:\mathbb{Q}]}{2} = \#\mathbb{V}_{E,\infty} = s_E$; der SERRE-Torus H_{T_E} ist also (bis auf Isogenie) der $\mathbb{R}$-anisotrope $\mathbb{Q}$-Torus $\ker\big(N_{E_0}^E : T_E \to T_{E_0}\big)$.

Noch etwas präziser: Ist E vom Typ CM, so hat man

$$Y(T_E)^- = \{\sum_\sigma n_\sigma\cdot[\sigma] \bigm| \forall\sigma:\ n_\sigma + n_{\mathsf{c}\sigma} = 0\};\ Y(T_E)^+ = \{\sum_\sigma n_\sigma = 0,\ \forall\sigma:\ n_\sigma = n_{\mathsf{c}\sigma}\}$$

und es folgt sofort

$$Y(T_E)^{\leq 0} = \{\sum_{\sigma:E\hookrightarrow\mathbb{C}} n_\sigma\cdot[\sigma] \bigm| \exists w\in\mathbb{Q}\ \forall\sigma:\ n_\sigma + n_{\mathsf{c}\sigma} = w\}.$$

Eine direkte Folgerung ist: ein algebraischer Charakter $\gamma: T_E \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}/\overline{\mathbb{Q}}$, der auf einer zur Einheitengruppe kommensurablen Untergruppe trivial ist, muß zu $X^*(H_{T_E}) \subset Y(T_E)^{\leq 0}$ gehören, d.h. für $\gamma \mathrel{\widehat{=}} (\ldots, n_\sigma, \ldots)_\sigma \in X^*(T_E)$ gilt:

(2) $$\gamma|_{\mathcal{O}_E^*} \equiv 1 \iff \forall\sigma: E\hookrightarrow\mathbb{C}:\quad n_\sigma + n_{\mathsf{c}\sigma} =: w \text{ hängt nicht von } \sigma \text{ ab.}$$

Die hierdurch definierte ganze Zahl $w = \mathrm{wt}(\gamma)$ heißt das *Gewicht* von γ. (Hat E eine reelle Stelle $\rho = \mathsf{c}\rho : E \to \mathbb{R}$, so ist $w = n_\rho + n_{\mathsf{c}\rho} = 2n_\rho$ sogar *gerade*, da $n_\rho \in \mathbb{Z}$.) –Wird zu $\gamma = \sum_\sigma n_\sigma[\sigma]$ der Charakter $\sum_\sigma n_{\mathsf{c}\sigma}[\sigma]$ mit $\overline{\gamma}$ bezeichnet, so hat man demnach $\gamma \cdot \overline{\gamma} = (N_{\mathbb{Q}}^E)^{\mathrm{wt}(\gamma)}$.

Um die Struktur von $Y(T_E)^{\pm}$ für ein *beliebiges* E zu klären, beobachtet man zunächst folgendes: ist $E \supset F$ eine endliche Erweiterung von Zahlkörpern, so kann man die Zurückziehung $(N_F^E)^* : X^*(T_F) \to X^*(T_E)$ von Charakteren entlang der *relativen Norm* $N_F^E : E^* \to F^*$ (bzw. $T_E/\mathbb{Q} \to T_F/\mathbb{Q}$) betrachten sowie ihre $\mathbb{Q}$-lineare Ausdehnung auf die jeweiligen Y's; ist nämlich $\delta \mathrel{\widehat{=}} (\ldots, m_\tau, \ldots)_{\tau:F\to\mathbb{C}} \in X^*(T_F)$, so gilt

$$\gamma := (N_F^E)^*(\delta) := \delta \circ N_F^E \mathrel{\widehat{=}} (\ldots, m_{(\tau|_F)}, \ldots)_{\tau:E\to\mathbb{C}}.$$

Diese Abbildung $(N_F^E)^*$ ist ersichtlicherweise (linear und) injektiv; wegen $(\mathsf{c} \circ \tau)|_F = \mathsf{c} \circ (\tau|_F)$ ist klar, daß gilt:

$$\text{Für } \star \in \{-, 0, +\} \text{ gilt } (N_F^E)^*\big(Y(T_F)^\star\big) \subset Y(T_E)^\star.$$

Die *Transitivität der Norm* $N_{\mathbb{Q}}^E = N_F^E \circ N_{\mathbb{Q}}^F$ besagt gerade, daß $(N_F^E)^*$ die beiden Normgeraden $Y(T_{E\text{ bzw. }F})^0$ (und sogar ihre Gitter der Charaktere) *bijektiv* aufeinander abbildet.

Nun seien zum gegebenen E mit $E_0 := \overline{\mathbb{Q}}^{\mathcal{G}_E \cdot \mathcal{U}} = E \cap \mathsf{R}$ und $F := \overline{\mathbb{Q}}^{\mathcal{G}_E \cdot \mathcal{V}} = E \cap \mathsf{C}$ sein maximaler totalreeller Teilkörper und sein maximaler Teilkörper vom Typ CM bezeichnet (wie in 1.2.1). In dieser speziellen Situation liegt ein Element

$$\gamma = \sum_{\sigma:E\to\mathbb{C}} n_\sigma \cdot [\sigma] \in Y(T_E)$$

genau dann im Bild von $(N_{E_0}^E)^*$ [bzw. von $(N_F^E)^*$], wenn die $\mathbb{Q}$-wertige Funktion $\sigma \mapsto n_\sigma$ auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \mathbb{C})$ konstant ist auf den Bahnen von $\mathcal{G}_{E_0} = \mathcal{G}_E \cdot \mathcal{U}$ [bzw. von $\mathcal{G}_F = \mathcal{G}_E \cdot \mathcal{V}$], wenn also für alle komplexen Konjugationen $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2 \in \mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ gilt: $\forall \sigma : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}} : n_\sigma = n_{\mathsf{c}_i \circ \sigma}$ [bzw. $\forall \sigma : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}} : n_\sigma = n_{(\mathsf{c}_1 \circ \mathsf{c}_2)\circ\sigma}$].

Die Elemente γ der Unterdarstellung $Y(T_E)^-$ sind aber nach der Definition dieses Unterraums gerade durch die Beziehungen $n_\sigma = -n_{\mathsf{c}_i \circ \sigma}$ ihrer Koeffizienten charakterisiert, diese erfüllen also auch $n_\sigma = (-1)^2 \cdot n_{(\mathsf{c}_1 \circ \mathsf{c}_2)\circ\sigma}$, d.h. die erforderte Konstanz auf Orbiten. Das heißt:

$$(N_F^E)^*|_{Y^-} : Y(T_F)^- \to Y(T_E)^- \text{ ist (surjektiv und damit) } \underline{\text{bijektiv}}!$$

Die Struktur der Darstellung $Y(T_E)^-$ für einen beliebigen Zahlkörper E ist nun also geklärt: die relative Norm von E auf seinen maximalen Teilkörper vom Typ CM, F, liefert einen Isomorphismus $Y(T_F)^{\leq 0} \cong Y(T_E)^{\leq 0}$. Anders gesagt:

- Der SERRE-Torus $H_{T_E} := \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^E(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/E)/\overline{\mathcal{O}_E^*}^\circ$ eines Zahlkörpers E ist isogen zum SERRE-Torus H_{T_F} seines maximalen Teilkörpers F vom Typ CM (dessen Struktur vorn beschrieben wurde);

- Jeder algebraische Charakter γ auf der multiplikativen Gruppe $T_E(\mathbb{Q}) = E^*$ eines Zahlkörpers, der auf einer Untergruppe endlichen Indexes in der Einheitengruppe (also oBdA: einer Kongruenzuntergruppe) trivial ist, faktorisiert durch die relative Norm zum maximalen Teilkörper F vom Typ CM, d.h. er ist von der Form $\gamma = \delta \circ N_F^E$ mit einem algebraischen, „auf fast allen Einheiten von F trivialen“ Charakter δ von T_F.

Folglich haben auch für einen beliebigen Zahlkörper E die auf den Einheiten trivialen Charaktere γ ein wohlbestimmtes Gewicht $w = \mathrm{wt}(\gamma) = n_\sigma + n_{\mathsf{c}\sigma} \in \mathbb{Z}$ (unabhängig von σ!) und erfüllen mit diesem die Relation $\gamma \cdot \overline{\gamma} = (N_{\mathbb{Q}}^E)^w$, und offenbar gilt, daß $\gamma = (N_F^E)^*(\delta)$ und δ dasselbe Gewicht haben. Allerdings ist es <u>nur</u> (genau) für Zahlkörper vom Typ CM richtig, daß die auf den Einheiten trivialen Charaktere dadurch charakterisiert sind, daß sie in diesem Sinne „ein Gewicht haben“ !

(Dies alles steht (wahrscheinlich besser?) bei Serre in [Se68, II.3; II.A.4]; dort werden auch die ganzzahligen Strukturen $Y(T)^\star \cap X^*(T)$ noch etwas genauer in den Blick genommen.)

–In dieser Arbeit werden später auch Charaktere auf den Serre-Tori zu Tori der Form $T = (T_E)^n = \left(\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^E(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/E)\right)^n$ (z.B. Diagonaltori in $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^E(GL_n/E) =: G$) betrachtet; das Gewicht eines solchen Charakters ist dann wiederum ein Element der Diagonale im absoluten Charaktergitter $X^*(T)$, hier also als ein F-rationales Gewicht auf dem Diagonal-Torus $T_0 \subset GL_n/E$ schreibbar. –Klarerweise hat man für $w \in W$ (= $\mathbb{Q}$-Weylgruppe von T_0, diagonal eingebettet nach $\overline{W}$ = absolute Weylgruppe) und für ein $\chi \in X^*(T \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}})$, das über den Serre-Torus faktorisiert, die Identität

$$\mathrm{wt}(\mathrm{diag}(w) * \chi) = w * \mathrm{wt}(\chi)$$

in $X^*(T_0)$, d.h.: die verschränkte Aktion der *rationalen* Weylgruppe ist mit dem Bilden des Gewichts vertauschbar.

1.2.4 Γ-Produkte zu Charakteren von Serre-Tori und kritische Stellen

Einem algebraischen Charakter auf dem Torus T_E zu einem Zahlkörper E werden „wie in Tate's thesis“ gewisse Γ-Funktionen (als Euler-Faktoren an den archimedischen Stellen von E) zugeordnet. Diejenigen ganzen Zahlen, an denen alle genannten Γ-Funktionen *und* ebenso die unter der Funktionalgleichung zugehörigen gleichzeitig holomorph sind ($\equiv$ keine Pole haben), sind die *kritischen Stellen* dieses Charakters; für die Werte der L-Funktionen von zugehörigen globalen Charakteren an genau diesen kritischen Stellen erwartet man besondere Eigenschaften ....

Zu einem Element γ des absoluten Charaktergitters $X^*(T)$ eines Torus $T/\mathbb{Q}$ gehört der Homomorphismus komplexer Lie-Gruppen $\gamma_{\mathbb{C}} : T(\mathbb{C}) \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, dessen Einschränkung auf $T_\infty := T(\mathbb{R}) = T(\mathbb{C})^{\mathsf{c}}$ mit γ_∞ bezeichnet wird; es ist also $T_\infty \overset{\gamma_\infty}{\to} \mathbb{C}^*$ insbesondere ein *stetiger* Charakter .

Ist hierbei T ein „quasispaltender“ Torus $T_E = \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^E(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/E)$ zu einem Zahlkörper E, so gilt ja $T_\infty = (E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^* \cong \prod_{\tau \in \mathbb{V}_{F,\infty}} E_\tau^*$. Die Einschränkung von γ_∞ auf den Faktor E_τ^* (die $\mathbb{R}$-Punkte des Untertorus $\mathrm{Res}_{\mathbb{R}}^{E_\tau}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/E_\tau)$ von $T \times \mathbb{R}$) heiße γ_τ, dies ist also ein algebraischer Charakter von $\mathbb{C}^*$ bzw. $\mathbb{R}^*$, jeweils als $\mathbb{R}$-algebraische Gruppe aufgefaßt.

Für eine reelle Stelle ρ von E sind die algebraischen Charaktere von $E_\rho^* = \mathbb{R}^*$ gerade die Potenzierungs-Abbildungen $t \mapsto t^{n_\rho}$ für $n_\rho \in \mathbb{Z}$; ein stetiger Charakter χ_ρ von E_ρ^*, dessen Einschränkung auf die topologische Eins-Zusammenhangskomponente $(E_\rho^*)^\circ = \mathbb{R}^{>0}$ mit dem algebraischen Charakter zu n_ρ übereinstimmt, ist also entweder gleich diesem, oder er ist noch mit dem Vorzeichencharakter sgn verschränkt, also von der Form $t \mapsto t^{-1} \cdot |\, t\,|^{n_\rho+1}$. (Zu der etwas verwirrenden Umrechnung: der Charakter auf $\mathbb{R}^*$ „in naiver Beschreibung“ $t \mapsto t^n \cdot \operatorname{sgn}(t)^\varepsilon$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $\varepsilon \in \{0,1\}$ ist gleich dem Charakter in cleverer Beschreibung nach Weil $t \mapsto |\, t\,|^r \cdot t^{-A}$ mit $r \in \mathbb{Z}$ und $A \in \{0,1\}$ genau dann, wenn $A \equiv n + \varepsilon \pmod 2$ und $r - A = n$.)

Für $\tau = |\,\sigma\,| = \{\sigma, c\sigma\}$ *komplex* dagegen ist $\gamma_{|\sigma|} : E_{|\sigma|}^* (\cong \mathbb{C}^*) \to \mathbb{C}^*$ durch

$$z \mapsto z^{n_\sigma} \cdot \overline{z}^{n_{c\sigma}} = (z\overline{z})^{\frac{n_\sigma + n_{c\sigma}}{2}} \cdot \left(\tfrac{z}{\overline{z}}\right)^{\frac{n_\sigma - n_{c\sigma}}{2}} = r^{(n_\sigma + n_{c\sigma})} \cdot e^{i\pi(n_\sigma - n_{c\sigma})}$$

mit $n_\sigma, n_{c\sigma} \in \mathbb{Z}$ gegeben; die Zahlen $n_\bullet$ sind natürlich diejenigen aus der Darstellung $\gamma = \sum_{\sigma : E \hookrightarrow \mathbb{C}} n_\sigma \cdot [\sigma] \in X^*(T_E)$. (Da $E_{|\sigma|}^*$ zusammenhängend ist, verzichtet man weise auf die Betrachtung allgemeinerer Charaktere.)

Es sei ab jetzt $\widetilde{\gamma}$ ein stetiger Charakter auf $T_E(\mathbb{R})$, dessen Einschränkung auf die Eins-Zusammenhangskomponente mit der Einschränkung eines algebraischen Charakters γ auf T_E übereinstimmt, wobei γ die folgenden (wie eben hergeleitet: äquivalenten!) Eigenschaften hat:

- $\gamma \in X^*(T_E) \cap Y(T_E)^-$;
- γ ist trivial auf einer Kongruenzuntergruppe der Einheitengruppe;
- γ faktorisiert über den Serre-Torus: $\gamma : T_E \twoheadrightarrow H_{T_E} \to \mathbb{G}_m/\mathbb{Q}$;

es gilt dann ja auch

- γ besitzt ein Gewicht $w = \operatorname{wt}(\gamma) \in \mathbb{Z}$, d.h. $\forall \sigma : n_\sigma + n_{c\sigma} = w$.

Es gibt dann CM-Typen $\mathcal{T}$ von E (d.h. Schnitte der Projektion $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{Alg}}(E, \mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mathbb{V}_{E,\infty}$), die mit γ verträglich sind, d.h. sie erfüllen $\left(\sigma \in \mathcal{T} \Longrightarrow n_\sigma \leq \frac{w}{2}\right)$. (Im allgemeinen gibt es mehrere, in den später interessierenden Fällen jedoch nur einen, wie dort erklärt werden wird.) Es sei $\mathcal{T}_\gamma$ ein mit γ verträglicher CM-Typ von E.

Wie in Tate*'s thesis* ordnet man nun $\widetilde{\gamma}$ gewisse „verknetete“ Gammafunktionen als „archimedische Euler-Faktoren“ zu: mit $\Gamma_\mathbb{R}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})$ und $\Gamma_\mathbb{C}(s) := 2 \cdot (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma(s)$ (wie in Abschnitt 7.0) setzt man

$$L_\tau(\gamma, s) = \begin{cases} \Gamma_\mathbb{R}(s + r_\rho) & \text{für} \quad \tau = \rho : F \hookrightarrow \mathbb{R} \text{ reell;} \\ \Gamma_\mathbb{C}(s + n_\sigma) & \text{für} \quad \tau = |\,\sigma\,| \text{ und } \sigma \in \mathcal{T}_\gamma, \end{cases}$$

wenn die lokalen Komponenten-Charaktere $\gamma_\tau : E_\tau^* \to \mathbb{C}$ durch die Parameter r_ρ, A_ρ für $\tau = \rho$ reell bzw. $n_\sigma, n_{c\sigma}$ für $\tau = |\,\sigma\,|$ komplex (wie oben) beschrieben sind; schließlich sei $L_\infty(\gamma, s) := \prod_{\tau \in \mathbb{V}_{E,\infty}} L_\tau(\gamma, s)$.

Bemerkung: 1) Dies ist der archimedische Anteil einer –im folgenden Abschnitt noch zu erklärenden– globalen L-Funktion. Diese L-Funktion wird durch eine Funktionalgleichung an die L-Funktion zum Charakter γ^{-1} (oder auch $\overline{\gamma} = (N_{\mathbb{Q}}^{E})^{w} \cdot \gamma^{-1}$) angekoppelt; deswegen sollte man bei der Betrachtung von Werten dieser L-Funktionen von vornherein die Charaktere γ und γ^{-1} gemeinsam berücksichtigen.

2) Später werden archimedische EULER-Faktoren zu algebraischen HECKE-Charakteren η auf E betrachtet, deren „∞-Typ" dann ein algebraischer Charakter $\gamma \,\widehat{=}\, (n_\sigma)_\sigma$ auf T_E ist. Da hierbei ein Invertieren stattfindet, sind die archimedischen Eulerfaktoren dann von der Form $\Gamma_{\mathbb{C}}(s - n_\sigma)$ bzw. $\Gamma_{\mathbb{R}}(s - r_\sigma)$!

Man nennt nun eine ganze Zahl n eine *kritische Stelle* von γ, wenn keine der meromorphen Funktionen $s \mapsto L_\tau(\gamma, s)$ *und* $s \mapsto L_\tau(\gamma^{-1}, 1-s)$ ($\tau \in \mathbb{V}_{E,\infty}$) an der Stelle n einen Pol hat. Die Pole der Gammafunktion liegen bekanntlich *genau* an den nichtpositiven ganzen Zahlen, also ist eine komplexe Stelle $|\,\sigma\,|$ (wobei $\sigma \in \mathcal{T}_\gamma$ und $\mathsf{c}\sigma \notin \mathcal{T}_\gamma$, d.h. $n_\sigma \leq \frac{w}{2} \leq n_{\mathsf{c}\sigma}$) „verantwortlich" für Pole von $L_{|\sigma|}(\gamma, s)$ in allen $n \in \mathbb{Z}, n \leq n_\sigma$ und für Pole von $L_{|\sigma|}(\gamma^{-1}, 1-s)$ in allen $n \in \mathbb{Z}, n \geq 1 + n_{c\sigma}$; somit sind kritisch höchstens diejenigen n, die für jedes komplexe $|\,\sigma\,|$ den Ungleichungen $n_\sigma < n \leq n_{\mathsf{c}\sigma}$ genügen. –Eine reelle Stelle ρ „verursacht" Pole von $L_\rho(\gamma, s)$ in allen $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \equiv n_\rho + \epsilon_\rho(\gamma) \pmod 2, n \leq n_\rho + \epsilon_\rho(\gamma)$ und Pole von $L_\rho(\gamma^{-1}, 1-s)$ in allen $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \not\equiv n_\rho + \epsilon_\rho(\gamma^{-1}) \pmod 2, n \geq 1 + n_\rho + \epsilon_\rho(\gamma^{-1})$. Weiterhin erzwingt ja das Vorhandensein einer reellen Stelle, daß γ eine Potenz der Norm ist – daß also *alle* n_σ gleich sind (und zwar $= \frac{w}{2} \in \mathbb{Z}$)! Man beachte weiterhin, daß γ und γ^{-1} dieselben „Vorzeichenfaktoren" haben: $\forall \rho: \ \epsilon_\rho(\gamma) = \epsilon_\rho(\gamma^{-1})$! Es folgt durch gewissenhafte Buchhaltung:

- Hat der Zahlkörper E sowohl reelle als auch komplexe Stellen, so hat kein Charakter auf dem zugehörigen SERRE-Torus kritische Stellen.
- Ist $E = E_0$ totalreell, so gibt es kritische Stellen zu einem Charakter γ (auf dem SERRE-Torus) höchstens dann, wenn alle lokalen Vorzeichenfaktoren gleich sind: $\forall \rho, \rho': \ \epsilon_\rho(\gamma) = \epsilon_{\rho'}(\gamma) =: \underline{\epsilon}(\gamma)$; in diesem Falle sind die für γ kritischen Zahlen genau diejenigen in $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq \frac{w}{2},\ n \not\equiv \frac{w}{2} - \underline{\epsilon}(\gamma) \pmod 2\} \,\dot\cup\, \{n \in \mathbb{Z} \mid n > \frac{w}{2},\ n \equiv \frac{w}{2} - \underline{\epsilon}(\gamma) \pmod 2\}$.
- Ist E totalimaginär, dann existieren kritische Stellen für einen Charakter γ auf H_{T_E} genau dann, wenn $\forall \sigma: n_\sigma \neq \frac{w}{2}$; es gibt dann genau einen mit γ verträglichen CM-Typ $\mathcal{T}_\gamma$ von E, und $n_0 \in \mathbb{Z}$ ist kritisch für γ, falls $\forall \sigma \in \mathcal{T}_\gamma: \ n_\sigma < n_0 \leq n_{\mathsf{c}\sigma}$.

Die folgenden Eigenschaften von kritischen Stellen und CM-Typen zu SERRE-Torus–Charakteren γ (vom Gewicht w) auf E sind sofort klar:

- $\mathcal{T}_{\overline{\gamma}} = \mathsf{c}\mathcal{T}_\gamma$ ($:= \{\mathsf{c}\sigma \mid \sigma \in \mathcal{T}_\gamma\}$, der zu $\mathcal{T}_\gamma$ komplementäre CM-Typ);
- Gilt $\gamma' = \gamma \cdot (N_{\mathbb{Q}}^{E})^{w}$, so ist s_0 kritisch für γ genau dann, wenn $s_0 + w$ kritisch für γ' ist (man beachte $\mathrm{wt}(\gamma') = \mathrm{wt}(\gamma) + 2 \cdot w$);
- s_0 ist kritisch für $\gamma \iff 1 - s_0$ ist kritisch für $\gamma^{-1} \iff w + 1 - s_0$ ist kritisch für $\overline{\gamma}$;
- s_0 ist kritisch für γ genau dann, wenn $w + 1 - s_0$ es ist.

Insbesondere ist die Menge der kritischen Stellen von γ gleich derjenigen von $\overline{\gamma}$, und sie liegt symmetrisch zum Fixpunkt $\frac{w+1}{2}$ der Spiegelung $s \mapsto w + 1 - s$. (Man beachte, daß das Gewicht von γ *gerade* ist, falls E totalreell ist.)

Ist nun E ein totalimaginärerer Zahlkörper mit den Unterkörpern F (maximal vom Typ CM) und E_0 (maximal totalreell), so faktorisiert ja ein Charakter $\gamma = \sum_{\sigma:E\hookrightarrow\mathbb{C}} n_\sigma \cdot [\sigma]$ auf dem SERRE-Torus zu T_E mittels der Norm nach F durch einen Charakter δ auf dem SERRE-Torus von F: $\gamma = \delta \circ N_F^E$; die Koeffizienten m_τ in $\delta = \sum_{\tau:F\hookrightarrow\mathbb{C}} m_\tau \cdot [\tau]$ ergeben sich einfach durch $m_\tau = n_\sigma$ für ein beliebiges σ mit $\sigma\big|_F = \tau$. Es haben dann insbesondere γ und δ (dasselbe Gewicht und) dieselben kritischen Stellen!

Sind E und γ wie eben und ist n_0 ein kritischer Wert von γ, so kann F (der maximale Teilkörper vom Typ CM in E) nicht totalreell sein, denn sonst müßte ja wie δ auch γ eine Potenz der jeweiligen Norm sein – aber dann ließe keine der komplexen Stellen von E einen kritischen Wert zu! Anders gesagt: wenn ein Charakter auf dem SERRE-Torus eines totalimaginären Körpers E einen kritischen Wert hat, erzwingt dies, daß E einen CM-Körper F enthält! (Und: Potenzen der Norm zu totalimaginären Körpern haben niemals kritische Werte.)

1.3 Algebraische HECKE-Charaktere

1.3.1 Definition und ∞-Typ

Ist für einen $\mathbb{Q}$-Torus T ein (stetiger) Charakter $\varphi : T(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^*$ gegeben und ist $v \in \mathbb{V}_\mathbb{Q}$ eine Stelle von $\mathbb{Q}$, so schreibt man φ_v für die Einschränkung $\varphi\big|_{F_v}$ auf die wie oben beschrieben eingebettete Kopie von $T(\mathbb{Q}_v)$ und identifiziert $\varphi \mathrel{\widehat{=}} (\ldots, \varphi_v, \ldots)_{v\in\mathbb{V}_\mathbb{Q}}$.

(Wenn $T/_{\mathbb{Q}}$ von der Form $\mathrm{Res}_\mathbb{Q}^F(T_0)$ ist für einen Torus $T_0/_F$ (F ein Zahlkörper), dann benutzt man den Isomorphismus von F-Algebren $F \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}_v \cong \bigoplus_{\substack{w\in\mathbb{V}_F:\\ w|v}} F_w$ zur „Zerlegung“

$$\varphi_v \mathrel{\widehat{=}} (\ldots, \varphi_w, \ldots)_{w|v} : T(\mathbb{Q}_v) = \prod_{w|v} T_0(F_w) \to \mathbb{C}^*,$$

also $\varphi = (\ldots, \varphi_w, \ldots)_{w\in\mathbb{V}_F}$; dies insbesondere im Falle $T_0 = \mathbb{G}_\mathrm{m}$ d.h. $T = F^*/_{\mathbb{Q}}$.)

Ein stetiger Charakter auf den Adele-wertigen Punkten eines $\mathbb{Q}$-Torus T,

$$\varphi = (\ldots, \varphi_v, \ldots)_{v\in\mathbb{V}_\mathbb{Q}} = (\varphi_\infty, \varphi_f) : T(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^*,$$

wird nun für ein $\gamma \in X^*(T) = \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Q}}-\mathrm{Alg.Gr.}}(T \times_\mathbb{Q} \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{G}_\mathrm{m}/_{\overline{\mathbb{Q}}})$ ein *algebraischer* HECKE-*-Charakter vom ∞-Typ* γ genannt, falls gilt:

- $\varphi\big|_{T(\mathbb{Q})} \equiv 1$ (d.h. φ induziert einen stetigen Charakter $T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^*$);
- $(\varphi_\infty \cdot \gamma_\infty)\big|_{T(\mathbb{R})^0} \equiv 1$.

(Cf. [HaSc] und [Ha87, S.52 ff.], wo auch die „Rekonstruktion“ von φ aus γ und φ_f erläutert wird.) -Abkürzend wird dann geschrieben:

$$\varphi \in \mathrm{aHC}(\gamma).$$

Die (wertweise) Multiplikation von Charakteren liefert injektive Abbildungen $\mathrm{aHC}(\alpha) \times \mathrm{aHC}(\beta) \to \mathrm{aHC}(\alpha+\beta)$ mit offensichtlichen Assoziativitätseigenschaften; insbesondere trägt $\mathrm{aHC}(0)$ die Struktur einer Gruppe – es ist die Gruppe der Charaktere endlicher Ordnung (der DIRICHLET-Charaktere) von T – und jede der Mengen $\mathrm{aHC}(\alpha)$ „ist" (leer oder) ein prinzipalhomogener Raum unter dieser Gruppe.

Der TATE-Charakter/die Idele-Norm $\|\cdot\|_{\mathbb{I}_E}$ ist ein Beispiel eines algebraischen HECKE-Charakters auf E bzw. dem hierzu gehörenden quasispaltenden Torus T_E: dieser Charakter auf $\mathbb{I}_E$ faktorisiert nach der *Produktformel* zu einem (selbstverständlich stetigen) Charakter auf der Ideleklassengruppe $\mathbb{I}_E/E^* = T_E(\mathbb{A})/T_E(\mathbb{Q})$; für ein (totalpositives) Hauptidele $\mathrm{diag}(a)$ mit $a \in E^{*,+} = T_E(\mathbb{Q}) \cap T^\circ_{E,\infty}$ gilt ja

$$1 = \|\,\mathrm{diag}(a)\|_{\mathbb{I}_E} = \|\,\mathrm{diag}_f(a)\|_{\mathbb{I}_{E,f}} \cdot \|\,\mathrm{diag}_\infty(a)\|_{\mathbb{I}_{E,\infty}};$$

man hat damit

$$\|\,\mathrm{diag}_\infty(a)\|_{\mathbb{I}_{E,\infty}} = \|\,\mathrm{diag}_f(a)\|^{-1}_{\mathbb{I}_{E,f}} = \prod_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Specmax}(\mathcal{O}_E)} N(\mathfrak{p})^{-\left(-v_{\mathfrak{p}}(a)\right)} = \#\big(\mathcal{O}_E/(a)\big) = N^E_{\mathbb{Q}}(a),$$

d.h. $\|\cdot\|_{\mathbb{I}_E}$ ist ein *algebraischer* HECKE-Charakter vom ∞-Typ $N^E_{\mathbb{Q}}(\cdot)^{-1} \mathrel{\widehat{=}} (-1,\ldots,-1)_\sigma$.

1.3.2 Einschränkungen an die ∞-Typen

Es soll nun erläutert werden, welche Charaktere γ als ∞-Typen von algebraischen HECKE-Charakteren auftreten (können). –Für einen Zahlkörper E sei $T_E := \mathrm{Res}^E_{\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/F)$ sein Einheiten-Torus über $\mathbb{Q}$; dessen rationale Charaktergruppe $X^*_{\mathbb{Q}}(T_E)$ ist der von der Norm $N^E_{\mathbb{Q}} : t \mapsto \prod_{\sigma:F\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}} \sigma(t)$ erzeugte freie $\mathbb{Z}$-Modul, den man als die Diagonale im absoluten Charaktergitter

$$X^*(E^* \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}) \cong \prod_{\sigma:E\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}} X^*_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/\overline{\mathbb{Q}}) \cong \mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E;\overline{\mathbb{Q}})}$$

wiederfindet; vgl. (2.5).

Es sei nun für ein $\gamma \mathrel{\widehat{=}} (n_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E;\overline{\mathbb{Q}})}$ ein algebraischer HECKE-Charakter „auf E" mit diesem ∞-Typ, d.h. ein $\eta \in \mathrm{aHC}(\gamma)$ vorhanden. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von η eine offen-kompakte Untergruppe $U_f \subset T_E(\mathbb{A}_f)$, auf der η_f trivial ist. Da $\eta = (\eta_\infty, \eta_f)$ auf ganz $T_E(\mathbb{Q})$ trivial ist, ist folglich $\gamma_\infty \equiv \eta_\infty^{-1}$ auf der Gruppe $U_f \cap \mathrm{diag}_f(T_E(\mathbb{Q})^+)$ trivial, und letztere ist eine Kongruenzuntergruppe in $T_E(\mathbb{Q}) = E^*$, insbesondere kommensurabel zur Einheitengruppe $\mathcal{O}^*_E$, so daß (wie vorn) die Zusammenhangskomponenten ihrer Zariski-Abschlüsse übereinstimmen.

Der algebraische Charakter γ muß folglich auf der Einskomponente im ZARISKI-Abschluß $\overline{\mathcal{O}^*_E}$ der Einheitengruppe (oder jeder anderen arithmetischen Untergruppe) trivial sein, d.h. er „ist" ein Charakter auf dem SERRE-Torus

$$H_{T_E/\mathbb{Q}} := E^*/\overline{\mathcal{O}^*_E}^{\circ},$$

und diese Charaktere wurden ja im vorigen Abschnitt untersucht!

Für die ∞-Typen γ der algebraischen HECKE-Charaktere von E ist somit folgendes bekannt:

- Sie kommen durch Vorschalten von N_F^E von den Typen δ algebraischer HECKE-Charaktere auf F, dem maximalen Teilkörper vom Typ CM, her!
- Die „Koordinaten“ n_σ eines solchen γ genügen der „Kopplungsbedingung“

  $$\exists w \in \mathbb{Z} : \ \forall \sigma \quad n_\sigma + n_{\mathfrak{c}\sigma} = w$$

  oder umformuliert: $\gamma_\infty \cdot \overline{\gamma_\infty} = (N_{\mathbb{R}}^{F_\infty})^w$ mit der ganzen Zahl $w = \mathrm{wt}(\gamma)$, dem Gewicht von γ oder auch von η. (Das Gewicht des TATE-Charakters $\| \cdot \|_{\mathbb{I}_E}$, dessen ∞-Typ gerade die Norm nach $\mathbb{Q}$ ist, ist also -2!)
- Die ∞-Typen γ algebraischer HECKEcharaktere von E bilden ein $\mathbb{Z}$-Gitter, dessen Rang um 1 größer ist als die Anzahl komplexer Stellen des maximalen Teilkörpers vom Typ CM, F, von E; für nicht-totalimaginäre Zahlkörper kommen nur die Potenzen der Norm als ∞-Typen von algebraischen HECKEcharakteren vor.

(Die arithmetisch subtilen Fragen nach der *Existenz* von algebraischen HECKE-Charakteren zu gegebenem (zulässigem) ∞-Typ auf totalimaginären Körpern sowie nach den Wertekörpern solcher Charaktere werden [hier nicht, aber] z.B. in [Schm] erörtert.)

1.3.3 L-Reihe und EULER-Produkt; die Funktionalgleichung

Es sei $\eta \in \mathrm{aHC}(\gamma)$ ein algebraischer HECKE-Charakter auf dem Zahlkörper E, vom ∞-Typ $\gamma \mathrel{\hat=} (n_\sigma)_\sigma$ und dem Gewicht $w = n_\sigma + n_{\mathfrak{c}\sigma}$. Für ein Primideal $\mathfrak{p} \in \mathbb{V}_{E,f}$ von $\mathcal{O}_E$ soll nun die „lokale Komponente“ $\eta_\mathfrak{p}$ von η untersucht werden. Aufgrund der *Endlichkeit der (engeren) Klassenzahl* existieren ein totalpositives Element $x_{(\mathfrak{p})} \in \mathcal{O}_E \cap E^{*,+}$ und eine positive ganze Zahl $n_\mathfrak{p}$, so dass die $n_\mathfrak{p}$-te Idealpotenz des Ideals $\mathfrak{p}$ gerade das von $x_{(\mathfrak{p})}$ erzeugte Hauptideal ist: $\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}} = (x_{(\mathfrak{p})})$. (Man kann –muß aber für das Folgende nicht– ein solches $n_\mathfrak{p}$ minimal wählen.) Es gilt dann für $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$: $v_\mathfrak{q}(x_{(\mathfrak{p})}) = 0$, d.h. $x_{(\mathfrak{p})}$ ist außerhalb $\mathfrak{p}$ überall lokal eine Einheit, <u>und</u>: zu einem gewählten Uniformisierenden $\pi_\mathfrak{p}$ bei $\mathfrak{p}$ existiert eine Einheit $\varepsilon \in \mathcal{O}_{E_\mathfrak{p}}^*$ mit $x_{(\mathfrak{p})} = \epsilon \cdot \pi_\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}}$.

Da η als algebraischer HECKE-Charakter auf dem Element $x_{(\mathfrak{p})}$ von E^* den Wert 1 annimmt, gilt also

$$1 = \eta(x_{(\mathfrak{p})}) = \eta_\infty\big(\operatorname{diag}_\infty(x_{(\mathfrak{p})})\big) \cdot \eta_f\big(\operatorname{diag}_f(x_{(\mathfrak{p})})\big) = \gamma_\infty^{-1}(x_{(\mathfrak{p})}) \cdot \prod_{\mathfrak{q} \in \mathbb{V}_{E,f}} \eta_\mathfrak{q}(x_{(\mathfrak{p})})$$

und folglich $\gamma_\infty(x_{(\mathfrak{p})}) = \prod_{\mathfrak{q} \in (S_\eta \cup \{\mathfrak{p}\})} \eta_\mathfrak{q}(x_{(\mathfrak{p})})$, wenn S_η die (endliche!) Menge derjenigen endlichen Stellen $\mathfrak{q}$ von E bezeichnet, an denen η *verzweigt* ist, d.h. für die die Einschränkung der lokalen Komponente $\eta_\mathfrak{q}$ auf die lokale Einheitengruppe nichttrivial ist. Nun sind diese lokalen Einheitengruppen ja alle kompakt, die Werte stetiger $\mathbb{C}^*$-wertiger Charaktere auf ihnen also sicherlich vom Absolutbetrage 1, so daß sich ergibt:

$$|\, \gamma_\infty(x_{(\mathfrak{p})}) \,| = |\, \eta_\mathfrak{p}(\pi_\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}}) \,| = |\, \eta_\mathfrak{p}(\pi_\mathfrak{p}) \,|^{n_\mathfrak{p}} \ .$$

Für jedes $x \in \mathcal{O}_E$ ist aber der Absolutbetrag von $\gamma_\infty(x)$ gerade die (positiv-reelle) Quadratwurzel aus dem Wert von $\gamma_\infty \cdot \overline{\gamma_\infty} = (N_\mathbb{Q}^E)^w$ auf x, und die natürliche Zahl(!) $N_\mathbb{Q}^E(x) = \prod_{|\sigma| \in \mathbb{V}_{E,\infty}} |x|_\sigma$ ist ja die Elementanzahl des endlichen Ringes $\mathcal{O}_E/(x)$! –Da nun in der hier studierten Situation gilt $\#\big(\mathcal{O}_E/(x_{(\mathfrak{p})})\big) = \#\big(\mathcal{O}_E/\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}}\big) = \big(\#(\mathcal{O}_E/\mathfrak{p})\big)^{n_\mathfrak{p}} = N(\mathfrak{p})^{n_\mathfrak{p}}$ und da die Wertegruppe $\mathbb{R}^{>0}$ des Charakters $|\eta_\mathfrak{p}|$ divisibel ist, hat man schließlich

$$|\eta_\mathfrak{p}(\pi_\mathfrak{p})| = N(\mathfrak{p})^{\frac{\mathrm{wt}(\eta)}{2}}, \tag{3}$$

wobei es für diese Abschätzung keine Rolle spielt, ob η an $\mathfrak{p}$ verzweigt oder unverzweigt ist. Insbesondere sind für einen algebraischen HECKE-Charakter mit von 0 verschiedenem Gewicht *alle* seine lokalen Komponentencharaktere (an endlichen Stellen) nichttrivial! – Weiterhin folgt mit derselben Rechnung: ist $\underline{i}_\mathfrak{a} \in \mathbb{I}_E$ ein Idel von E, das ein (ganzes oder gebrochenes) Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathcal{O}_E$ „darstellt“ , so hat man $|\eta(\underline{i}_\mathfrak{a})| = N(\mathfrak{a})^{\frac{\mathrm{wt}(\eta)}{2}}$.

Ein η wie oben ist ja trivial auf einer Untergruppe von endlichem Index in der Einheitengruppe, und da Tori die Kongruenzuntergruppen-Eigenschaft haben (wie vorn erwähnt), enthält diese Untergruppe eine Untergruppe der Form $U_\mathfrak{f}^+ := \{x \in \mathcal{O}_E \mid x \gg 0,\ x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}\}$ für ein Ideal $\mathfrak{f} \subset \mathcal{O}_E$. Offenbar existiert ein Ideal $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_\eta$, das maximal ist unter denjenigen mit der Eigenschaft $\eta|_{U_\mathfrak{f}^+} \equiv 1$, man nennt dieses den *Führer*[5] von η. –Ist $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_E$ ein zu $\mathfrak{f}_\eta$ *teilerfremdes* Ideal $\big((\mathfrak{a},\mathfrak{f}) = 1\big)$, so nimmt η auf *jedem* E-Idel $\underline{i}_\mathfrak{a}$, das das Ideal $\mathfrak{a}$ „darstellt“ , denselben Wert an, den man deshalb als $\eta(\mathfrak{a})$ bezeichnen darf.

Man definiert nun die HECKE-*L-Reihe* zum algebraischen HECKEcharakter η auf E durch die DIRICHLET-Reihe

$$L(\eta, s) = L_E(\eta, s) := \sum_{\substack{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_E \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{f})=1}} \frac{\eta(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}, \tag{4}$$

falls die Summation für die komplexe Zahl s konvergiert.

Im Spezialfalle $\eta \equiv \mathbf{1}$ des trivialen Charakters ist $L_E(\mathbf{1}, s) = \zeta_E(s)$ die DEDEKIND-Zetafunktion des Zahlkörpers E (und für $E = \mathbb{Q}$ ergibt sich die RIEMANN-Zetafunktion $L_\mathbb{Q}(\mathbf{1}, s) = \zeta(s)$, die „Mutter aller L-Reihen“). In diesem Falle ist wohlbekannt, daß (absolute!) Konvergenz genau für $\mathrm{Re}(s) > 1$ vorliegt (und daß sich bei $s = 1$ tatsächlich ein [einfacher] Pol der Funktion befindet; sein Residuum ist wohlbekannt ...).

Die Abschätzung (3) und Vergleich mit der RIEMANN-Zetafunktion zeigen, daß die Reihe (4) für $L_E(\eta, s)$ genau für $\mathrm{Re}(s) > 1 + \frac{\mathrm{wt}(\eta)}{2}$ *absolut* (und normal) konvergiert; in dieser rechten Halbebene wird die Funktion dann auch durch das EULER-Produkt

$$L(\eta, s) = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Specmax}(\mathcal{O}_E) \\ (\mathfrak{p},\mathfrak{f})=1}} \frac{1}{1 - \eta_\mathfrak{p}(\pi_\mathfrak{p}) \cdot N(\mathfrak{p})^{-s}}$$

dargestellt; hieraus folgt bekanntlich auch das Nichtverschwindens-Resultat

$$L(\eta, s) \neq 0 \text{ für } \mathrm{Re}(s) > 1 + \frac{w}{2}.$$

Offensichtlich gilt für einen algebraischen HECKE-Charakter η auf E und ein $w \in \mathbb{Z}$:

$$L_E(\eta \cdot \|\cdot\|_{\mathbb{I}_E}^w, s) = L_E(\eta, s + w).$$

[5] Diese potentiell historisch anrüchige Bezeichnung findet sich –in etwas anderem Kontext– wohl schon 1923 bei dem jeglicher NS-Sympathien unverdächtigen EMIL ARTIN.

Die HECKE-L-Reihen zu Potenzen der TATE-Charaktere erweisen sich also als Translationen Dedekindscher Zetafunktionen, und ihr Pol- und Residuenverhalten ist damit wohlbekannt!

In allen anderen Fällen $\big($d.h. $\eta \notin (N_{\mathbb{Q}}^E)^{\mathbb{Z}}\big)$kann η nicht auf ganz $\mathcal{O}_E^*$ trivial sein –η ist *verzweigt*–, und es folgt, daß die Reihe für $L(\eta, s)$ noch bis zu $\mathrm{Re}(s) > \frac{w}{2}$ *bedingt* konvergiert und daß die Funktion im „Polverdachtspunkt“ $1 + \frac{w}{2}$ (holomorph und) von 0 verschieden ist (vgl. z.B. [We73, Thm. VII.5.2, Thm. XIII.12.11]; für den totalreellen Fall –also DIRICHLET-Charakter (mod $\mathfrak{a}$)$\cdot$Norm– durch Betrachtung des Produkts der L-Reihen zu allen Charakteren (mod $\mathfrak{a}$), in den anderen Fällen mit dem HADAMARD–MERTENS-Vorgehen).

Die üblichen Methoden (z.B. die Interpretation von $L(\eta, s)$ als TATE-Zeta-Integral der charakteristischen Funktion von $\widehat{\mathcal{O}_E}$ gegen den Quasicharakter $\eta \cdot \| \cdot \|_{\mathbb{I}_E}^s$, vgl. 3.6) zeigen, daß $L(\eta, \cdot)$ eine meromorphe Fortsetzung auf die ganze komplexe Ebene gestattet und daß die *vervollständigte* HECKE-L-*Funktion zu* η,

$$\Lambda(\eta, s) := L(\eta, s) \cdot L_\infty(\gamma, s),$$

an die L-Funktion zum konjugierten Charakter mittels einer Funktionalgleichung der Form

$$\Lambda(\eta, s) = A_\eta(s) \cdot \Lambda(\overline{\eta}, w + 1 - s) \tag{5}$$

gekoppelt ist, wobei der Faktor $A_\eta(s)$ analytisch wie arithmetisch einigermaßen harmlos ist: mit einer komplexen Zahl $W(\eta)$ vom Absolutbetrage 1 und mit der (absoluten) Diskriminante $\mathfrak{d}_E$ des Zahlkörpers E hat man

$$A_\eta(s) = W(\eta) \cdot \big(\,|\mathfrak{d}_E|\, \cdot N(\mathfrak{f}_\eta)\big)^{\frac{1}{2} - s}.$$

Da ja $\eta^{-1} = \overline{\eta} \cdot (N_{\mathbb{Q}}^E)^{-w}$ gilt, kann die Funktionalgleichung (5) auch in der äquivalenten Form

$$\Lambda(\eta, s) = A_\eta(s) \cdot \Lambda(\eta^{-1}, 1 - s)$$

erhalten werden.

1.3.4 Kritische Stellen und Werte; Reduktion auf Werte an rechtskritischen Argumenten

Ein algebraischer HECKE-Charakter $\eta \in \mathrm{aHC}_E(\gamma)$ vom ∞-Typ $\gamma \mathrel{\widehat{=}} (n_\sigma)_\sigma$ hat offenbar dasselbe Gewicht $w = \mathrm{wt}(\eta) = n_\sigma + n_{\mathsf{c}\sigma} = \mathrm{wt}(\overline{\eta})$ wie sein konjugierter Charakter $\overline{\eta} \in \mathrm{aHC}_E(\overline{\gamma})$, $\overline{\gamma} \mathrel{\widehat{=}} (n_{\mathsf{c}\sigma})_\sigma$, und die L-Funktionen zu η und $\overline{\eta}$ haben denselben Bereich (absoluter) Konvergenz; als den *zentralen Punkt* bezeichnet man das „Zentrum der Funktionalgleichung“ $\frac{1+w}{2}$. Die kritischen Stellen von η –worunter natürlich die kritischen Stellen des ∞-Typs γ im Sinne von Abschnitt 1.2.4 verstanden werden– sind dieselben wie die von $\overline{\eta}$, und sie liegen symmetrisch um den zentralen Punkt $\frac{w+1}{2}$!

Unter der Spiegelung um diesen Punkt $s \mapsto w+1-s$ gehen nun *linkskritische* Stellen $s_0 (\in \mathbb{Z})$ von η, d.h. solche außerhalb des Konvergenzbereichs der DIRICHLET-Reihe ($s_0 \leq \frac{w}{2}$), in striktrechtskritische (d.h. im Bereich *absoluter* Konvergenz, $> 1 + \frac{w}{2}$) von $\overline{\eta}$ über. –Im

Bereich *bedingter* Konvergenz[6], $\frac{w}{2} < \mathrm{Re}(s) \leq 1 + \frac{w}{2}$, liegt genau ein ganzzahliger Punkt, nämlich der zentrale Punkt $\frac{w+1}{2}$ für ungerades bzw. der „Polverdachtspunkt" $1 + \frac{w}{2}$ für gerades w; hier kann die Konvergenz nicht durch Übergang zur gespiegelten kritischen Stelle „verbessert" werden, was aber auch gar nicht nötig ist: die Endlichkeit –und für gerades Gewicht sogar das Nichtverschwinden– des L-Wertes hier sind wohlbekannt, s.o.!

Hat man also die Faktoren der Funktionalgleichung unter Kontrolle, so kann man sich für das Studium der *kritischen Werte* von L-Funktionen (der Werte in den kritischen Stellen) auf das Studium der rechtskritischen Werte, allerdings evtl. zum konjugierten Charakter, beschränken, die also durch konvergente, „meistens" sogar absolut konvergente DIRICHLET-Reihen gegeben sind. Das oben schon genannte Verschiebungs-Argument zeigt dann noch, daß man sich auf die Untersuchung der Werte in 0 *aller* HECKE-L-Reihen beschränken darf: statt des Wertes $L(\eta, s_0)$ in dem für η konvergent-kritischen Punkte s_0 betrachtet man dieselbe Zahl als den Wert $L(\eta \cdot (N_{\mathbb{Q}}^{E})^{-s_0}, 0)$ im Punkt 0, der für den algebraischen HECKE-Charakter $\eta \cdot \| \cdot \|_{\mathbb{I}_E}^{s_0}$ (vom Gewicht $\mathrm{wt}(\eta) - 2 \cdot s_0$) konvergent-kritisch ist!

–Daß 0 eine *rechts*kritische Stelle für einen algebraischen HECKE-Charakter η ist, besagt für das Gewicht $w = \mathrm{wt}(\eta)$: $\frac{w+1}{2} \leq 0$, d.h. $w \leq -1$, und daraus folgt mit der Abschätzung (3):

$$\forall \mathfrak{p} : |\, \eta_{\mathfrak{p}}(\pi_{\mathfrak{p}}) \,| = N(\mathfrak{p})^{\frac{\mathrm{wt}(\eta)}{2}} < 1,$$

insbesondere sind *alle* lokalen Komponenten $\eta_{\mathfrak{v}}$ von η nichttrivial, und es folgt auch die absolute Konvergenz der lokalen Zeta-Integrale $\zeta_{\mathfrak{p}}(\eta_{\mathfrak{p}}, \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}}, s = 0) \overset{!}{=} \big(1 - \eta_{\mathfrak{p}}(\pi_{\mathfrak{p}})\big)^{-1}$, vgl. (3.1).

Ferner ist genau für $w \leq -3$ ($\Longleftrightarrow 0 > 1 + \frac{w}{2}$) der kritische Wert $L(\eta, s = 0)$ durch eine *absolut konvergente* DIRICHLET-Reihe gegeben.

1.4 Zur Rationalität kritischer Werte von HECKE-L-Reihen

1.4.1 Die Vermutung von DELIGNE

Bis hierher wurden algebraische HECKE-Charaktere von einem für arithmetische Anwendungen (fast) zu groben Standpunkt betrachtet; dies muß nun etwas verfeinert werden.

Sei wieder E ein Zahlkörper, $T_E := \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^{F}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/E)$ seine multiplikative Gruppe als $\mathbb{Q}$-Torus und $H_{T_E} := T_E/\overline{\mathcal{O}_E^*}^{\circ}$ der zugehörige SERRE-Torus. Ein (geometrischer) Charakter $\gamma : T_E \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}/\overline{\mathbb{Q}}$ ist immer schon die Erweiterung „$\gamma = \kappa \circ \gamma_K$" eines Homomorphismus' $\gamma_K : T_E \times_{\mathbb{Q}} K \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}/K$ von K-Tori mittels einer Einbettung $\kappa : K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$, und für arithmetische Zwecke muß dies eigentlich im "array" $(\gamma_\kappa := \kappa \circ \gamma_K)_{\kappa \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{Alg}}(K, \overline{\mathbb{Q}})}$ der konjugierten Charaktere betrachtet werden. –Nach der Adjunktionseigenschaft der Restriktion der Skalare ist obiges γ_K dasselbe wie ein Homomorphismus von $\mathbb{Q}$-Tori $\tilde{\gamma} : T_E/\mathbb{Q} \to T_K/\mathbb{Q}$, und dessen Basiswechsel nach $\overline{\mathbb{Q}}$ „ist" eine mit den Einbettungen $\sigma : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ und $\kappa : K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ indizierte Kollektion von Homomorphismen $\gamma_{\sigma,\kappa} : \mathbb{G}_{\mathrm{m}}/\overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}/\overline{\mathbb{Q}}$, die wegen der kanonischen Identifikation von $\mathrm{End}_{k-\mathrm{Alg.Gr.}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}/k)$ mit $\mathbb{Z}$ (für jeden Körper

[6] d.h. Konvergenz, aber nicht Absolutkonvergenz, wie es für Reihen zu klassischen DIRICHLET-Charakteren im Bereich $0 < \mathrm{Re}(s) \leq 1$ der Fall ist

k) auch als eine „Matrix“ $(n_{\sigma,\kappa})_{\sigma,\kappa} \in \mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{Alg}}(E,\overline{\mathbb{Q}})\times\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{Alg}}(K,\overline{\mathbb{Q}})}$ angesehen werden kann und soll; dieser Standpunkt wird –DELIGNE folgend– z.B. in [Schap, Kap. 0] eingenommen und ausgeführt.

Ist nun η ein algebraischer HECKE-Charakter auf dem Zahlkörper E und $\gamma \in X^*(H_{T_E}) \subset X^*(T_E)$ sein ∞-Typ, so ist der (minimale) „Wertekörper“ K von γ also ein Zahlkörper; die in der Existenz des Gewichtes

$$\forall \sigma, \kappa : \; n_{\sigma,\kappa} + n_{c\sigma,\kappa} = w = \mathrm{wt}(\eta)$$

codierte Homogenitätseigenschaft von η bewirkt, daß K entweder $\mathbb{Q}$ oder ein CM-Körper ist.

Zu η gehört in dieser Betrachtung also ein Gruppenhomomorphismus $\eta_{\mathbb{A}} : \mathbb{I}_E \to K^*$ mit *offenem* Kern, dessen Einschränkung auf $\mathrm{diag}_{\mathbb{A}}(E^*) \subset \mathbb{I}_E$ mit (den $\mathbb{Q}$-rationalen Punkten von) $\gamma : E^* = T_E(\mathbb{Q}) \to T_K(\mathbb{Q}) = K^*$ übereinstimmt und der auf einem Idel $\underline{i}_{\mathfrak{a}}$, welches ein Ideal $\mathfrak{a} \subset E$ „darstellt“, als Wert gerade $\eta_{\mathbb{A}}(\underline{i}_{\mathfrak{a}}) = \eta(\mathfrak{a})$ annimmt.

Es entsteht für jede Einbettung $\kappa : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ ein (stetiger) komplexwertiger Charakter $\kappa \circ \eta$ auf den Idelen von E, dem folglich eine L-Funktion $L(\kappa \circ \eta, s)$ (wie vorn) zugeordnet ist; unter der Gesamt-L-Funktion von η wird man dann den “array”/Vektor $L^*(\eta, s) := \big(L(\kappa \circ \eta, s)\big)_{\kappa \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{Alg}}(K,\mathbb{C})}$ von Funktionen „auf $\mathbb{C}$“ verstehen, der also Werte in $\mathbb{C}^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{Alg}}(K,\mathbb{C})} = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ annimmt.

Ist nun 0 eine kritische Stelle des betreffenden algebraischen HECKE-Charakters η auf E (was ja wegen der Möglichkeit des Verschränkens mit Potenzen der Norm genausogut der allgemeine Fall einer kritischen Stelle ist!) und ist κ eine Einbettung des Wertekörpers K nach $\mathbb{C}$, so ordnet DELIGNE in [DeVP] dem „über $\mathbb{Q}$ definierten kritischen Motiv $M(\eta)$“ zu η zwei sogenannte *Perioden* $c^{\pm}(\eta, \kappa) \in \mathbb{C}$ zu; genauer gesagt gehört zu η die Perioden-arrays $c^{\pm}(\eta) \in \big(\mathbb{C}^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{Alg}}(K,\mathbb{C})}\big)^* = (K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^*$.

Diese Perioden-„Zahlen“ sind definiert als Determinanten von Vergleichsisomorphismen- zwischen den BETTI- und DE RHAM-Realisierungen der genannten Motive; in den klassischsten Fällen kommen sie –für E totalimaginär– von den Volumina von Basen der ganzzahligen Homologie Abelscher Mannigfaltigkeiten, also von klassischen Periodenintegralen her, für totalreelle E handelt es sich um Potenzen von $2\pi i$. (Man scheint zu erwarten, daß es sich im allgemeinen um transzendente Zahlen, allerdings von der zugänglichsten Sorte, handelt.)

Nach Konstruktion hängen diese Zahlen von der Wahl von K-Basen in den genannten Realisierungen ab – aber nur bis auf Faktoren in $K^* = (K \otimes 1)^*$, anders gesagt: die „Zahlen“ $c^{\pm}(\eta)$, als Elemente des Quotienten $(K \otimes \mathbb{C})^*/(K \otimes 1)^*$ aufgefaßt, sind Invarianten der K-Struktur des Motivs $M(\eta)$.

DELIGNE spricht nun in [DeVP, §8] als Spezialfall der Vermutung 2.8 seiner Arbeit die **Rationalitäts-Vermutung**

$$\frac{L^*(\eta, s = 0)}{c^+(\eta)} \overset{!}{\in} (K \otimes 1) \subset K \otimes \mathbb{C} \tag{6}$$

aus. (Falls nicht gerade 0 der zentrale Punkt ist –also $w \neq -1$–, sollte diese Zahl sogar in $K^*(\otimes 1)$ liegen!)

(Diese Vermutung verallgemeinert –wie am Anfang der Einleitung angesprochen– viele klassische Resultate.)

1.4.2 Die Ergebnisse von Blasius und von Harder-Schappacher

Für CM-Körper E wurde zunächst von Shimura gezeigt, daß Quotienten von gewissen L-Werten nach den Werten gewisser Perioden-Integrale *algebraische* Zahlen sind; dies (und Siegels Resultate!) diente Deligne als Ausgangspunkt für die Formulierung seiner Vermutung. Aufbauend auf Shimuras Arbeiten konnte Blasius in [Bl86] zeigen, daß über CM-Körpern die Rationalitätsvermutung für beliebige kritische Hecke-L-Werte richtig ist; die hauptsächliche Methode hierzu ist „arithmetische algebraische Geometrie“ , genauer: ein q-Entwicklungs-Prinzip für Hilbertsche Modulformen – und ersichtlicherweise kann der allgemeine Fall hiermit nicht angegangen werden.

Auch die „klassischen“ Beweise des Satzes von Siegel-Klingen bedienen sich algebro-geometrischer/ „holomorpher“ Methoden: der zu untersuchende Wert ist der konstante Term der Einschränkung auf $GL_2(\mathbb{Q})$ einer Eisenstein-Reihe auf der GL_2 über dem zu untersuchenden totalreellen Körper, deren sämtliche weitere q-Entwicklungs-Koeffizienten bereits im vorhergesagten Körper liegen; dann wird eine geeignete lineare Relation mit *rationalen* Vorfaktoren zwischen diesen Koeffizienten etabliert. –In Arbeiten von Nori, Sczech, Levin, Kings wurde in jüngerer Zeit ein „kohomologischer“ Zugang vorgeschlagen, der aber im Umkreis des Verfassers bisher nicht hinreichend verstanden wurde.

In der Arbeit [HaSc] erarbeiteten Harder und Schappacher nun, wie unter Benutzung von Blasius’ Ergebnissen die Vermutung für beliebige totalimaginäre Körper bewiesen werden kann:

Es sei E ein totalimaginärer Zahlkörper; wie in Abschnitt 1.2.1 seien E_0 sein maximaler totalreeller Teilkörper und $F \supset E_0$ sein maximaler Teilkörper vom Typ CM. Es sei η ein algebraischer Hecke-Charakter auf E und $\gamma \in X^*(H_{T_E})$ dessen ∞-Typ; es kommt also γ mittels der relativen Norm von einem Charakter δ auf H_{T_F} her ($\gamma = \delta \circ N_F^E$), und es existieren ein Dirichlet-Charakter χ auf E und ein algebraischer Hecke-Charakter ψ auf F vom ∞-Typ δ mit

$$\eta = \chi \cdot (\psi \circ N_F^E); \tag{7}$$

(Es sind ψ und χ aus η nicht eindeutig bestimmt: ein beliebiger Dirichlet-Charakter auf F kann –auf Kosten des Zurückziehens mittels der Norm auf E, das einen Dirichlet-Charakter auf E ergibt– von ψ nach χ verschoben werden.)

Existiert nun eine kritische Stelle s_0 für η, so muß –wie am Ende von Abschnitt 1.2.4 beobachtet– F ein (echter) CM-Körper sein, und s_0 ist auch für ψ kritisch. Wird mit $\omega := \chi\big|_{\mathbb{I}_F}$ der durch Einschränkung von χ auf den Unterkörper F entstehende Dirichlet-Charakter auf F bezeichnet, dann hat man

$$\varphi := \eta\big|_{\mathbb{I}_F} = \omega \cdot \psi^{[E:F]}, \tag{8}$$

und dieses φ ist ein algebraischer Hecke-Charakter auf F vom Gewicht $[E : F] \cdot \mathrm{wt}(\eta)$, für den $[E : F] \cdot s_0$ eine kritische Stelle ist.

Wird (praktischer- und legitimerweise – siehe vorn) angenommen, daß die kritische Stelle $s_0 = 0$ betrachtet wird, so sind also die kritischen Werte $L_E^*(\chi \cdot (\psi \circ N_F^E), s = 0)$ und $L_F^*(\omega \cdot \psi^{[E:F]}, s = 0)$ zu studieren. Es wird nun eingehend untersucht, wie sich die Perioden zweier (kritischer) Charaktere unterscheiden, die auseinander durch Multiplikation mit Potenzen der Norm bzw. mit DIRICHLET-Charakteren hervorgehen (Ergänzungen und Präzisierungen finden sich in [Schap]), und schließlich wird ein Element $\Delta(E/F, \gamma) \in (K \otimes \mathbb{C})^*$ definiert, für das dann gezeigt werden kann:

$$\Delta(E/F, \gamma) = \frac{c_E^+\big(\chi \cdot (\psi \circ N_F^E)\big)}{c_F^+\big(\omega \cdot \psi^{[E:F]}\big)}. \tag{9}$$

Dann wird erklärt, daß gilt:

Gilt die Rationalitätsvermutung (6) für den algebraischen HECKE-Charakter η auf F und hat man

$$\frac{L_E^*(\chi \cdot (\psi \circ N_F^E), 0)}{L_F^*(\omega \cdot \psi^{[E:F]}, 0)} \cdot \Delta(E/F, \gamma) \in K \otimes 1 (\subset K \otimes \mathbb{C}), \tag{10}$$

so ist die Rationalitätsvermutung auch für $\eta = \chi \cdot (\psi \circ N_F^E)$ (auf E) richtig, d.h.:

$$\frac{L_E^*(\eta, 0)}{c^+(\eta)} \in K \otimes 1! \tag{11}$$

Der Beweis der Rationalitätsvermutung für rechtskritische HECKE-L-Werte im allgemeinen Fall ist somit also auf den Beweis der Rationalitätseigenschaft (10) von gewissen Verhältnissen solcher Werte zurückgeführt, und es scheint den Spezialisten klar zu sein, daß hieraus die Richtigkeit der Vermutung für *alle* kritischen Werte folgt; die notwendige arithmetische Analyse der Vergleichsfaktoren soll hier nicht ausgeführt werden.

1.4.3 Das Theorem von HARDER

HARDER erzielte nun folgendes Resultat:

Theorem 1 *Ist F ein beliebiger totalimaginärer Zahlkörper, E ein Erweiterungskörper von F vom Grade $[E : F] =: n \geq 2$, ψ ein algebraischer* HECKE-*Charakter auf F, für den 0 eine* rechts*kritische Stelle ist (also $\mathrm{wt}(\psi) < 0$), χ ein* DIRICHLET*charakter auf E, so daß folglich 0 eine rechtskritische Stelle des algebraischen* HECKE*charakters $\eta := \chi \cdot (\psi \circ N_F^E)$ auf E ist, und bezeichnet K den gemeinsamen (minimalen) Wertekörper von η und von $\varphi := \omega \cdot \psi^n$ (mit dem* DIRICHLET-*Charakter $\omega := \chi\big|_{\mathbb{I}_F}$ auf F), dann existiert ein (nur von der Zahlkörper-Erweiterung $E : F$ und vom CM-Typ $\mathcal{T}_\gamma$ des ∞-Typs γ von η abhängendes) Element $\Delta(E/F, \gamma) \in (K \otimes \mathbb{C})^*$, so daß gilt*

$$\frac{L_E^*(\eta, 0)}{L_F^*(\varphi, 0)} \cdot \Delta(E/F, \gamma) \in (K \otimes 1)! \tag{12}$$

Bemerkung: Der Quotient von L-Werten ist „erlaubt“ (was man natürlich schon früher hätte bemerken sollen): das Gewicht des Charakters „unten “ ist $= [E : F] \cdot \mathrm{wt}(\psi) \leq -2$, da $[E : F] \geq 2$ (weil sonst das

Problem nach Blasius erledigt ist) und $\mathrm{wt}(\psi) < 0$ (denn 0 soll *rechts*kritisch sein). [Hierbei kann das Gewicht -2 nur für $\mathrm{wt}(\psi) = -1$ und $n = 2$ auftreten.] –Der L-Wert „unten" ist also von 0 verschieden und außer im vorgenannten Sonderfall sogar durch eine absolut konvergierende Reihe gegeben.

Auf eine Diskussion der Beweismethode von Harder und eine Einordnung des Inhalts dieser Arbeit in diesen Beweisgang wird hier verzichtet, da dies schon in der Einleitung erfolgte.

2 Präliminarien zur Gruppe GL_n über Körpern

2.1 Standardparabolische Untergruppen

Sei F ein beliebiger Körper und V ein F-Vektorraum der (endlichen) Dimension n, und es sei $n \geq 2$. Die Wahl einer durchnumerierten Basis $\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_n\}$ (d.h. eines Isomorphismus von F-Vektorräumen $V \cong F^n$) liefert eine Identifikation der algebraischen Gruppe $G_0/F := GL_F(V)$ mit GL_n/F sowie hierin eine Auswahl des spaltenden maximalen Torus T_0 der (invertierbaren) Diagonalmatrizen und der Borel-Untergruppe $B_0 \supset T_0$ der oberen Dreiecksmatrizen; es ist $T_0 = \bigcap_{i=1,\dots,n} \mathrm{Stab}_{G_0} < e_i >$ und $B_0 = \mathrm{Stab}_{G_0}\big(\mathcal{F}_{st}\big)$, wobei

$$\mathcal{F}_{st} := \Big((0) \subset < e_1 > \subset < e_1, e_2 > \subset \dots \subset < e_1, \dots, e_n > = V\Big)$$

die vollständige Standard-Fahne in V ist.

Es bezeichne $Z_0 = Z(G_0)$ das Zentrum von G_0. Es besteht bekanntlich aus den Homothetien $\{\alpha \cdot \mathrm{id}_V \bigm| \alpha \in \mathbb{G}_m\}$ von V bzw. im Matrizenbild aus den invertierbaren Skalarmatrizen $\{z \cdot \mathbb{1}_n \bigm| z \in F^*\}$ und wird im folgenden oft mit $\mathbb{G}_m$ identifiziert; sicherlich ist Z_0 in jedem maximalen Torus, also insbesondere in T_0 und damit in B_0 enthalten.

Untergruppen $R_0/F \subset G_0$, die B_0 enthalten, heißen *Standardparabolische*; sie sind Stabilisatoren von Teilfiltrationen von $\mathcal{F}_{st}$, und die Quotienten G_0/R_0 sind *projektive* Varietäten. Die maximalen Standardparabolischen $P_{[i],0}$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ sind die Stabilisatoren „einschrittiger“ Filtrationen $\mathcal{F}_{st}^{(i)} := \Big((0) \subset < e_1, \dots, e_i > \subset V\Big)$. Das unipotente Radikal einer solchen maximalen Standardparabolischen $P_{[i],0}$ ist also

$$U_{P_{[i],0}} = \mathrm{Hom}_F(< e_{i+1}, \dots, e_n >, < e_1, \dots, e_i >) \cong M_{i \times (n-i)}(F),$$

insbesondere abelsch; die Standard-Levi-Untergruppe $M_{P_{[i],0}} \subset P_{[i],0}$ ist eine mittels Block-Diagonalmatrizen eingebettete[7] Kopie von $GL_i \times GL_{n-i}$, und $P_{[i],0} = M_{P_{[i],0}} \ltimes_\varphi U_{P_{[i],0}}$ (semidirektes Produkt), wobei

$$\begin{array}{rcl} \varphi : GL_i \times GL_{n-i} \cong M_{P_{[i],0}} & \to & \mathrm{Aut}_{F-\text{alg. Gr.}}(U_{P_{[i],0}}) \\ (a, b) & \mapsto & \Big(m \ \big(\in M_{i \times n-i}(F) \cong U_{P_{[i],0}}\big) \mapsto a \cdot m \cdot b^{-1}\Big). \end{array}$$

Von nun an werde bezeichnet

$$\begin{array}{rcl} P_0 := P_{[1],0} & = & \mathrm{Stab}_{G_0} < e_1 > \ \text{und} \\ Q_0 := P_{[n-1],0} & = & \mathrm{Stab}_{G_0} < \{e_1, \dots, e_{n-1}\} >; \end{array}$$

in symbolischer Matrizenform also:

$$P_0 = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \ast & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q_0 = \begin{pmatrix} * & & & \\ \vdots & & \ast & \\ * & & & \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}.$$

[7] Die Einbettung ist durch die Wahl von $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{F}_{st}$ „diktiert“ , aber *nicht* kanonisch!

(Das unipotente Radikal U_{P_0} ist also $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^{n-1}$, hier als Vektorraum der Zeilenvektoren der Länge $n-1$ aufgefaßt.)

[In darstellungstheoretischer Sicht (vgl. den späteren Abschnitt 2.3) ist die Vektorraum-Varietät $U_{P_{[i],0}}$ die Darstellung $\mathrm{st}_i \otimes \mathrm{st}_{n-i}^{\vee}$ der Gruppe $GL_i \times GL_{n-i}$, wenn mit st_j immer die Standarddarstellung der Gruppe GL_j/F auf $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^j$ bezeichnet wird. –Die offensichtlich isomorphen LEVI-Untergruppen $M_{P_{[i],0}}$ und $M_{P_{[n-i],0}}$ sind konjugiert in GL_n (unter geeigneten Permutationsmatrizen), und daher sind die parabolischen Untergruppen $P_{[i],0}$ und $P_{[i],0}$ *assoziiert*, aber diese Parabolischen sind wegen obiger Beschreibung der LEVI-Wirkung auf dem unipotenten Radikal *konjugiert* genau dann, wenn $i = n-i$ ist – aber dann sind sie sogar *gleich!*. –Die oben herausgehobenen Parabolischen P_0 und Q_0 sind also immer assoziiert, aber entweder gleich (für $n=2$) oder nicht einmal konjugiert in GL_n (wenn nämlich $n \geq 3$).]

Für einen F-Vektorraum W sei $\mathbb{P}(W)$ der „Raum“ aller Homothetieklassen von nichttrivialen (also *surjektiven*!) Linearformen $W \twoheadrightarrow F$, d.h. das F-Schema $\operatorname{Proj}\big(\operatorname{Sym}^*(W^\vee)\big)$. Der Quotient G_0/P_0 ist dann der Raum $\mathbb{P}(V^\vee)$ aller eindimensionalen Unterräume in V, der mittels der o.g. Basiswahl zu $\mathbb{P}^{n-1} = \{[x_1 : \ldots : x_n] \mid \text{nicht alle } x_i = 0\}$, dem Raum der Homothetieklassen von Zeilenvektoren der Länge n, isomorph wird. Die „Antioperation“ von GL_n auf $\mathbb{P}^{n-1}$ durch Multiplikation der Klasse des Vektors $(1,0,\ldots,0)$ von rechts mit der Inversen der transponierten Matrix liefert also einen Isomorphismus des *Links*nebenklassenraumes $P_0\backslash G_0$ mit $\mathbb{P}^{n-1}/F$. Ein Punkt $[\underbrace{0:\ldots:0}_{n-(k+1)} : 1 : \underbrace{x_1 : \ldots : x_k}_{k}]$ von $\mathbb{P}^{n-1}(F)$ entspricht hierbei der P_0-Linksnebenklasse der Matrix

$$m_k^{(n)}(\mathbf{x}) = \left(\begin{array}{ccccc|c}
 & & & & 1 & \\
 & 0 & & 1 & & \\
 & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \mathbf{0}_{(n-k)\times k} \\
 & 1 & & 0 & & \\
\varepsilon_{(n,k)} & & & & & \\
\hline
 & & & & -x_1 & \\
 & & \mathbf{0}_{k\times(n-k-1)} & & \vdots & \mathbb{1}_k \\
 & & & & -x_k &
\end{array}\right),$$

wobei $\mathbf{x} = {}^t(x_1,\ldots,x_k) \in F^k$ und $\varepsilon_{(n,k)} := (-1)^{\binom{n-k}{2}}$. Es besteht die Relation

$$m_k^{(n)}(\mathbf{x}) = m_{n-1}^{(n)}(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-k-1},\mathbf{x}) \cdot m_k^{(n)}(\mathbf{0}), \tag{13}$$

wobei die Matrizen $m_{n-1}^{(n)}(\mathbf{y})$ für $\mathbf{y} \in F^{n-1}$ die folgende etwas übersichtlichere Gestalt haben:

$$m_{n-1}^{(n)}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ -y_1 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \\ -y_{n-1} & 0 & & 1 \end{pmatrix};$$

insbesondere sieht man sofort $m_{n-1}^{(n)}(\mathbf{y})^{-1} = m_{n-1}^{(n)}(-\mathbf{y})$. –Bei den Matrizen $m_k^{(n)}(\mathbf{0})$ handelt es sich um Permutationsmatrizen, die in Abschnitt 2.2 noch angesprochen werden.

Neben dieser maximalparabolischen Untergruppe P_0, die als Stabilisator einer Geraden (nämlich derjenigen durch den ersten Basisvektor e_1) auftrat, soll nun noch der *Punktstabilisator* dieses Vektors betrachtet werden: es sei $P_0^1 := \mathrm{Stab}_{G_0}(\{e_1\})$. Es gilt dann offenbar

$$P_0^1 = \{\begin{pmatrix} 1 & \underline{u} \\ 0 & \underline{m} \end{pmatrix}\} \subset P_0 = \{\begin{pmatrix} a & \underline{u} \\ 0 & \underline{m} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}},\ \underline{u} \in \mathbb{G}_{\mathrm{a}}^{n-1},\ \underline{m} \in GL_{n-1}\},$$

in der Terminologie des folgenden Abschnitts 2.2 ist $P_0^1 = \ker\big(P_0 \xrightarrow{\omega_1} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}\big)$. –Mit dem Zentrum Z_0 von G_0 gilt dann offensichtlich $P_0 = Z_0 \times P_0^1$ (direktes Produkt von Untergruppen!) mittels $\begin{pmatrix} a & \underline{u} \\ 0 & \underline{m} \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \big(a \cdot \mathbb{1}_n, \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \cdot \underline{u} \\ 0 & a^{-1} \cdot \underline{m} \end{pmatrix}\big)$.

Die Quotientenvarietät G_0/P_0^1 (oder auch $P_0^1\backslash G_0$) identifiziert sich natürlich mit dem vollen Orbit eines Vektors unter der gesamten Allgemeinen Linearen Gruppe, also mit der quasiaffinen Varietät $V \setminus \{0\}$; mit obigen Bemerkungen ergibt sich auch die wohlbekannte Identifikation $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$.

2.2 Wurzeln und Weylgruppe

Bekanntlich ist $SL_F(V) \cong SL_n(F)$ die Kommutatoruntergruppe ${G_0}^{(1)}$ von $G_0 = GL_F(V)$; für beliebige (über F definierte) algebraische Untergruppen $H_0 \subseteq G_0$ wird hier der Durchschnitt $H_0 \cap G^{(1)}$ mit ${H_0}^{(1)}$ bezeichnet, so daß rationale Punkte (über irgendwas) von ${H_0}^{(1)}$ also rationale Punkte von H_0 mit Determinante 1 sind.
Beachte, daß ${P_0}^{(1)}\backslash {G_0}^{(1)} \cong P_0\backslash G_0 \cong \mathbb{P}^{n-1}/_F$ und daß die eben definierten Matrizen $m_k^{(n)}(\mathbf{x})$ für beliebige $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ und $\mathbf{x} \in F^k$ in $SL_n(F) = {G_0}^{(1)}(F)$ liegen.

Der Charaktermodul von T_0, $X^*(T_0) := \mathrm{Hom}_{F-\mathrm{alg.Gr.}}(T_0, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$, ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang n; eine beliebte Basis bilden die „Koordinatenfunktionen" t_i (für $i = 1, \ldots, n$), präziser gesagt

$$t_i : \underline{t} = T_0 \ni \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) \mapsto t_i \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}.$$

Eine weitere prominente Basis besteht aus den Charakteren

$$\omega_j := \prod_{i=1}^{j} t_i$$

für $1 \leq j \leq n$; also insbesondere $\omega_1 = t_1$ und $\omega_n = t_1 \cdot \ldots \cdot t_n = \det\big|_{T_0}$. –Manchmal wird aus formalen Gründen ω_0 als (mit dieser Definition konsistente) Bezeichnung des trivialen Charakters benutzt.
Ab jetzt wird die Verknüpfung in $X^*(T_0)$ mißbräuchlicherweise additiv notiert werden, z.B. $\omega_n = \sum_i t_i$!

Das *Wurzelgitter* der halbeinfachen Gruppe ${G_0}^{(1)}$ bzgl. der BOREL-untergruppe ${B_0}^{(1)}$ und des maximalen Torus ${T_0}^{(1)} = \ker \omega_n$ ist $X^*({T_0}^{(1)})$ mit dem Wurzelsystem Φ (vom Typ A_{n-1}) und Menge der positiven Wurzeln Φ^+; die Menge der einfachen positiven Wurzeln in dieser Situation ist $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$, wobei $\alpha_j := t_j - t_{j+1}$ gesetzt wurde. Das Skalarprodukt des euklidischen Vektorraums $X^*({T_0}^{(1)}) \otimes \mathbb{R}$ ist durch die Einschränkung der durch $< t_i, t_j > := \delta_{i,j}$ definierten Paarung gegeben. Das Gitter aller derjenigen Vektoren, die sich mit allen Elementen von $X^*({T_0}^{(1)})$ zu ganzzahligen Werten paaren, heißt das *Gewichtegitter*, es wird im hier betrachteten Fall aufgespannt von den fundamentaldominanten Gewichten ω_i $(i = 1, \dots, n-1)$; in ihm hat das Wurzelgitter den Index n. –Hier wird (ein wenig mißbräuchlich) im folgenden das von *allen* $\omega_i,\ i = 1, \dots, \underline{n}$ erzeugte Gitter $X^*(T_0)^\vee$ als das Gewichtegitter und ebenso das Erzeugnis von $X^*(T_0{}^{(1)})$ und ω_n als das Wurzelgitter bezeichnet.

Für eine Standardparabolische R_0 von G_0 ist ihr „Moduluscharakter" $\delta_{R_0} \in X^*(T_0) \otimes \mathbb{Q}$ definiert als die halbe Summe der in U_{R_0} auftretenden positiven Wurzeln; es gilt

$$\delta_{R_{0,\Xi}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi \setminus \operatorname{span}(\Xi)} \alpha\ .$$

Hierbei wird folgende Notation benutzt: zu einer Teilmenge $\Xi \subset \Delta$ definiert man den folgenden Untertorus in T_0 :

$$T_{0,\Xi} := \Big(\bigcap_{\alpha \in \Xi} \ker(\alpha) \Big)^\circ;$$ [1]

es sei $M_{R_{0,\Xi}}$ der Zentralisator in G_0 von $T_{0,\Xi}$. Die Gruppe $R_{0,\Xi} := M_{R_{0,\Xi}} \cdot U_{B_0}$ ist dann eine Standardparabolische mit maximaler reduktiver (sog. LEVI-)Untergruppe $M_{R_{0,\Xi}}$. In dieser Notation sind $B_0,\ P_0$ und Q_0 die Standardparabolischen $R_{0,\Xi}$ zu den Teilmengen $\Xi = \emptyset,\ \Delta \setminus \{\alpha_1\}$ bzw. $\Delta \setminus \{\alpha_{n-1}\}$; allgemein gilt für die vorn diskutierten maximalen Standardparabolischen $P_{[i],0} = R_{0,\Delta\setminus\{\alpha_i\}}$. Ist die Parabolische R_0 als Standard-LEVI-Zerlegung $M_{R_0} \ltimes U_{R_0}$ gegeben, so $R_0 = R_{0,\Xi}$ mit $\Xi := \{\alpha \in \Delta |\ \alpha\big|_{Z(M_{R_0})} \equiv 1\}$.

–Eine kurze Rechnung ergibt die folgenden Darstellungen einiger Moduluscharaktere in Termen der fundamentaldominanten Gewichte:

$$\delta := \delta_{B_0} = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i - \frac{n-1}{2} \cdot \omega_n \quad \text{und} \quad \delta_{P_{[i],0}} = \frac{1}{2} \cdot (n \cdot \omega_i - i \cdot \omega_n). \tag{14}$$

Die WEYL-*Gruppe* $W = W(T_0)$, definiert als der Quotient des Normalisators $N_{G_0}(T_0)$ modulo T_0, ist via der von der Konjugation induzierten Permutation der Koordinaten $t_i (i = 1, \dots, n)$ isomorph zu S_n, der Symmetrischen Gruppe auf n Elementen. Bekanntermaßen wird diese erzeugt von Involutionen $s_i,\ i = 1, \dots, n-1$, wobei s_j von der Vertauschung der j-ten und der $j+1$-ten Koordinate induziert wird und in der Darstellung auf $X^*(T_0{}^{(1)}) \otimes \mathbb{R}$ der Spiegelung an der zu α_j orthogonalen Hyperebene entspricht. Die (hieraus fortgesetzte) Operation von W durch Gruppenhomomorphismen auf $X^*(T_0) \otimes \mathbb{Q}$ schreibt man als $(w, \chi) \mapsto w \cdot \chi := \chi \circ \operatorname{Ad}(w)$.

(Die wohlbekannte Präsentation von $W = S_n$ als COXETER-Gruppe ist

$$W = \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid (s_i)^2 = 1,\ s_i \cdot s_j \cdot s_i = \left\{ \begin{array}{ll} s_j, & \text{falls} \quad |j-i| \geq 2 \\ s_j \cdot s_i \cdot s_j, & \text{falls} \quad |j-i| = 1 \end{array} \right. \right\rangle.$$

Die Länge $\ell(w)$ von $w \in W$ wird bezüglich dieser Erzeugenden genommen.)

Ist $R_{0,\Xi}$ eine der oben beschriebenen Standardparabolischen mit Standard-LEVI-Untergruppe $M_{R_{0,\Xi}} \subset G_0$, so ist ihr Wurzelsystem (als Unter-Wurzelsystem dessen von G_0)

[1] In diesem speziellen Kontext der Allgemeinen Linearen Gruppe sind diese Durchschnitte der Kerne einfacher Wurzeln schon automatisch zusammenhängend!

„von den $\alpha_i \in \Xi$ erzeugt“ ; desgleichen für die Erzeugung von deren Weylgruppe: $W_{R_{0,\Xi}} := W_{M_{R_{0,\Xi}}} =< s_i \mid \alpha_i \in \Xi >$. –So sind zum Beispiel W_{Q_0} und W_{P_0} beide zu S_{n-1} isomorph und nach $W = W_{G_0} \cong S_n$ eingebettet als die Gruppen der Permutationen der ersten resp. der letzten $n-1$ Koordinaten.

–Ein Lemma von Kostant besagt, daß für eine Standardparabolische R_0 in jeder Nebenklasse aus $W_{R_0}\backslash W$ ein eindeutig bestimmtes Element $\tilde{w}$ minimaler Länge existiert, welches (u.a. auch) durch

$$\forall w^* \in W_{R_0}: \quad \ell(w^* \cdot \tilde{w}) = \ell(w^*) + \ell(\tilde{w})$$

charakterisiert ist und der *minimale* (oder Kostant-)*Repräsentant* dieser Nebenklasse heißt. Die Menge dieser Kostant-Repräsentanten werde mit W^{R_0} bezeichnet; sie liefert also eine *kanonische*[8] Spaltung der Projektion $W \twoheadrightarrow W_{R_0}\backslash W$. (Ebenso hat man ein kanonisches Repräsentantensystem ${}^{R_0}W$ für W/W_{R_0}, daß z.B. durch

$$\forall w^* \in W_{R_0}, \forall\, {}^{\dagger}w \in {}^{R_0}W: \quad \ell({}^{\dagger}w \cdot w^*) = \ell({}^{\dagger}w) + \ell(w^*)$$

gekennzeichnet ist, und es besteht eine längentreue Bijektion $\left({}^{R_0}W\right)^{-1} = W^{R_0}$.)

Setze für $j = 0, 1, \ldots, n-1$

$$s^{\{j\}} := s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{j-1} \cdot s_j,$$

in $N_{G_0}(T_0)$ repräsentiert (z.B.) durch die Matrix

$$n_{s^{\{j\}}} := \begin{pmatrix} 0 & & & 1 & \vdots \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & 1 & 0 & \vdots \\ \ldots & \ldots & \mathbf{0} & \ldots & \mathbb{1}_{n-j-1} \end{pmatrix};$$

in Zykelschreibweise hat man $s^{\{j\}} = (1\ 2 \ldots j\ j+1)$.

$$\left(\left(s^{\{j\}}\right)^{-1} = s^{[j]} := s_j \cdot s_{j-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1 \mathrel{\widehat{=}} (1\ j+1\ j\ \ldots\ 3\ 2) \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & & & 0 & \vdots \\ \ldots & \ldots & \mathbf{0} & \ldots & \mathbb{1}_{n-j-1} \end{pmatrix}.\right)$$

Es gilt $\ell(s^{\{j\}}) = j$, und unter keiner Linksmultiplikation mit einem s_k, $k \geq 2$ wird $s^{\{j\}}$ „kürzer“ (also ebenso nicht bei Linksmultiplikation mit irgendeinem $w \in W_{P_0}$), und das heißt, daß

$$W^{P_0} = \{s^{\{0\}} = 1_W, s^{\{1\}}, \ldots, s^{\{n-1\}}\}$$

die Menge der Kostant-Repräsentanten bzgl. W_{P_0} ist. –Der Beweis benutzt Überlegungen wie

- $\ell(s^{\{j\}} \cdot s^{\{k\}}) = j + k$ für $j < k$;

[8] nach Auswahl der Coxeter-Erzeugenden bzw. der Längenfunktion bzw. des Systems der Standardparabolischen!

- $s_r \cdot s^{\{j\}} = s^{\{j\}} \cdot s_{r-1}$ für $2 \le r \le j$.

(In vielen Quellen werden die $s^{[j]}$ als KOSTANT-Repräsentanten der Rechtsnebenklassenmenge W/W_{p_0} nachgewiesen.)

Als ein **Corollar** dieser Überlegungen ergibt sich u.a. , daß eine unverkürzbare Darstellung des *längsten Elements* $w_{\max}$ von $W = S_n$ durch

$$w_{\max} = \underbrace{s_1 \cdot \ldots \cdot s_{n-1}}_{n-1} \cdot \underbrace{s_{n-2} \cdot \ldots \cdot s_1}_{n-2} \cdot \underbrace{s_2 \cdot \ldots \cdot s_{n-2}}_{n-3} \cdot \underbrace{s_{n-3} \cdot \ldots \cdot s_2}_{n-4} \cdot s_3 \cdot \ldots$$

gegeben ist und somit dies Element die Länge $\ell(w_{\max}) = \binom{n}{2}$ hat; in Zykelschreibweise

$$w_{\max} = (1\ n)(2\ n-1)(3\ n-2)\ldots([\frac{n}{2}]\ [\frac{n+3}{2}]),$$

(wobei im Falle n ungerade der „mittlere" Index $\frac{n+1}{2}$ nicht bewegt wird); und ein netter Matrixrepräsentant ist z.B. $n_{w_{\max}} := \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$. –Die Matrizen $m_k^{(n)}(\mathbf{0})$ aus Gleichung 13 „sind" also die längsten Elemente der „auf den ersten k Zahlen" nach S_n eingebetteten S_k's.)

Man verfügt über die BRUHAT-Zerlegung

$$G_0 = \dot{\bigcup_{w \in W}} B_0 \cdot n_w \cdot B_0,$$

und entsprechend gilt für eine Standardparabolische $R_0 \supset B_0$:

$$R_0 = \dot{\bigcup_{w \in W_{R_0}}} B_0 \cdot n_w \cdot B_0;$$

dies liefert im „topologischen" Kontext eine *Zellenzerlegung* der Punktemengen von G_0 und von Quotienten nach Parabolischen; zum Beispiel:

$$P_0 \backslash G_0 \cong \dot{\bigcup_{j=0,\ldots,n-1}} n_{s^{\{j\}}} \cdot \mathrm{Stab}_{B_0}(\langle e_{j+1} \rangle) \backslash B_0 \cong \dot{\bigcup_{j=0,\ldots,n-1}} n_{s^{\{j\}}} \cdot U_{B_0}^{(j)};$$

hierbei ist immer n_w ein Repräsentant des Weylgruppenelements $w \in W$ im Normalisator von T_0, und $U_{B_0}^{(j)}$ ist die folgende (abelsche, j-dimensionale, unter $\mathrm{Ad}\,|_{T_0}$ invariante und zur Untergruppe $\mathrm{Stab}_{B_0}(\langle e_{j+1} \rangle)$ komplementäre) Untergruppe von U_{B_0}:

$$U_{B_0}^{(j)} =: \prod_{k=1}^{j} U_{(\frac{t_k}{t_j})} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & \overbrace{}^{\text{Spalte } j+1} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & * & \\ & 1 & & \vdots & \\ & & \ddots & * & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Die Vereinigung $\bigcup_{0\le i\le j} n_{s\{i\}}\cdot U_{B_0}^{(i)}$ $(\cong \mathbb{P}^j)$ der „Zellen“ $n_{s\{i\}}\cdot U_{B_0}^{(i)}$ ist auch der Abschluß des T_0-Orbits von $[\underbrace{1:\ldots:1}_{j+1}:\underbrace{0:\ldots:0}_{n-j-1}]$, wie man mittels der folgenden Rechnung bestätigt:

$$\underbrace{{}^t[\big(1_n+\sum_{i=1}^{j} u_i\cdot(\delta_{li}\delta_{m,j+1})_{l,m}\big)^{-1}}_{\in U_{B_0}^{(j)}}\cdot n_{s\{j\}}^{-1}\cdot e_1]=[-u_1:\ldots:-u_j:1:0:\ldots:0]\,.$$

–Die folgenden Formeln für die Operation der eben eingeführten Weylgruppenelemente auf Gewichten sind unmittelbar zu verifizieren: für $j=0,\ldots,n$ und $i=0,\ldots,n-1$ gilt

- $s^{\{i\}}\cdot\omega_j=\begin{cases}\omega_j & , \quad j\ge i+1\\ \omega_{j+1}-\omega_1 & , \quad j\le i\end{cases}$;
- $s^{[i]}\cdot\omega_j=\begin{cases}\omega_j & , \quad j\ge i+1\\ \omega_{i+1}-\omega_i+\omega_{j-1} & , \quad j\le i\end{cases}$;
- $w_{\max}\cdot\omega_j=\omega_n-\omega_{n-j}$.

[Beachte: ist $w\in W$ durch eine monomiale Matrix $n_w\in N_{G_0}(T_0)$ repräsentiert und $\omega\in X^*(T_0)$ ein Gewicht, so ist $w\cdot\omega$ das Gewicht $\Big(\underline{t}\mapsto\omega\big(\mathrm{Ad}(n_w^{-1})\underline{t}\big)\Big)$.]

Aus dieser linearen Operation $(w,\omega)\mapsto w\cdot\omega$ von W auf $X^*(T_0)\otimes\mathbb{Q}$ (bzw. auf dem Gewichtegitter $X^*(T_0)^\vee$) wird nun die sog. *verschränkte* oder $\star$-*Operation* auf derselben Menge (!) abgeleitet; man setzt nämlich

$$w\star\omega:=w\cdot(\omega+\delta)-\delta.$$

(Beachte, daß diese Operation *nicht* additiv ist, aber das Gewichtegitter in sich überführt – die „Halbzahligkeit“ von $\delta=\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i-\frac{n-1}{2}\cdot\omega_n$ hebt sich wieder weg.)

Bei der Diskussion gewisser LIE-Algebren-Kohomologieräume werden im Abschnitt 4.2.1 konkrete Formeln für die verschränkte Operation benötigt, die hier bereitgestellt werden sollen, wobei die aus Indexschlachten bestehende Herleitung der Leserperson erspart wird.

Betrachte das „allgemeine“ Gewicht $\omega:=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\omega_i\in X^*(T_0)\otimes\mathbb{Q}$, also $a_i\in\mathbb{Q}$. Dann gilt für $j=0,\ldots,n-1$:

$$\begin{aligned}s^{\{j\}}\star\omega\quad&=-\big(1+j+\textstyle\sum_{i=1}^{j}a_i\big)\cdot\omega_1+\sum_{i=2}^{j}a_{i-1}\cdot\omega_i+(a_j+a_{j+1}+1)\cdot\omega_{j+1}+\ldots\\&\quad+\textstyle\sum_{i=j+2}^{n}a_i\cdot\omega_i\ ;\end{aligned}$$

speziell für $j=n-1$:

$s^{\{n-1\}}\star\omega=-\big(n+\sum_{j=1}^{n-1}a_j\big)\cdot\omega_1+\sum_{j=2}^{n-1}a_{j-1}\cdot\omega_j+(a_{n-1}+a_n+1)\cdot\omega_n$;

weiterhin

$s^{[j]}\star\omega\quad=\sum_{i=1}^{j-1}a_{i+1}\cdot\omega_i-(j+1+\sum_{i=1}^{j}a_i)\cdot\omega_j+(j+\sum_{i=1}^{j+1}a_i)\cdot\omega_{j+1}+\sum_{i=j+2}^{n}a_i\cdot\omega_i$

und schließlich

$w_{\max}\star\omega\quad=-\big(\sum_{i=1}^{n-1}(a_{n-i}+2)\cdot\omega_i\big)+\big(n-1+\sum_{i=1}^{n}a_i\big)\cdot\omega_n$.

Für spätere Zwecke übersichtlicher ist die folgende (an P_0 angepaßte) Schreibung:

$$(15) \qquad s^{\{j\}} \star \omega = \big(-j + \sum_{i=j+1}^{n} a_i \big) \cdot \omega_1 + \sum_{i=2}^{n} \hat{a}_i^{\{j\}} \cdot (\omega_i - \omega_1) \ ,$$

wobei

$$\hat{a}_i^{\{j\}} := \begin{cases} a_{i-1} & , \quad 2 \le i \le j \\ a_j + a_{j+1} + 1 & , \quad i = j+1 \\ a_i & , \quad j+2 \le i \le n \ . \end{cases}$$

Insbesondere:

$$(16) \quad s^{\{n-1\}} \star \omega = (a_n - n + 1) \cdot \omega_1 + \sum_{j=2}^{n-1} a_{j-1} \cdot (\omega_j - \omega_1) + (a_{n-1} + a_n + 1) \cdot (\omega_n - \omega_1),$$

anders geschrieben $s^{\{n-1\}} \star \omega = -2 \cdot \delta_{P_{[1],0}} + \sum_{j=2}^{n} a_{j-1} \cdot (\omega_j - \omega_1) + a_n \cdot \omega_n$.

2.3 Algebraische Darstellungstheorie für GL_n

Ab hier sei F ein Körper der Charakteristik 0.

2.3.1 Elementare Höchstgewichtstheorie

In dem n-dimensionalen F-Vektorraum V wurde eine numerierte Basis $\big(e_i\big)_{i=1,\ldots,n}$ fixiert; hierdurch sind ein maximaler spaltender Torus T_0 (der Diagonaltorus), eine Borel-Untergruppe B_0 (die der oberen Dreiecksmatrizen) und das Simplex der Standardparabolischen in $G_0 = GL_F(V)$ festgelegt. Die zu (e_i) duale Basis von $V^\vee := \mathrm{Hom}_F(V, F)$ werde mit $\big(\xi_i\big)_{i=1,\ldots,n}$ bezeichnet, also $\xi_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Eine Matrix $g = \big(g_{ij}\big)_{i,j=1,\ldots,n} \in G_0$ operiert auf einem Vektor $v = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot e_i \in V$ durch Matrizenmultiplikation

$$gv = \big(g_{ij}\big) \cdot {}^t(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} \big(\sum_{j=1}^{n} g_{ij} v_j \big) \cdot e_i \ ,$$

auf einer Linearform $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \xi_i \in V^\vee$ somit durch

$$g\xi = \xi \circ g^{-1} = {}^t\!\big(g_{ij}\big)^{-1} \cdot {}^t(\ldots, \lambda_i, \ldots).$$

Betrachte die symmetrische Algebra $\mathrm{Sym}^*(V)$ über V (d.h. den Quotienten der Tensoralgebra $T^*V := \bigoplus_{i=0}^{\infty} V^{\otimes i}$ nach dem von $\{v \otimes w - w \otimes v \mid v, w \in V\}$ erzeugten homogenen Ideal). Für $d \in \mathbb{N}_0$ ist der d-te graduierte Summand $\mathrm{Sym}^d V$ ein F-Vektorraum der Dimension $\binom{n+d-1}{n-1}$. Für ein $I = (i_1, \ldots, i_d) \in \{1, \ldots, n\}^d$ mit $i_1 \le \ldots \le i_d$ („aufsteigend“, zu Normierungszwecken) sei

$$e_I := e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_d} \in \mathrm{Sym}^d V$$

das zugehörige Monom in den Basisvektoren e_i von V. Es ist dann $\{e_I\}_{I\in\{1,\ldots,n\}^d,\text{aufsteigend}}$ eine F-Basis von $\mathrm{Sym}^d(V)$, die bezüglich der natürlichen Operation von G_0 aus Eigenvektoren der Wirkung des Torus T_0 besteht: auf $<e_I>_F$ operiert T_0 durch den Charakter „$\underline{t}^I$“ $= \sum_{j=1}^d t_{i_j}$. –Der Raum der homogenen Polynome vom Grad d auf V ist $\mathrm{Sym}^d(V^\vee)$; hier operiert $\underline{t} \in T_0$ auf einem Basisvektor $\underline{\xi}_I$ (naheliegende Definition !) durch Multiplikation mit $\underline{t}^{-I} := \left(\underline{t}^I\right)^{-1}$.

Die Lie-Algebra $\mathfrak{u}_{B_0}$ des unipotenten Radikals U_{B_0} der Standard-Borel-Untergruppe B_0 zerfällt als Darstellung von T_0 in die Wurzelräume $\mathfrak{u}_{lm}$ mit $1 \le l < m \le n$, wobei T_0 auf $\mathfrak{u}_{lm} =< (\delta_{il}\cdot\delta_{jm})_{i,j=1,\ldots,n} >_F$ durch die positive Wurzel $t_l - t_m = \sum_{i=l}^{m-1}\alpha_i$ wirkt. Auf V operiert der Erzeuger $u_{lm} = (\delta_{il}\cdot\delta_{jm})_{i,j}$ durch $e_i \mapsto \delta_{im}\cdot e_l$, also auf $V^\vee$ durch $u_{lm}\cdot\xi_i = -\delta_{il}\cdot\xi_m$. Schreibt man $e_I = \prod_{i=1}^n e_i^{j_i}$ mit $j_i := \#\{k|1\le k\le d, i_k = i\}$ (also $j_m > 0 \Leftrightarrow e_I$ ist durch e_m teilbar), dann gilt

$$u_{lm}\cdot e_I = \begin{cases} 0 & , \ j_m = 0 \\ j_m\cdot\frac{e_l}{e_m}\cdot e_I & , \ j_m \ge 1 \end{cases}.$$

Das heißt: der T_0-Eigenvektor e_1^d wird von ganz $\mathfrak{u}_{B_0}$ annulliert, aber unter $\mathfrak{u}_{B_0^-} := \sum_{l>m}\mathfrak{u}_{lm}$ (schon unter $\sum_{l=2,\ldots,n}\mathfrak{u}_{l1} = \mathfrak{u}_{P_0^{\mathrm{opp}}}$) erzeugt er die gesamte Darstellung $\mathrm{Sym}^d V$, anders gesagt: er ist ein Höchstgewichtsvektor (bezüglich $G_0 \supset B_0 \supset T_0$, wie immer) dieser Darstellung, und zwar zum dominanten ganzen Gewicht $d\cdot\omega_1$. Dieselbe Überlegung weist $\mathrm{Sym}^d(V^\vee)$ als Höchstgewichtsdarstellung zum Gewicht $d\cdot(\omega_{n-1}-\omega_n) = d\cdot t_n$ mit Höchstgewichtsvektor ξ_n^d nach.

Notation: wie üblich wird die nichttriviale eindimensionale Darstellung $\bigwedge^n V$ von GL_n als det abgekürzt. Ebenfalls zur Abkürzung wird gesetzt $\mathcal{M}_d[c+d] := \mathrm{Sym}^d(V^\vee)\otimes\det^{c+d} \cong \mathcal{M}_{G_0}(d\cdot\omega_{n-1}+c\cdot\omega_n)$. Dies ist also (bis auf den Determinanten-twist) die natürliche Darstellung auf den homogenen n-ären Polynomen vom Grade d, daher die Sonderbezeichnung $\underline{Z}^I = \prod_{j=1}^n Z_j^{i_j} := \underline{\xi}_I = \xi_1^{i_1}\otimes\ldots\xi_n^{i_n}$ für die Koordinaten. –Es ist $\left(\mathcal{M}_d[c+d]\right)^\vee =: \mathcal{M}_d^\vee[c+d] = \mathcal{M}_{G_0}(d\cdot\omega_1-(c+d)\cdot\omega_n) = \mathrm{Sym}^d(V)\otimes\det^{-(c+d)}$ die dazu contragrediente Darstellung; beachte daß $\mathcal{M}_d[c]$ selbstdual ist genau dann, wenn *entweder* gilt $n\ge 3$ und $d = c = 0$, also $\mathcal{M}_d[c] =$ triviale 1-dimensionale Darstellung, *oder* wenn $n = 2$, $d = 2a$ gerade und $c = -a$ – diese letzteren sind gerade die irreduziblen Summanden der symmetrischen Potenzen der (adjungierten) Darstellung $\mathfrak{sl}_2 = \mathcal{M}_{GL_2}(2\cdot\omega_1-\omega_2)$, wie man sich mit den Methoden der folgenden Abschnitte überlegen kann. –Offenbar haben diese Polynom-verwandten Darstellungen $\mathcal{M}_d$, $\mathcal{M}_d^\vee$ und ihre Determinanten-Twists jeweils eine Basis, die aus den Monomen in den Elementen einer (zu T_0 passend gewählten) Basis von $V^\vee$ bzw. V besteht. Der von einem Monom $\prod_{j=1}^n Z_j^{i_j}$ erzeugte eindimensionale Unterraum von $\mathcal{M}_d$ ist offenbar ein Gewichtsraum für T_0 zum Gewicht $\sum_{j=1}^{n-1}(i_j-i_{j+1})\cdot\omega_j+i_n\cdot\omega_n$, und offenbar der einzige zu diesem Gewicht! Dies heißt nun aber, daß die „inneren Multiplizitäten“ –die Vielfachheiten der T_0-Gewichtsräume in der Darstellung– für die Darstellung $\mathcal{M}_d$ *alle* $= 1$ sind; analoges gilt natürlich für ihre Contragrediente $\mathcal{M}_d^\vee$ und ihrer beider Determinanten-Twists. (Für eine „beliebige“ irreduzible Darstellung von GL_n ist jedoch nur für extremale Gewichte die innere Multiplizität immer $= 1$, das kleinste Beispiel ist wohl $\mathcal{M}_{GL_4}(\omega_1+\omega_2)$, worin das Gewicht ω_3 mit Vielfachheit 2 enthalten ist.)

Ebenso wie oben sieht man die folgenden wohlbekannten Fakten ein:

- für $a \in \mathbb{N}_0$ und $0 \le r \le n$ ist die G_0-Darstellung $\mathrm{Sym}^a(\bigwedge^r V)$ eine irreduzible

Höchstgewichtsdarstellung zum Gewicht $a \cdot \omega_r$ mit $\big(e_1 \wedge \ldots \wedge e_r\big)^a$ als naheliegendem Höchstgewichtsvektor, und

- $\mathrm{Sym}^b\left(\bigwedge^s(V^\vee)\right)$ ist Höchstgewichtsdarstellung, und $\big(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_s\big)^b$ ist Höchstgewichtsvektor hierin zum Gewicht $b \cdot (\omega_s - \omega_n)$.
- allgemein: Sei $\omega = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \omega_i$ ein dominantes ganzes Gewicht, d.h. $a_i \in \mathbb{N}_0$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $a_n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\otimes_{i=1}^n (e_1 \wedge \ldots \wedge e_i)^{a_i} \in \bigotimes_{i=1}^n \mathrm{Sym}^{a_i}\left(\bigwedge^i V\right)$ ein Eigenvektor für T_0 zu ω, der von ganz $\mathfrak{u}_{B_0}$ annulliert wird, so daß er eine irreduzible Höchstgewichtsdarstellung zum gegebenen Gewicht ω erzeugt (die im Allgemeinen ein *echter* Untermodul von $\bigotimes_{i=1}^n \mathrm{Sym}^{a_i}\left(\bigwedge^i V\right)$ ist); sie werde hier als $\mathcal{M}_{G_0}(\omega)$ bezeichnet.

(Bekanntlich sind die irreduziblen algebraischen Darstellungen von G_0 durch die Orbiten der Weylgruppe auf dem Gewichtegitter bzw. durch die dominanten ganzen Gewichte parametrisiert, d.h. sie „sind“ alle von der Form $\mathcal{M}_{G_0}(\omega)$.)

Nun bezeichne allgemein $W^\vee := \mathrm{Hom}_F(W, F)$ die kontragrediente Darstellung zu einer G_0-Darstellung W (hier ist $F = \mathcal{M}_{G_0}(0)$ die eindimensionale triviale Darstellung). Schreibt man $\omega^\vee := \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i} \cdot \omega_i - (\sum_{i=1}^n a_i) \cdot \omega_n$ für das gegenüber $\omega = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \omega_i$ „auf den Kopf gestellte“ Gewicht, so gilt die einfache Formel

$$\mathcal{M}_{G_0}(\omega)^\vee = \mathcal{M}_{G_0}(\omega^\vee);$$

dies wird im folgenden Abschnitt hergeleitet. Insbesondere

$$\big(\mathrm{Sym}^d(\textstyle\bigwedge^i V) \otimes \det^z\big)^\vee = \mathrm{Sym}^d(\textstyle\bigwedge^{n-i} V) \otimes \det^{-z} \tag{17}$$

für $i = 1, \ldots, n-1,\ d \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{Z}$. (Vergleiche zu diesem Abschnitt z.B. [FH91, §15].)

2.3.2 Schur-Funktoren und Weyl-Konstruktion

Ist W irgendeine Darstellung der Gruppe $G_0 = GL_n$ und $d \in \mathbb{N}_+$, so operiert außer G_0 (von links) auch S_d, die symmetrische Gruppe einer d-elementigen Menge, durch Permutation der Faktoren (von rechts) auf der Tensorpotenz $W^{\otimes d}$, und diese Operationen sind offenbar verträglich, so daß also S_d-invariante direkte Summanden in $W^{\otimes d}$ gleichzeitig G_0-invariant sind.

Die irreduziblen Darstellungen von S_d können bekanntlich ebenso wie die Konjugationsklassen dieser Gruppe durch die *Partitionen* λ von d (d.h. fallende Folgen natürlicher Zahlen $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N \geq \ldots)$ mit $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i = d$) parametrisiert werden; es sei $(c_\lambda)_\lambda$ ein System von orthogonalen Idempotenten in der Gruppenalgebra $F[S_d]$, so daß $\rho_\lambda := F[S_d] \cdot c_\lambda$ diejenige irreduzible Darstellung von S_d ist, die zur durch λ bestimmten Konjugationsklasse in S_d gehört; vgl. [FH91, Kap. 4].

Zur Veranschaulichung einer Partition dient oft ihr (Ferrers-)Young-Diagramm, das in LaTeX darzustellen der Autor jetzt nicht in der Lage ist; die geometrische Sprache wird aber benutzt werden, und zwar in der „angelsächsischen“ Normierung/im unteren rechten Quadranten: zur Partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \ldots)$ gehören jeweils λ_i Kästchen in der i-ten Zeile (von oben), jeweils linksbündig angelegt. –Die Partition, die zu dem Diagramm gehört, das aus demjenigen von λ durch Spiegelung an der relevanten Quadranten-Halbierenden entsteht, heiße die *konjugierte Partition* ${}^t\lambda$ zu λ. Die Zahl der Kästchen des Diagramms von λ (also diejenige Zahl, von der λ eine Partition ist), heißt die *Masse* von λ, $|\lambda|$. Die Zahl λ_1 wird auch *Weite* oder Spaltenanzahl von λ genannt, und die *Tiefe* oder Zeilenanzahl von λ ist die Weite von ${}^t\lambda$. –Die Kennzahl „Weite + Tiefe“ wird unter den Partitionen einer festen Masse d offensichtlich am größten für diejenigen, deren Diagramm nur aus einem äußeren Haken besteht, also Partitionen der Form $\lambda = (a, \underbrace{1, \ldots, 1}_{b-1}, 0, \ldots)$ mit Hakenlängen a und b, wobei $a + b - 1 = d$; auf diesen gilt: Weite + Tiefe = Masse $+1$, im allgemeinen gilt hier „$\leq$“ .

Es stellt sich nun heraus, daß die Zuordnung $W \rightsquigarrow W^{\otimes|\lambda|} \cdot c_\lambda =: \mathbb{S}_\lambda(W)$ in funktorieller Weise aus Darstellungen von GL_n „neue“ Darstellungen von GL_n erzeugt –dies ist der SCHUR-*Funktor* $\mathbb{S}_\lambda$ zur Partition λ. Man hat hiermit die Zerlegung als Darstellung von $G_0 \times S_j$

$$W^{\otimes j} = \bigoplus_{|\lambda|=j} \mathbb{S}_\lambda(W) \otimes \rho_\lambda, \tag{18}$$

und es gilt $\mathbb{S}_\lambda(W) = \{0\} \iff \lambda_{\dim(W)+1} > 0$.

Für die n-dimensionale Standarddarstellung V von GL_n sind *alle* Darstellungen $\mathbb{S}_\lambda(V)$ (entweder $= \{0\}$ oder) irreduzibel, und zwar ist für $\lambda_n = 0$ (d.h. Tiefe $\leq n-1$) die Darstellung $\mathbb{S}_\lambda(V)$ von GL_n gerade die Höchstgewichtsdarstellung $\mathcal{M}_{GL_n}(\omega(\lambda))$ mit dem (ganzen, dominanten) Gewicht

$$\omega(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdot \omega_i =: \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{\lambda}_i \cdot \omega_i,$$

genauer: $\mathbb{S}_\lambda(V)$ ist das Erzeugnis eines „höchsten Vektors“ im direkten Summanden

$$\bigotimes_{i=1}^{n-1} \mathrm{Sym}^{\widetilde{\lambda}_i}\left(\bigwedge^i(V)\right) \subset W^{\otimes|\lambda|}.$$

Es ergeben sich also *alle* irreduziblen (algebraischen) Darstellungen der Untergruppe SL_n durch Anwenden von SCHUR-Funktoren zu Partitionen der Tiefe $\leq n-1$ auf die Standarddarstellung, und nach Tensorieren mit ganzzahligen Potenzen der Determinantendarstellung erhält man auch alle Darstellungen der GL_n. Etwas präziser gesagt: Es ist $\det := \bigwedge^n(V) = \mathcal{M}_{G_0}(\omega_n)$ der eindimensionale Vektorraum, auf dem GL_n durch Multiplikation mit der Determinante operiert, und $\det^{-1}$ die hierzu contragrediente Darstellung; wie üblich setzt man für $a \in \mathbb{Z}$: $\det^a = \mathrm{Sym}^a(\det) := (\det^{\mathrm{sgn}(a)})^{\otimes|a|}$; dies sind also sämtlich eindimensionale rationale Darstellungen von GL_n, die genau für $a \geq 0$ polynomial sind. Einer fallenden Folge von ganzen Zahlen der Länge n, $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, ist zugeordnet zunächst die Partition (!) $\lambda_{\mathrm{red}} := (\lambda_1 - \lambda_n, \lambda_2 - \lambda_n, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_n)$ der Tiefe $\leq n-1$ und dieser die polynomiale Darstellung $\mathbb{S}_{\lambda_{\mathrm{red}}}(V)$. Man bezeichnet nun mit $\mathbb{S}_\lambda(V)$ die rationale Darstellung $\mathbb{S}_{\lambda_{\mathrm{red}}}(V) \otimes \det^{\lambda_n}$, die dann offenbar eine Realisierung –genannt WEYL-Konstruktion– der Höchstgewichtsdarstellung von GL_n zum (dominanten, ganzen) Gewicht $\omega(\lambda) := \sum_{i=1}^n \widetilde{\lambda}_i \cdot \omega_i$ ist, wobei $\widetilde{\lambda}_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ für $i \leq n-1$ und

$\widetilde{\lambda}_n := \lambda_n$ gesetzt wurde: $\mathbb{S}_\lambda(V) \cong \mathcal{M}_{GL_n}\big(\omega(\lambda)\big)$. (Diese Darstellung ist polynomial genau für $\lambda_n \geq 0$ und in diesem Falle auch ein direkter Summand eines graduierten Stücks der Tensoralgebra über der Standarddarstellung.) Dies ergibt auch eine Parametrisierung der irreduziblen algebraischen Darstellungen der GL_n durch die fallenden n-tupel ganzer Zahlen! –Die „halbeinfachen“ Gewichts-Koeffizienten $\widetilde{\lambda}_i$ $(i \leq n-1)$ zu einem fallenden n-tupel λ wie eben genügen offenbar der Abschätzung $\widetilde{\lambda}_i \leq$ Weite von λ_{red} [=: Weite des fallenden n-tupels $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$], und Gleichheit tritt *genau* für $\lambda_{\text{red}} = (\underbrace{d, \ldots, d}_{r}, 0, \ldots, 0)$ (d.h. Diagramm = ein Rechteck; d und r beliebig) auf; hierzu gehört dann die Darstellung $\mathbb{S}_\lambda(V) = \mathrm{Sym}^r(\bigwedge^d V) \otimes \det^{\lambda_n}$.

Zu einem fallenden n-tupel $\lambda = (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n)$ ist $\lambda^\vee := (-\lambda_n \geq -\lambda_{n-1} \geq \ldots \geq -\lambda_2 \geq -\lambda_1)$ wiederum ein fallendes n-tupel; es kann auch als $\lambda^\vee := -w_{\max} \cdot \lambda$ erhalten werden, wobei $w_{\max}$ das längste Element der Weyl-Gruppe von GL_n ist. Da für die fundamentaldominanten Gewichte gilt $-w_{\max} \cdot \omega_j = \omega_{n-j} - \omega_n$ und da die Darstellungen $\bigwedge^{n-j}(V) \otimes \det^{-1} \cong \mathcal{M}_{GL_n}(\omega_{n-j} - \omega_n)$ und $\mathcal{M}_{GL_n}(\omega_j) \cong \bigwedge^j(V)$ contragredient zueinander sind, gilt (wegen der Funktorialität der Konstruktion) für beliebiges λ:

$$\mathbb{S}_\lambda(V)^\vee = \mathbb{S}_\lambda(V^\vee) = \mathbb{S}_{\lambda^\vee}(V)!$$

Man beachte: die Weite von $(\lambda^\vee)_{\text{red}}$ ist $= -\lambda_n - (-\lambda_1) = \lambda_1 - \lambda_n =$ Weite von λ_{red}, und dies wird durch die Weite von λ sicher nach oben abgeschätzt, *falls* λ eine Partition ist (d.h. $\lambda_n \geq 0$).

Seien nun W und W' zwei Darstellungen von $G_0 = GL_n$ von den Vektorraum-Dimensionen m, m'. Um die Darstellung $\bigwedge^j(W \otimes W')$ in eine Summe von Tensorprodukte von Schurfunktoren der Fakteren W und W' zu zerlegen, beachtet man, daß sie der „Eigenraum“ zum Signums-Charakter $\mathrm{sgn} : S_j \to \{\pm 1\}$ in der $G_0 \times S_j$-Darstellung $(W \otimes W')^{\otimes j} \cong (W)^{\otimes j} \otimes (W')^{\otimes j}$ ist (wobei S_j auf der rechten Seite „diagonal“ operiert) und daß man über die in Gleichung (18) gegebene Zerlegung j-ter Tensorpotenzen verfügt. Nach Ausdistribuieren ergibt sich

$$\bigwedge^j(W \otimes W') \cong \bigoplus_{\substack{\lambda,\mu:\ |\lambda|=j=|\mu| \\ \lambda_{m+1}=0=\mu_{m'+1}}} \big(\mathbb{S}_\lambda(W) \otimes \mathbb{S}_\mu(W')\big) \otimes \Big(\big(\rho_\lambda \otimes \rho_\mu\big)[\mathrm{sgn}]\Big).$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \big(\rho_\lambda \otimes \rho_\mu\big)[\mathrm{sgn}] &\cong \mathrm{Hom}_{S_j}(\rho_\lambda^\vee, \rho_\mu \otimes \mathrm{sgn}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{S_j}(\rho_\lambda^\vee, \rho_{{}^t\mu}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{S_j}(\rho_\lambda, \rho_{{}^t\mu}) \\ &\cong \begin{cases} F, \ \text{falls } \lambda = {}^t\mu; \\ \{0\} \ \text{sonst}, \end{cases} \end{aligned}$$

da die Darstellungen ρ_ν irreduzibel, selbstcontragredient und durch ihre Partitionen ν bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind. –Somit gilt

$$\begin{aligned}\bigwedge^j (W \otimes W') &\cong \bigoplus_{\substack{\lambda,\mu:\ |\lambda|=j=|\mu| \\ \rho_\lambda \overset{!}{\cong} \rho_\mu \otimes \mathrm{sgn} \cong \rho_{t_\mu}}} \mathbb{S}_\lambda(W) \otimes \mathbb{S}_\mu(W') \\ &\cong \bigoplus_{\substack{|\lambda|=j \\ \lambda_{m+1}=0,\ \lambda_1 \le m'}} \mathbb{S}_\lambda(W) \otimes \mathbb{S}_{t_\lambda}(W').\end{aligned}$$

Die adjungierte Darstellung von GL_n auf $\mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V)$ kann ja als $\mathrm{End}(V) = V^\vee \otimes V$ erhalten werden; man erhält mit dem vorigen

$$\begin{aligned}\bigwedge^j \big(\mathrm{End}(V)\big) &\cong \bigoplus_{\substack{|\lambda|=j \\ \lambda_{n+1}=0,\ \lambda_1 \le n}} \mathbb{S}_\lambda(V^\vee) \otimes \mathbb{S}_{t_\lambda}(V) \\ &\cong \bigoplus_{\substack{|\lambda|=j \\ \lambda_{n+1}=0,\ \lambda_1 \le n}} \mathbb{S}_{\lambda^\vee}(V) \otimes \mathbb{S}_{t_\lambda}(V).\end{aligned}$$

(Man beachte, daß mit der Darstellung $\mathrm{End}(V)$ auch alle ihre Tensor-, symmetrischen und äußeren Potenzen *selbstdual* sind; tritt also eine irreduzible Darstellung $\mathbb{S}_\mu(V)$ mit einer Vielfachheit m_μ in $\bigwedge^j\big(\mathrm{End}(V)\big)$ auf (d.h. $\dim \mathrm{Hom}_{GL_n}\Big(\mathbb{S}_\mu(V), \bigwedge^j\big(\mathrm{End}(V)\big)\Big) = m_\mu > 0$), so muß *entweder* $\mu = \mu^\vee$ gelten, *oder* $\mathbb{S}_{\mu^\vee}(V)$ tritt ebenfalls mit dieser Vielfachheit auf.)

2.3.3 Zerlegung von Tensorprodukten: Klötzchenspiele

Um (z.B.) die Darstellungen $\bigwedge^j\big(\mathrm{End}(V)\big)$ von GL_n vollständig in Irreduzible zu zerlegen, benötigt man offenbar Informationen über die Zerlegung von Tensorprodukten von (irreduziblen) Darstellungen in Irreduzible; dies ist offenbar eine natürlich auftretende Fragestellung. Das „erste“ Ergebnis in diese Richtung ist die Pieri-Regel:
Ist λ eine beliebige Partition und μ die „Einzeilen“-Partition $(d, 0, \ldots)$ (also $\mathbb{S}_\mu(V) = \mathrm{Sym}^d(V)$), so treten irreduzible Darstellungen $\mathbb{S}_\nu(V)$ im Tensorprodukt $\mathbb{S}_\lambda(V) \otimes \mathbb{S}_\mu(V)$ nur mit den Vielfachheiten 0 oder 1 auf; die tatsächlich auftretenden sind diejenigen zu Partitionen ν, deren Diagramm sich wie folgt aus demjenigen von λ ergibt: man klebe Klötzchen (aus einem genügend großen Vorrat an gleichbeschaffenen würfelförmigen Klötzchen) entsprechend dem Diagramm von λ in die linke obere Ecke eines Türrahmens und bestreiche die nach unten weisenden Flächen mit Pieri-Leim, und man breche das Diagramm zu μ in Stücke/kürzere Zeilen ganzzahliger Länge, deren Längen sich zu d aufsummieren. Nun klebe man diese Stücke –unten beginnend– derart an das Diagramm von λ und den Türrahmen, daß die einzelnen Stücke linksbündig anliegen und nirgends überstehen –anders gesagt: so daß sich wieder das Diagramm einer Partition ergibt. Noch anders gesagt: für eine Partition ν der Zahl $d+ \mid \lambda \mid$ ist genau dann $\dim \mathrm{Hom}_{GL_n}\big(\mathbb{S}_\nu(V), \mathbb{S}_\lambda(V) \otimes \mathrm{Sym}^d(V)\big) > 0$, wenn das Diagramm von ν sich aus dem von λ durch Hinzufügen von d Klötzchen herstellen läßt, wobei jedoch in jeder der Spalten höchstens *ein* Klötzchen hinzukommen darf: Pieri-Leim hält nur den Zug eines Klötzchens aus.

Der beliebteste Spezialfall ist die CLEBSCH–GORDAN-Regel[9] –der Fall, daß auch das Diagramm von λ eine Zeile ist:

$$\mathrm{Sym}^a(V) \otimes \mathrm{Sym}^b(V) \cong \bigoplus_{i=0}^{\min(a,b)} \mathcal{M}_{GL_n}\big((a+b-2i)\cdot\omega_1 + i\cdot\omega_2\big);$$

für $n = 2$ ist dies offenbar schon alle benötigte Information.

(Dual zur PIERI-Regel hat man für dass Tensorieren mit der Darstellung $\bigwedge^d(V)$ (zur Partition $\mu = (\underbrace{1,\ldots,1}_{d},0,\ldots)$, deren Diagramm eine Spalte ist): $\mathbb{S}_\lambda(V) \otimes \bigwedge^d(V)$ ist die direkte Summe (mit Vielfachheiten 1) aller $\mathbb{S}_\nu(V)$ zu Partitionen ν der Zahl $d+ \mid\lambda\mid$, deren Diagramm aus dem von λ dadurch entsteht, daß d Klötzchen angeklebt werden, jedoch höchstens eines pro *Zeile.*)

Nun zum allgemeinen Fall: Es seien beliebige Partitionen λ und $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots)$ gegeben; sie werden mir ihren Diagrammen identifiziert. Eine *μ-Erweiterung von $\lambda =: \lambda^{(0)}$* wird wie folgt in (Tiefe von μ) Schritten konstruiert: Zerlege μ in seine Zeilen der Längen μ_i. Im i-ten Schritt fügt man an das im vorigen Schritt entstandene Diagramm $\lambda^{(i-1)}$ die i-te Zeile von μ gemäß der eben beschriebenen PIERI-Regel an und numeriert die in diesem Schritt hinzugekommenen Klötzchen mit der Zahl i; die Partition zum sich ergebenden (teilbeschrifteten) Diagramm heiße $\lambda^{(i)}$. $\big($Anders gesagt: man wählt als $\lambda^{(i)}$ eine der Partitionen ν mit $\dim \mathrm{Hom}_{GL_n}\big(\mathbb{S}_\nu(V), \mathbb{S}_{\lambda^{(i-1)}}(V) \otimes \mathrm{Sym}^{\mu_i}(V)\big) > 0$ aus; hier wird es im allgemeinen viele Möglichkeiten geben!$\big)$Das nach soviel Schritten, wie die Zeilenzahl von μ angibt, erhaltene Diagramm ist dann eine μ-Erweiterung von λ. Eine solche heißt *strikt*, falls die Folge der Beschriftungsziffern der angefügten Klötzchen, und zwar *von oben nach unten und von rechts nach links* ausgelesen, die folgende Eigenschaft hat: An jeder einzelnen Stelle und für jedes $i \geq 2$ ist die Anzahl der schon aufgeführten Ziffern i *höchstens* so groß wie die Anzahl der schon durchlaufenen Ziffern $(i-1)$.

Für Diagramme/Partitionen λ, μ, ν mit $\mid\lambda\mid + \mid\mu\mid=\mid\nu\mid$ wird nun der LITTLEWOOD–RICHARDSON-Koeffizient $N^\nu_{\lambda,\mu} \in \mathbb{N}_0$ definiert als die Anzahl der Möglichkeiten, das Diagramm von ν als strikte μ-Erweiterung dessen von λ zu erhalten.

Das **Theorem** von LITTLEWOOD–RICHARDSON besagt:

$$\mathbb{S}_\lambda(V) \otimes \mathbb{S}_\mu(V) \cong \bigoplus_\nu \big(\mathbb{S}_\nu(V)\big)^{N^\nu_{\lambda,\mu}}.$$

(Für einen korrekten Beweis, der natürlich im Kontext der Darstellungstheorie der Symmetrischen Gruppen geführt wird, konsultiere man nicht die Arbeit der Namensgeber, sondern z.B. [Ma79, §1.9].)

Alle vorgenannten Tensorprodukt-Zerlegungs-Regeln sind offensichtlich Spezialfälle dieses Satzes. [Es folgt insbesondere auch die Symmetrie der $N^\nu_{\lambda,\mu}$ in den Variablen λ und μ, die dem beschränkten Geiste des Autors aus der kombinatorischen Beschreibung nicht ersichtlich ist.]

Eine sich sofort ergebende Folgerung: falls $N^\nu_{\lambda,\mu} > 0$ für Partitionen λ, μ, ν gilt, so ist die Weite von ν höchstens so groß wie die Summe der Weiten von λ und μ; Gleichheit tritt

[9] Nicht *Flash Gordon* o.ä., wie leider z.B. in [FH91] gelegentlich zu finden!

genau dann auf, wenn das Aneinanderlegen der ersten Zeilen von λ und μ die erste Zeile von ν ergibt. (Dies kann für mehrere strikte Erweiterungen der Fall sein, wenn genügend viele Zeilen vorhanden sind!)

Aus Höchstgewichtsüberlegungen ist klar:

$$\forall \omega, \omega' \in X^*(T_0)\ \underline{\text{dominant}}\ :\ \dim \mathrm{Hom}_{GL_n}\big(\mathcal{M}_{GL_n}(\omega+\omega'), \mathcal{M}_{GL_n}(\omega)\otimes\mathcal{M}_{GL_n}(\omega')\big) = 1.$$

In die Sprache der Partitionen und Diagramme übersetzt sich dies wie folgt: ist ν das Diagramm, das durch zeilenweises Aneinanderschieben der Diagramme von λ und μ entsteht (offenbar eine zulässige Erweiterung!), was in Termen der zugehörigen Gewichte gerade $\omega(\nu) = \omega(\lambda) + \omega(\mu)$ bedeutet, dann gilt $N^{\nu}_{\lambda,\mu} = 1$.

–Es möge nun eine irreduzible Darstellung $\mathbb{S}_\alpha(V) = \mathcal{M}_{GL_n}\big(\omega(\alpha)\big)$ als Unterdarstellung in einer äußeren Potenz $\bigwedge^j\big(\operatorname{End}(V)\big)$ der adjungierten Darstellung auftreten. Vorn wurde gezeigt

$$\bigwedge^j\big(\operatorname{End}(V)\big) \cong \bigoplus_{|\lambda|=j} \mathbb{S}_{\lambda^\vee}(V)\otimes\mathbb{S}_{{}^t\lambda}(V);$$

es wird also für eine Partition λ der Masse $|\lambda| = j$ angenommen: $N^{\alpha_{\text{red}}}_{(\lambda^\vee)_{\text{red}},\,{}^t\lambda} > 0$. Dann erfüllen für alle $1 \le i \le n-1$ die „halbeinfachen Koeffizienten“ $\widetilde{\alpha}_i := \alpha_i - \alpha_{i+1}$ des Gewichts von α die Abschätzungen

$$\widetilde{\alpha}_i \overset{(1)}{\le} \text{Weite von } \alpha \overset{(2)}{\le} \text{Weite von } (\lambda^\vee)_{\text{red}} + \text{Weite von } {}^t\lambda \le \text{Weite von } \lambda + \text{Tiefe von } \lambda \overset{(3)}{\le} |\lambda| + 1.$$

–Kann nun hierbei –und falls ja, wie?– ein „besonders hoher“ halbeinfacher Koeffizient $\widetilde{\alpha}_i \ge n$ (für ein $i \le n-1$) einer Unterdarstellung $\mathbb{S}_\alpha(V)$ in einer äußeren Potenz $\bigwedge^j\big(\operatorname{End}(V)\big)$ für ein „kleines“ j, d.h. $j \le n-1$, auftreten? Die obige Ungleichungskette verlängert sich dann durch $|\lambda| + 1 = j+1 \overset{(4)}{\le} n$, und die Annahme $\boxed{\widetilde{\alpha}_i \ge n}$ bedeutet gerade, daß an allen Stellen *Gleichheit* vorliegen muß, also zunächst $\widetilde{\alpha}_i = n$ und damit (wegen (4)): $\boxed{j = n-1}$. Die Gleichheit bei (3) bedeutet, daß das betreffende λ einem Hakendiagramm entsprechen muß – die Hakenlängen sind dann a und $n-a$ für ein $a \in \{1,\ldots,n-1\}$, d.h. $\lambda = (a, \underbrace{1,\ldots,1}_{n-a-1}, \underbrace{0,\ldots,0}_{a})$. Wegen der Gleichheit bei (1) ist aber α_{red} ein Blockdiagramm der Weite $\widetilde{\alpha}_i = n$, also $\alpha = (\underbrace{n+\alpha_n,\ldots,n+\alpha_n}_{i(\le n-1)}, \alpha_n,\ldots,\alpha_n)$, entsprechend dem Gewicht $\omega(\alpha) = n\cdot\omega_i + \alpha_n\cdot\omega_n$ für ein $i \le n-1$. –Für ein Hakendiagramm λ wie eben ist nun ${}^t\lambda = (n-a, \underbrace{1,\ldots,1}_{a-1}, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-a})$ und $\lambda^\vee = (\underbrace{0,\ldots,0}_{a}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{n-a-1}, -a)$, also $(\lambda^\vee)_{\text{red}} = (\underbrace{a,\ldots,a}_{a}, \underbrace{a-1,\ldots,a-1}_{n-a-1}, 0)$. Damit für ein Blockdiagramm α und ein Hakendiagramm λ der angegebenen Zeilen- und Spaltenlängen aber $\mathbb{S}_\alpha(V)$ ein Summand im Tensorprodukt $\mathbb{S}_{\lambda^\vee}(V)\otimes\mathbb{S}_{{}^t\lambda}(V)$ sein kann, für den auch noch Gleichheit bei (2) gilt, muß also die erste Zeile von ${}^t\lambda$ vollständig an die erste Zeile von $(\lambda^\vee)_{\text{red}}$ angeschoben werden; in den nächsten $(a-1)$ Zeilen kann nach den Regeln für eine strikte Erweiterung jeweils höchstens je ein Klötzchen angelegt werden. Ein solcherart entstehendes Diagramm hat aber für ein „echtes“ Hakendiagramm λ sicherlich mehrere „Stufen“ und kann kein Blockdiagramm sein – es muß also zur Erfüllung der Annahme λ ein „ausgeartetes“ Hakendiagramm mit entweder nur einer Zeile oder nur einer Spalte sein, d.h. es muß einer der Extremfälle (i) $a = 1$ oder (ii) $a = n-1$ vorliegen! In diesen beiden letztgenannten Fällen hat man dann

(i) $\lambda = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, 0)$; dann sind $\mathbb{S}_{{}^t\lambda}(V) \cong \mathrm{Sym}^{n-1}(V)$ und $\mathbb{S}_{\lambda^\vee}(V) \cong \mathrm{Sym}^1(V) \otimes \det^{-1} = V \otimes \det^{-1}$, so daß sich $\mathbb{S}_\alpha(V) \cong \mathrm{Sym}^n(V) \otimes \det^{-1}$ ergibt, was dem fallenden n-tupel $\alpha = (n-1, -1, \ldots, -1)$ bzw. dem Gewicht $\omega(\alpha) = n \cdot \omega_1 - 1 \cdot \omega_n$ entspricht, <u>oder</u>

(ii) $\lambda = (n-1, 0, \ldots, 0)$, so daß dann die Isomorphien $\mathbb{S}_{{}^t\lambda}(V) \cong V^\vee \otimes \det \cong \mathcal{M}_{G_0}(1 \cdot \omega_{n-1})$ und $\mathbb{S}_{\lambda^\vee}(V) \cong \mathrm{Sym}^{n-1}(V^\vee)$ bestehen; hier ergibt sich $\mathbb{S}_\alpha(V) \cong \mathrm{Sym}^n(V^\vee) \otimes \det$ zum fallenden n-tupel $\alpha = (1, \ldots, 1, 1-n)$ bzw. zum Gewicht $\omega(\alpha) = n \cdot \omega_{n-1} - (n-1) \cdot \omega_n$.

In beiden Fällen gilt $\omega(\alpha) = \omega({}^t\lambda) + \omega(\lambda^\vee)$, so daß die Vielfachheit $N^{\alpha_{\mathrm{red}}}_{(\lambda^\vee)_{\mathrm{red}},\ {}^t\lambda}$ des betreffenden $\mathbb{S}_\alpha(V)$ im Tensorprodukt „zu λ" also $= 1$ ist!

Somit ist bewiesen:

Lemma 1 *Ist es der Fall, daß für ein fallendes n-tupel $\alpha = (\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n)$ mit zugehörigen halbeinfachen Gewichtskoeffizienten $\widetilde{\alpha}_i = \alpha_i - \alpha_{i+1},\ i \leq n-1$ und für ein $j \leq n-1$ gilt*

$$\dim \mathrm{Hom}_{GL_n}\Big(\mathbb{S}_\alpha(V), \bigwedge^j \big(\mathrm{End}(V)\big)\Big) \geq 1,$$

so sind <u>entweder</u> alle $\widetilde{\alpha}_i \leq n-1$, <u>oder</u> man hat $j = n-1$ und einen der (zueinander dualen!) Fälle

- $\alpha^\uparrow := (n-1, -1, \ldots, -1)$, *mit* $\mathbb{S}_{\alpha^\uparrow}(V) = \mathrm{Sym}^n(V) \otimes \det^{-1} \cong \mathcal{M}_{GL_n}(n \cdot \omega_1 - \omega_n)$ <u>*oder*</u>
- $\alpha^\downarrow := (1, \ldots, 1, 1-n) = (\alpha^\uparrow)^\vee$, *mit* $\mathbb{S}_{\alpha^\downarrow}(V) =\cong \mathcal{M}_{GL_n}(n \cdot \omega_{n-1} - (n-1) \cdot \omega_n) \cong \mathrm{Sym}^n(\bigwedge^{n-1} V) \otimes \det^{-(n-1)} = \mathrm{Sym}^n(V^\vee) \otimes \det$

vorliegen; diese beiden Darstellungen kommen in den genannten kleinen Graden nur jeweils einmal *vor:* $\dim \mathrm{Hom}_{GL_n}\Big(\mathbb{S}_{\alpha^\uparrow \text{ bzw. } \downarrow}(V), \bigoplus_{j=1}^{n-1} \big(\bigwedge^j \mathrm{End}(V)\big)\Big) = 1.$ □

Die vorn fixierte Basis $\mathcal{B}$ von V ist so gewählt, daß der zu ihr gehörige Isomorphismus $\mathrm{End}(V) \overset{i_{\mathcal{B}}}{\cong} M_{n\times n}(F)$ die Borel-Untergruppe B_0 auf die invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen abbildet, etc. . Mittels dieses Isomorphismus' $i_{\mathcal{B}}$ läßt sich die Unterdarstellung vom Typ $\mathbb{S}_{\alpha^\uparrow}(V)$ in $\bigwedge^{n-1} \mathrm{End}(V)$ leicht identifizieren: für $2 \leq j \leq n$ sei u_{1j} die Matrix mit einem Eintrag 1 in der j-ten Spalte der ersten Zeile und Nullen sonst (der naheliegendste Wurzelvektor zur Wurzel $\alpha_{1j} \mathrel{\widehat{=}} \frac{t_1}{t_j}$), so daß $\mathfrak{u}_{P_0} = \bigoplus_{j=1}^n F \cdot u_{1j}$ gilt. Dann ist $\mathbf{u}^\uparrow := u_{12} \wedge \ldots \wedge u_{1n}$ eine Basis in $\bigwedge^{n-1} \mathfrak{u}_{P_0}$, und auf ihm operiert $\underline{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in T_0$ unter Ad durch Multiplikation mit $\frac{t_1}{t_2} \cdot \ldots \cdot \frac{t_1}{t_n} = \frac{t_1^n}{t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots t_n} = \big(n \cdot \omega_1 - \omega_n\big)(\underline{t})$, und $\mathfrak{u}_{B_0}$ annulliert ihn; die von $\mathbf{u}^\uparrow$ unter G_0 erzeugte irreduzible Unterdarstellung in $\bigwedge^{n-1} \mathrm{End}(V)$ ist also die Höchstgewichtsdarstellung zum (Gewicht zum) fallenden n-tupel $\alpha^\uparrow$! (Ebenso kommt die Kopie von $\mathbb{S}_{\alpha^\downarrow}(V)$ von $\bigwedge^{n-1} \mathfrak{u}_{P_0^{\mathrm{opp}}}$ her.)

Bemerkung: Dies stimmt alles auch für $n = 2$, dann ist $\alpha^{\downarrow} = \alpha^{\uparrow}$ selbstdual und die Darstellung $\mathbb{S}_{\alpha^{\updownarrow}}(V) = \mathcal{M}_{GL_2}(2\cdot\omega_1 - \omega_2)$ von GL_2 kommt genau einmal in $\mathrm{End}(V) \cong V^{\vee}\otimes V \cong \mathcal{M}_{GL_2}(\omega_1-\omega_2)\otimes \mathcal{M}_{GL_2}(\omega_1) \cong \mathcal{M}_{GL_2}(2\cdot\omega_1-\omega_2)\oplus\mathcal{M}_{GL_2}(0) \cong \big(\mathrm{Sym}^2(V)\oplus\bigwedge^2(V)\big)\otimes\det^{-1}$ vor: meistens nennt man sie dann $\mathfrak{sl}_2$!

–Nun folgt ein Beispiel effizienten „Auffressens“ von Koeffizienten in gewissen mehrfachen Tensorprodukten: Es seien $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{Z}$ gegeben. Welches ist der *kleinste* Wert, den der Koeffizient von ω_1 eines irreduziblen Summanden in der Tensorprodukt-Darstellung

$$\mathcal{M}\big((a+b+c+d)\cdot\omega_1 + d\cdot\omega_{N-1} + t\cdot\omega_N\big)\otimes\mathcal{M}\big(b\cdot(\omega_{N-1}-\omega_N)\big)\otimes\mathcal{M}\big(c\cdot(\omega_{N-1}-\omega_N)\big)$$

von GL_N[10] haben kann, wobei d über $\mathbb{N}_0$ variiert? –Man setze zur Abkürzung $e := a + b + c + d$. Das obige doppelte Tensorprodukt ist zunächst

$$\begin{aligned}
&\cong \mathcal{M}\big(d\cdot\omega_1 + e\cdot\omega_{N-1} - (d+e+t)\cdot\omega_N\big)^{\vee}\otimes\mathcal{M}(b\cdot\omega_1)^{\vee}\otimes\mathcal{M}(c\cdot\omega_1)^{\vee}\\
&\cong \Big([\mathcal{M}\big(d\cdot\omega_1 + e\cdot\omega_{N-1} - (d+e+t)\cdot\omega_N\big)\otimes\mathcal{M}(b\cdot\omega_1)]\otimes\mathcal{M}(c\cdot\omega_1)\Big)^{\vee};
\end{aligned}$$

das erste Tensorprodukt innen (in eckigen Klammern) ergibt sich mit der Pieri-Regel als

$$\bigoplus_{\substack{i,j,k\in\mathbb{N}_0:\\ j\le d,\ k\le e,\\ i+j+k=b}} \mathcal{M}\big((d+i-j)\cdot\omega_1 + j\cdot\omega_2 + (e-k)\cdot\omega_{N-1} + (k-d-e-t)\cdot\omega_N\big)$$

(mutiplizitätenfrei!), das Tensorprodukt hiervon mit $\mathcal{M}(c\cdot\omega_1)$ ergibt sich –wieder mit Pieri– zu

$$\bigoplus_{\substack{i,j,k,l,m,n,o\in\mathbb{N}_0:\\ j\le d,\ k\le e, i+j+k=b\\ m\le d+i-j,\ n\le j,\ o\le e-k,\\ l+m+n+o=c}} \mathcal{M}\big((d+i-j+l-m)\cdot\omega_1 + (j+m-n)\cdot\omega_2 + n\cdot\omega_3 + (e-k-o)\cdot\omega_{N-1} + (o+k-d-e-t)\cdot\omega_N\big),$$

also ist das gesuchte dreifache Tensorprodukt

$$\mathcal{M}\big((a+b+c+d)\cdot\omega_1 + d\cdot\omega_{N-1} + t\cdot\omega_N)\big)\otimes\mathcal{M}\big(b\cdot(\omega_{N-1}-\omega_N)\big)\otimes\mathcal{M}\big(c\cdot(\omega_{N-1}-\omega_N)\big)$$

isomorph zum Contragredienten der vorgenannten 7-Parameter-direkten Summe, und das ist (wobei reduntante Summationsbedingungen gleich weggelassen wurden)

$$\bigoplus_{\substack{i,j,k,l,m,n,o\in\mathbb{N}_0:\\ n\le j\le d,\ i+j+k=b\\ m+j\le d+i,\ l+m+n+o=c}} \mathcal{M}\big((e-k-o)\cdot\omega_1 + n\cdot\omega_{N-3} + (j+m-n)\cdot\omega_{N-2} + (d+i-j+l-m)\cdot\omega_{N-1} - (i+l-t)\cdot\omega_N\big).$$

Der Koeffizient von ω_1 in einem dieser Summanden ist also

$$\begin{aligned}
= e-k-o &= (a+b+c+d)-k-o\\
&= a+(i+j+k)+(l+m+n+o)+d-k-o\\
&= a+d+i+j+l+m+n.
\end{aligned}$$

[10] Aus ästhetischen Gründen wird der Buchstabe n gleich als Parameter benutzt, deswegen wird hier kurz über die GL eines Vektorraums der Dimension $\dim(V) = N$ gesprochen.

Dies ist sicherlich $\geq a + d \geq a$, und der minimal mögliche Wert a des ω_1-Koeffizienten tritt *genau einmal* auf, nämlich wenn die Parameter i, j, l, m, n und d alle $= 0$ sind, was die Werte $k = b,\ o = c$ der verbleibenden beiden Parameter erzwingt, womit dann ersichtlich alle Summationsbedingungen und Kopplungen der Parameter erfüllt sind; der entsprechende irreduzible Summand gehört zum Gewicht $\omega_{\min} = a \cdot \omega_1 + t \cdot \omega_n$ bzw. zum fallenden n-tupel $\alpha_{\min} = (a+t, t, \ldots, t)$, diese Darstellung ist also $\mathcal{M}(\omega_{\min}) \cong \mathbb{S}_{\alpha_{\min}}(V) = \mathrm{Sym}^a(V) \otimes \det^t$!

Es gilt also das

Lemma 2 *Es seien a, b, c nichtnegative ganze Zahlen, $f := a + b + c$, und sei $t \in \mathbb{Z}$. Tritt dann für ein dominantes ganzes Gewicht $\omega = \sum_{j=1}^n a_j \omega_j$ die irreduzible Darstellung $\mathcal{M}(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \omega_i)$ mit positiver Vielfachheit in*

$$\Big(\bigoplus_{d \in \mathbb{N}_0} \mathcal{M}\big((d+f) \cdot \omega_1 + d \cdot \omega_{n-1} + t \cdot \omega_n\big)\Big) \otimes \mathcal{M}\big(b \cdot (\omega_{n-1} - \omega_n)\big) \otimes \mathcal{M}\big(c \cdot (\omega_{n-1} - \omega_n)\big)$$

auf, so ist der Koeffizient a_1 mindestens $= a$; das einzige derartige Gewicht mit dem Minimalwert $a_1 = a$ ist $\omega_{\min} = a \cdot \omega_1 + t \cdot \omega_n$ mit $\mathcal{M}(\omega_{\min}) \cong \mathrm{Sym}^a(V) \otimes \det^t =: \mathbb{S}_{\alpha_{\min}}(V)$, und dies tritt nur im $(d = 0)$-Summanden rechts auf; ferner ist der Raum von GL_n-Homomorphismen

$$\mathrm{Hom}\Big(\mathbb{S}_{\alpha_{\min}}(V), \Big(\bigoplus_{d \in \mathbb{N}_0} \mathcal{M}\big((d+f) \cdot \omega_1 + d \cdot \omega_{n-1} + t \cdot \omega_n\big)\Big) \otimes \mathcal{M}\big(b \cdot (\omega_{n-1} - \omega_n)\big) \otimes \mathcal{M}\big(c \cdot (\omega_{n-1} - \omega_n)\big)\Big)$$

$$= \mathrm{Hom}\big(\mathbb{S}_{\alpha_{\min}}(V), \underbrace{\mathcal{M}\big((a+b+c) \cdot \omega_1 + t \cdot \omega_n\big) \otimes \mathcal{M}\big(b \cdot (\omega_{n-1} - \omega_n)\big) \otimes \mathcal{M}\big(c \cdot (\omega_{n-1} - \omega_n)\big)}_{\cong \mathrm{Sym}^{a+b+c}(V) \otimes \mathrm{Sym}^b(V^\vee) \otimes \mathrm{Sym}^c(V^\vee) \otimes \det^t}\big)$$

von der Dimension 1*!*

(Diese Formeln stimmen gemäß gesonderter Untersuchung auch in den Fällen $n = 2, 3, 4$, in denen man vielleicht zunächst Zweifel an ihrer Robustheit hat.)

2.4 Maximale Tori und étale Algebren

2.4.1 Konstruktion der Tori

Es sei wieder F ein Körper und $\overline{F}^{sep}$ ein separabel-algebraischer Abschluß von F.

Lemma 3 *Für eine (assoziative unitale) kommutative F-Algebra A von endlicher Vektorraum-Dimension sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- *Als $\overline{F}^{sep}$-Algebra ist $A \otimes_F \overline{F}^{sep}$ zu $\bigoplus_1^{\dim_F(A)} \overline{F}^{sep}$ isomorph.*
- *Als F-Algebra ist A isomorph zu einer endlichen direkten Summe endlicher separabler Körpererweiterungen von F.*

- *Für jede Körpererweiterung $E \supset F$ ist $A \otimes_F E$ als E-Algebra isomorph zu einer endlichen direkten Summe endlicher separabler Körpererweiterungen von E.*

- *Für jede Körpererweiterung $E \supset F$ gilt* $\dim_E(\mathrm{rad}(A \otimes_F E)) = 0$.

- $\operatorname{Spec} A$ *ist ein geometrisch reduziertes Schema über* $\operatorname{Spec} F$.

- $\dim_F(A) = \#\operatorname{Hom}_{F-Alg}(A, \overline{F}^{sep})$

- $\dim_F(A) \leq \#\operatorname{Hom}_{F-Alg}(A, \overline{F}^{sep})$

- *(falls F unendlich:) $A \cong_{(F-Alg)} F[T]/{<}f(T){>}$ mit einem Polynom $f(T) \in F[T]$, das in einem algebraischen Abschluß von F nur einfache Nullstellen hat.*

- *Die Spurpaarung $A \otimes_F A \longrightarrow F$, $(a_1, a_2) \mapsto \mathrm{tr}_F^A(a_1 \cdot a_2)$, ist eine* nichtausgeartete *symmetrische Bilinearform.*

- *(etc.)*

Eine F-Algebra A mit diesen Eigenschaften heißt *étale* F-Algebra. Man setze $S_A := \operatorname{Specmax}(A)$, bezeichne für $\mathfrak{p} \in S_A$ mit $A_\mathfrak{p} := A/\mathfrak{p}$ die Körper-Quotienten dieser Algebra und fixiere einen Isomorphismus von F-Algebren

$$A \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S_A} A_\mathfrak{p}.$$

Dann erfüllen die Einselemente $1_\mathfrak{p} = 1_{A_\mathfrak{q}}$ dieser Teilkörper die folgenden Eigenschaften:

(i) $1_\mathfrak{p} \cdot 1_{\mathfrak{p}'} = \delta_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'} \cdot 1_\mathfrak{p}$ (*Orthogonalität* und *Idempotenz*);

(ii) $1_A = \sum_{\mathfrak{p} \in S_A} 1_\mathfrak{p}$ (*Vollständigkeit*);

(iii) $\mathfrak{p} = \ker(A \to A \cdot 1_\mathfrak{p})$ ist ein maximales Ideal von A, und $A_\mathfrak{p} = A \cdot 1_\mathfrak{p}$ ist eine endliche und separable Körpererweiterung von F (*Maximalität*).

Eine Kollektion von Elementen von A mit diesen Eigenschaften nennt man ein *maximales System orthogonaler Idempotente* von A; eine derartige Direkte-Summen-Zerlegung $A \cong \oplus_{\mathfrak{p} \in S_A} A_\mathfrak{p}$ in Körper bzw. ein derartiges maximales System orthogonaler Idempotente liegen offenbar durch A bzw. $\operatorname{Specmax}(A)$ eindeutig fest.

Eine étale F-Algebra A der Dimension n sei gegeben. Dann hat man $A = \operatorname{End}_A(A) \subset \operatorname{End}_F(A) \cong M_{n\times n}(F)$ und entsprechend $A^* = GL_A(A) \subset GL_F(A) \cong GL_n(F)$; jede Wahl einer F-Vektorraum-Basis von A realisiert also zum einen die Algebra A als eine (maximale kommutative) F-Unteralgebra in $M_{n\times n}(F)$ und zum anderen die kommutative algebraische Gruppe $H/_F := A^*/_F : B_{(\in F-\mathrm{Alg})} \rightsquigarrow (A \otimes_F B)^*$ als eine maximale kommutative Untergruppe in $GL_n/_F$; wegen $H(\overline{F}) = (\overline{F}^*)^n$ „ist“ $A^* \mathrel{\widehat{=}} H$ also ein *maximaler Torus* in $GL_n/_F$. Ebenso konstruiert man aus der Einheitengruppe A^* die F-algebraischen Untergruppen $PA^* := A^*/(F^* \cdot 1_A) \subset PGL_n/_F$ bzw. $A^{(1)}$ (= Norm-1-Einheiten, siehe unten) $\subset SL_n/_F$, die jeweils maximale Tori in diesen halbeinfachen Gruppen sind.

Die „Extremfälle“ sind einerseits:

$$\begin{aligned} H \mathrel{\widehat{=}} A^* \text{ \textit{spaltend} über } F \quad &\Longleftrightarrow \quad H \text{ konjugiert zum Diagonaltorus } T_0 \\ &\Longleftrightarrow \quad A \cong_{(F-\mathrm{Alg})} F^n \\ &\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\mathrm{Hom}_{(F-\mathrm{Alg})}(A,F)}_{=\left(\mathrm{Spec}\, A\right)(F)} \text{ hat } \dim_F(A) \text{ Elemente} \\ &\Longleftrightarrow \quad \ldots \end{aligned}$$

und andererseits

$$A^{(1)} \text{ \textit{anisotroper} } F\text{-Torus} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ ist ein Körper;}$$

derartige (quasispaltende) Tori der Form $E^* \subset GL_n/_F$ für eine Körpererweiterung $E \supset F$ vom Grad n sollen hier als *maximal anisotrope* Tori bezeichnet werden.

Diese Konstruktion maximaler Tori in Allgemeinen Linearen Gruppen ist bedeutsam, da sie die einzige mögliche ist: es gilt das

Lemma 4 Jeder *maximale F-Torus $H \subset GL_n/_F$ ist von der Form*

$$H = A^*/_F \text{ \textit{(wie oben!)}}$$

für eine étale F-Algebra A der Dimension n.

Nämlich: A ist gerade der Zentralisator von $H(F)$ in der F-Algebren-Varietät $M_{n\times n}/_F$! (Das ist Folklore, vgl. z.B. [Ka95, Lemma 1.3.4.1]). –Genauer gilt: die Menge der Konjugationsklassen maximaler F-Tori in $GL_n/_F$ steht in Bijektion mit der Menge der Isomorphieklassen von étalen F-Algebren der Vektorraumdimension n, und dies wiederum „ist“ die erste Galois-Kohomologiemenge von $\mathrm{Gal}(\overline{F}:F)$ mit Koeffizienten in S_n.

2.4.2 Charaktere und Norm

Sei wiederum A eine étale F-Algebra mit Maximalspektrum S_A und sei $\mathfrak{p} \in S_A$. Dann induziert die Komposition der Projektion auf die $\mathfrak{p}$-Komponente mit der Norm von diesem Erweiterungskörper nach F,

$$\phi_{\mathfrak{p}} : A \xrightarrow{a \mapsto a\cdot 1_{\mathfrak{p}}} A/\mathfrak{p} =: A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{N_F^{A_{\mathfrak{p}}}} F$$

einen Gruppenhomomorphismus $N_{\mathfrak{p}} : A^* \longrightarrow F^*$ (die *lokale Norm an* $\mathfrak{p}$) und somit auch einen Morphismus von F-algebraischen Gruppen $H_0 = A^* \xrightarrow{N_{\mathfrak{p}}} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, d.h. ein Element der Charaktergruppe $\mathrm{Hom}_{F-\text{alg. Gr.}}(H_0, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) =: X_F^*(H_0)$; etwas allgemeiner gilt: man hat für jede Körpererweiterung $E \supset F$ eine Inklusion $\mathrm{Specmax}(A \otimes_F E) \hookrightarrow X_E^*(H_0) \subset X^*(H_0)$ mittels $\mathfrak{q} \mapsto N_{\mathfrak{q}}$, und das Bild des Maximalspektrums von $A \otimes_F E$ hierbei ist gerade eine $\mathbb{Z}$-Basis des E-rationalen Charaktergitters $X_E^*(H_0)$.

Die Norm von A, definiert als die Einschränkung $\det\big|_A$ der Determinantenabbildung $\mathrm{End}_F(A) \cong M_{n\times n}(F) \to F$ auf die Unteralgebra $A \subset \mathrm{End}_F(A)$, ist dann das Produkt der eben eingeführten lokalen Normen: für $a \mathrel{\widehat{=}} (\ldots, a_\mathfrak{p}, \ldots)_\mathfrak{p} \in A \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S_A}$ ist $N_F^A(a) = \prod_\mathfrak{p} N_\mathfrak{p}(a_\mathfrak{p})$; hiermit gilt dann natürlich auch $A^* = (N_F^A)^{-1}(F^*)$, und $A^{(1)} = A^* \cap SL_n = (N_F^A)^{-1}(\{1_F\})$.

Es ist also die Norm N_F^A eine unter $A^{(1)}$ *invariante* homogene Polynomfunktion von Grade n. Aber es gilt sogar, daß *jedes* $A^{(1)}$-invariante Polynom in $\mathrm{Sym}^*(A^\vee)$ sich als Linearkombination von Potenzen der Norm herausstellt, anders gesagt:

Lemma 5 *Sei $H_0/_F$ ein maximaler Torus in der algebraischen Gruppe $G_0 \cong GL_n/_F$, und zwar sei $H_0 = A^*/_F$ und $G_0 = GL_F(A)$ für eine étale F-Algebra A der Dimension n. Die Höchstgewichtsdarstellung $\mathcal{M}_d[c+d] = \mathrm{Sym}^d(A^\vee) \otimes \det^{c+d} \cong \mathcal{M}_{GL_n}\big(d\cdot\omega_{n-1} + c\cdot\omega_n\big)$ von G_0 hat* genau dann *nichttriviale Invarianten unter der Norm-*1*-Untergruppe $H_0^{(1)} := H_0 \cap SL_F(A)$, wenn d ein Vielfaches von n ist ($d = e\cdot n,\ e \in \mathbb{N}_0$); der Raum der Invarianten ist in diesem Falle von der Dimension* 1*, er wird erzeugt von $\big(N_F^A\big)^e \otimes 1_{\det^{c+d}}$, der e-ten Potenz der Norm, als Polynomfunktion auf $A \cong F^n$ aufgefaßt.*

Der **Beweis** muß natürlich nur für den spaltenden Fall $A = F^n$ bzw. $H_0 = T_0$ geführt werden – sonst tensoriere man mit $\overline{F}$ ... . Hier ist nun aber (fast nach Definition) wahr, daß ω_n der „einzige" unter $T_0^{(1)}$ invariante Charakter in $X^*(T_0)$ ist - und der affine Koordinatenring $F[H_0]$ (= die Lokalisierung von $\mathrm{Sym}^*(A^\vee)$ am Verschwindungsideal der Koordinaten $\equiv$ lokalen Normen) „ist" ja die Gruppenalgebra von $X^*(T_0)$ über F.

2.4.3 Orbiten und Stratifizierung von $\mathbb{P}^{n-1}$ unter der Einheitengruppe

Für einen derartigen maximalen F-Torus $H_0 \subset GL_n/_F =: G_0/_F$ von der Form $H_0 = A^*/_F$ sollen nun die Orbiten der Gruppe der F-rationalen Punkte $H_0(F) = A^*$ auf dem F-Vektorraum A (bzw. auf $A \setminus \{0\}$ und auf $\mathbb{P}(A) \cong \mathbb{P}^{n-1}$) in Termen der étalen Algebra A beschrieben werden.

Definiert man für eine beliebige Teilmenge $R \subset S_A$ das Element

$$1^{(R)} := \sum_{\mathfrak{p}\in(S_A\setminus R)} 1_\mathfrak{p} \in A,$$

so ist offenbar die Menge

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}^{(R)} &:= A^* \cdot 1^{(R)} \cong \prod_{\mathfrak{p}\notin R} A_\mathfrak{p}^* \\ &= \{(\ldots, a_\mathfrak{p}, \ldots)_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in R \Leftrightarrow a_\mathfrak{p} = 0\} \end{aligned}$$

ein Orbit der natürlichen Operation von A^* auf dem n-dimensionalen F-Vektorraum A, und: *jeder* Orbit ist von dieser Form $\mathfrak{O}^{(R)}$ für (genau) eine Teilmenge $R \subset S_A$.

Es gilt für den Abschluß in der Zariski-Topologie

$$\overline{\mathfrak{O}^{(R)}} = \{(\ldots, a_\mathfrak{p}, \ldots)_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in R \Rightarrow a_\mathfrak{p} = 0\} = \bigcup_{R\subset T} \mathfrak{O}^{(T)}.$$

Bei den „Extremfällen“ $\mathfrak{O}^{(\varnothing)} = A^*$ und $\mathfrak{O}^{(S_A)} = \{0\}$ handelt es sich also um den (jeweils einzigen!) offenen/dichten bzw. abgeschlossenen Orbit, und genau im Falle, daß A selbst ein Körper ist (also $\#S_A = 1$), gilt $A = A^* \dot\cup \{0\}$, d.h. außer diesen beiden gibt es keine weiteren Orbiten.

Im Allgemeinen liegen ersichtlicherweise $2^{\#S_A}$ Orbiten vor; diese sollen nun geeignet angeordnet werden: zunächst wähle man eine Anordnung/Numerierung der Elemente von S_A durch die Zahlen 1 bis $a := \#S_A$, dann ordne man für $0 \leq s \leq a$ alle Teilmengen der Mächtigkeit s lexikographisch an, d.h. für $I := \{i_1 < \ldots < i_s\}$ und $J := \{j_1 < \ldots < j_s\}$ wird gesetzt

$$I \prec_s J :\Longleftrightarrow \exists 1 \leq \sigma \leq s : i_1 = j_1, \ldots, i_\sigma = j_\sigma, i_{\sigma+1} < j_{\sigma+1}.$$

Daraus ergibt sich eine „lexikographische“ Total-Anordnung (oder anders gesehen: eine Numerierung mit den Zahlen 0 bis $2^a - 1$) aller Teilmengen von S_A), indem man setzt

$$I \prec J :\Longleftrightarrow \#I < \#J \ \underline{\text{oder}}\ \#I = \#J =: s,\ I \prec_s J.$$

Es sei nun $I_0 = \varnothing \prec I_1 \mathrel{\widehat{=}} \{1\} \prec \ldots \prec I_{2^a-1} = S_A$ eine Aufzählung aller Teilmengen in der eben festgelegten Anordnung. Man setze nun

$$\mathfrak{O}_i := \bigcup_{0 \leq j \leq i} \mathfrak{O}^{(I_i)}.$$

Es gilt dann:

- $\mathfrak{O}_0 = A^*$;
- $\mathfrak{O}_{2^a-2} = A \setminus \{0\} = \bigcup_{R \neq S_A} \mathfrak{O}^{(R)}$, und $\mathfrak{O}_{2^a-1} = A$;
- alle $\mathfrak{O}_i$ sind A^*-invariante Teilmengen von E;
- für $i < j$ ist immer $\mathfrak{O}_i$ *offen* in $\mathfrak{O}_j$; und
- $\mathfrak{O}_i \setminus \mathfrak{O}_{i-1} = \mathfrak{O}^{(I_i)}$ ist *abgeschlossen* in $\mathfrak{O}_i$;

es liegt also eine A^*-invariante *Stratifizierung* des Vektorraums A durch die lokal abgeschlossenen Teilmengen $(\mathfrak{O}_i)_{0 \leq i \leq 2^a-1}$ vor. Die Strata mit den Nummern von 0 bis $2^a - 2$ stratifizieren $A \setminus \{0\}$, und folglich ist $\mathbb{P}_F(A) \cong \mathbb{P}_{n-1}/F$ durch die $\overline{\mathfrak{O}_i} := \mathfrak{O}_i/F^*$ $(i = 0, \ldots, 2^a - 2)$ A^*-invariant stratifiziert. –Falls A ein Körper ist, also $a = 1$ und $A^* = A \setminus \{0\}$, so ist also $\mathbb{P}^{n-1}(F) = A^*/F^*$ *ein* Orbit.

(<u>Bemerkung</u>: Zieht man nun noch die Charakterisierung der Orbiten $\mathfrak{O}^{(R)}$ und der Strata $\mathfrak{O}_i$ in Termen des (Nicht-)Verschwindens gewisser Basis-Charaktere $N_{\mathfrak{p}}$ heran, so ist also hier die Struktur des $\mathbb{P}^{n-1}$ als „torische Varietät“ bzgl. der *nichtspaltenden* Tori (von simpelstmöglicher Bauart) $A^* \mathrel{\widehat{=}} H_0/F \subset GL_n$ beschrieben worden.)

Im *spaltenden Fall* soll dies noch etwas expliziter angegeben werden: Zur spaltenden étalen Algebra $A = F^n$ gehört der Diagonaltorus $T_0 \subset GL_n/F$, die aus den Koordinatenfunktionen $\underline{t} \mapsto t_i$ bestehende Basis von $X^*(T_0)$ gehört zu dem durch die kanonische Basis $\{e_i\}$ von F^n gegebenen maximalen System orthogonaler Idempotente der Algebra

A; es wird nun Specmax(A) mit $\{1,\ldots,n\}$ identifiziert. In der zugehörigen „Kartenwahl" $A \mathrel{\widehat{=}} F^n = \{(\ldots,x_i,\ldots) \mid x_i \in F\}$ gehört dann zu $R \subsetneqq \{1,\ldots,n\}$ die Varietät

$$\mathfrak{O}^{(R)} = \{(\ldots,x_i,\ldots) \mid x_i = 0 \text{ genau für } i \in R\}.$$

Im Abschnitt 2.1 stand schon der Isomorphismus $P_0^{(1)} \backslash G_0 \cong F^n \setminus \{0\}/_F$ durch $P_0 \cdot g \mapsto {}^t[{}^tg^{-1} \cdot e_1],\ e_1 = {}^t(1,0,\ldots,0)$; in diesem Bilde operiert $\underline{t} = (t_1,\ldots,t_n) \in T_0$ auf $(\ldots,x_i,\ldots)$ durch $\underline{t} \cdot (\ldots,x_i,\ldots) = (\ldots,\frac{x_i}{t_i},\ldots)$.

Es ist hier $\mathfrak{O}^{(\varnothing)} = \mathfrak{O}_0 = \{{}^t(\ldots,x_i,\ldots) \mid \prod_{i=1}^n x_i \neq 0\}$ die „dicke Zelle" , $\mathfrak{O}^{(i)}$ die Koordinaten-Hyperebene $\{x_i = 0,\ \prod_{j\neq i} x_j \neq 0\}$; durch Ankleben all dieser 1-codimensionalen Orbiten entsteht $\mathfrak{O}_n = \mathfrak{O}^{(\varnothing)} \cup \bigcup_{1\le i\le n} \mathfrak{O}^{(i)}$ = (Menge der Vektoren, bei denen *höchstens eine* der Koordinaten x_j Null ist); nun werden bis zu $\mathfrak{O}_{n+\binom{n}{2}}$ = (höchstens *zwei* Koordinaten $= 0$) die Orbiten der Codimension 2 angeklebt; ..., die Prozedur neigt sich bei $\mathfrak{O}_{2^n-3} = \big(F^n \setminus \{0\}\big) \setminus \underbrace{\{{}^t(*,0,\ldots,0)\}}_{=\mathfrak{O}^{(2,\ldots,n)}} = F^n \setminus <e_1>_F$ ihrem Ende zu und erreicht schließlich (zu vorletzt) $\mathfrak{O}_{2^n-2} = F^n \setminus \{0\}$. (Vgl. die Bemerkungen zu gewissen „Bruhat"-Zellen in $\mathbb{P}^{n-1}$ auf Seite 41.)

Am schönsten sieht's natürlich für $n = 2$ aus: die Stratifizierung von $\mathbb{P}^1$ durch die $\overline{\mathfrak{O}_i}$ ist erwartungsgemäß einfach $\mathbb{G}_\mathrm{m} \subset \mathbb{G}_\mathrm{m} \cup \{0\} = \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$.

2.5 Die relative Situation

Nun sei F ein *Zahlkörper* (eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$, vgl. Abschnitt 1.1) und $E \supset F$ ein Erweiterungskörper vom Grade $n := [E : F]$. Betrachtet man $E =: V$ als n-dimensionalen F-Vektorraum und versieht diesen mit einer Basis $\mathcal{B}$, so stattet dies die algebraische Gruppe $G_0/_F := GL_F(V)$ mit einem maximalen Torus T_0, Borel-Untergruppe B_0, Standardparabolischen $P_0, Q_0, R_{0,\Xi}$ (mit Standard-Levi-Untergruppen, Zentren und unipotenten Radikalen ...), Wurzeln α_i und Gewichten ω_i aus, wie in den Abschnitten 2.1 – 2.3 dargelegt. Berücksichtigung der Struktur von E als étale F-Algebra liefert (wie in 2.4.1) einen maximal anisotropen Torus (!) $H_0(\mathrel{\widehat{=}} E^*) \subset G_0$ und entsprechende Zerlegungen von G_0-Varietäten wie $V \setminus \{0\}$ und $\mathbb{P}^{n-1}/_F$ in H_0-Orbiten und Strata.

Es soll ab jetzt für eine der genannten Gruppen $X_0/_F$ mit $X/_\mathbb{Q} := \mathrm{Res}^F_\mathbb{Q}(X_0)$ die *Restriktion der Skalare* (à la Weil) von X_0 nach $\mathbb{Q}$ bezeichnet werden; dies ist die durch den Funktor (auf der Kategorie $\mathbb{Q}$-Alg der kommutativen unitalen $\mathbb{Q}$-Algebren in die Kategorie der Gruppen)

$$X := \mathrm{Res}^F_\mathbb{Q}(X_0) : R \rightsquigarrow X(R) = X_0(R \otimes_\mathbb{Q} F)$$

festgelegte algebraische Gruppe über $\mathbb{Q}$. (Die Konstruktion „geht" natürlich auch für andere F-Varietäten.)

Einige Eigenschaften dieser Konstruktion: es ist G reduktiv mit maximalem Torus T und Borel-Untergruppe B; die $\mathbb{Q}$-(Standard-)Parabolischen von G sind genau die (Skalarrestriktionen der) F-(Standard-)Parabolischen von G_0, die Mengen der Standardparabolischen in beiden Fällen stehen in Bijektion zur Potenzmenge der Basis der bzgl. B_0

positiven F-Wurzeln, wenn man die Basiselemente der letzteren mißbräuchlicherweise mit ihren jeweiligen Restriktionen nach $\mathbb{Q}$ identifiziert. (Es sind also die Parabolischen von G Stabilisatoren von Fahnen im $\mathbb{Q}$-Vektorraum V, die unter F-Multiplikationen stabil sind.) –Der $\mathbb{Q}$-Rang von X ist immer gleich dem F-Rang von X_0; der Torus T (und damit B und G) ist also nicht $\mathbb{Q}$-spaltend, sondern (paradigmatisch!) *quasispaltend*. Auch der in G maximale Torus $H/_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\big(\mathrm{Res}^E_F(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/_E)\big) = \mathrm{Res}^E_{\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/_E) \mathrel{\widehat{=}} E^*/_{\mathbb{Q}}$ ist quasispaltend, sein $\mathbb{Q}$-rationaler Charaktermodul $X^*_{\mathbb{Q}}(H)$ ist vom Range 1 und hat $N := N^E_{\mathbb{Q}}\big|_{E^*}$ als Erzeuger, und $H^{(1)} := \ker(N)$ ist $\mathbb{Q}$-anisotrop.

Jeder über $\mathbb{Q}$ normale Körper K, der F (und damit eine Galois'sche Hülle von F) enthält, ist ein Zerfällungskörper für den $\mathbb{Q}$-Torus $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/_F)$, damit für T (das Produkt von n Kopien hiervon) und für G. Ist K von dieser Art (wichtigste Beispiele: $K = \overline{\mathbb{Q}}$ (Körper der algebraischen Zahlen in $\mathbb{C}$) oder $K = \mathbb{C}$ – oder $K = F$, falls F galois'sch über $\mathbb{Q}$ ist), so gilt

$$G \times_{\mathbb{Q}} K \cong \prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-Alg}}(F,K)} \underbrace{G_0 \times_{F,\sigma} K}_{\cong GL_n/K} \cong \big(GL_n/_K\big)^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-Alg}}(F,K)} \quad , \tag{19}$$

desgleichen für die „in Termen von Linearer Algebra definierten“ Untergruppen von G wie P, Q, $T \ldots$.

[In jedem Falle operiert also $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(F)$ durch $\mathbb{Q}$-algebraische Homomorphismen auf G, nach Basiswechsel zu K (wie eben) also durch Permutation der Faktoren. Jeder dieser Automorphismen von F stabilisiert offensichtlich die Kopie von $GL_n/_{\mathbb{Q}}$, die mittels der funktoriellen Inklusion $GL_n(R) \subset GL_n(R \otimes_{\mathbb{Q}} F) = G(R)$ (via $R = R \otimes 1_F \subset R \otimes_{\mathbb{Q}} F$) in G enthalten ist; ist F normal $\mathrel{\widehat{=}}$ galois'sch über $\mathbb{Q}$, so ist dies sogar genau die Untergruppe der $\mathrm{Gal}(F:\mathbb{Q})$-Fixpunkte auf G. Analoges für die „LA“ -Untergruppen!]

Ab jetzt soll mit $\overline{W}$ die geometrische Weyl-Gruppe von G, d.h. die Weyl-Gruppe von $G \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$ $\big(\cong (GL_n/_{\overline{\mathbb{Q}}})^{[F:\mathbb{Q}]}\big)$ bezeichnet werden, die also zu $S_n^{[F:\mathbb{Q}]}$ isomorph ist; hier gilt, daß W (die F-rationale Weyl-Gruppe von G) gerade die Gruppe der $\mathbb{Q}$-rationalen Punkte von $\overline{W}$ ist und sich unter dem genannten Isomorphismus mit der Diagonal-Untergruppe in $\overline{W}$ identifiziert (Bezeichnungen wie in [Ha92]!).

Ist K ein Zerfällungskörper für G, so haben die irreduziblen algebraischen Darstellungen von $G \times_{\mathbb{Q}} K$ bzgl. obiger Zerlegung in „Koordinaten zu $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-Alg}}(F,K)$“ eine Struktur als Tensorprodukt: ist nämlich

$$\underline{\lambda} = (\ldots, \lambda_\sigma, \ldots)_\sigma \in X^*(T \times_{\mathbb{Q}} K) \cong \prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-Alg}}(F,K)} X^*(T_0 \times_{F,\sigma} K) \cong \big(\mathbb{Z}^n\big)^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-Alg}}(F,K)}$$

ein dominantes Gewicht (d.h. jedes λ_σ ist dominant), so „ist“ die zugehörige Darstellung

$$\mathcal{M}_G(\underline{\lambda}) = \bigotimes_\sigma \mathcal{M}_{G_\sigma}(\lambda_\sigma).$$

Die in der Darstellung $\mathcal{M}_G(\underline{\lambda})$ auftretenden T-Gewichte sind natürlich gerade die Summen (über σ) der $(T_0 \times_{F,\sigma} K)$-Gewichte von den $\mathcal{M}_{G_\sigma}(\lambda_\sigma)$. Ist nun *jeder* dieser lokalen Faktoren eine „Polynom-verwandte“ Darstellung, d.h. eine der Darstellungen $\mathrm{Sym}^{d_\sigma}(V^{(\vee)}) \otimes \det^{c_\sigma}$, also $\lambda_\sigma = d_\sigma \cdot \omega_{1,\sigma} + c_\sigma \cdot \omega_{n,\sigma}$ <u>oder</u> $= d_\sigma \cdot \omega_{n-1,\sigma} + (c_\sigma + d_\sigma) \cdot \omega_{n,\sigma}$, so daß in ihnen die Vielfachheiten aller Gewichtsräume 1 sind, so sind auch alle Vielfachheiten von T-Gewichtsräumen in einer solchen „Polynom-artigen“ Darstellung = 1!

Es werden jetzt Informationen über die Gruppen von Punkten $G(\mathbb{Q}_v), H(\mathbb{Q}_v)$ etc. über den Komplettierungen $\mathbb{Q}_v$ von $\mathbb{Q}$ an Stellen v benötigt. –Man hat ja kanonisch $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_v \cong \bigoplus_{\mathfrak{v}|v} F_{\mathfrak{v}}$ als étale $\mathbb{Q}_v$-Algebren (vgl. Abschnitt 1.1); es folgt

$$E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_v \cong (E \otimes_F F) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_v \cong E \otimes_F \Big(\bigoplus_{\mathfrak{v}|v} F_{\mathfrak{v}}\Big) \cong \bigoplus_{\mathfrak{v}|v} (E \otimes_F F_{\mathfrak{v}})$$

(jeweils kanonisch), wobei im Allgemeinen $E \otimes_F F_{\mathfrak{v}}$ kein Körper mehr, aber jedenfalls eine étale $F_{\mathfrak{v}}$-Algebra (der Vektorraumdimension n) ist.

Unter „denselben“ Isomorphismen hat man

$$G(\mathbb{Q}_v) \cong GL_{F\otimes\mathbb{Q}_v}(V \otimes \mathbb{Q}_v) \cong GL_{F\otimes\mathbb{Q}_v}\Big(\bigoplus_{\mathfrak{v}|v} V \otimes_F F_{\mathfrak{v}}\Big) \cong \prod_{\mathfrak{v}|v} GL_{F_{\mathfrak{v}}}(V \otimes_F F_{\mathfrak{v}}) \cong \prod_{\mathfrak{v}|v} GL_n(F_{\mathfrak{v}}),$$

und hierin liegen die $\mathbb{Q}_v$-Punkte des maximalen Torus' H:

$$H(\mathbb{Q}_v) = (E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_v) \cong \Big(\bigoplus_{\mathfrak{v}|v} (E \otimes_F F_{\mathfrak{v}})\Big)^* \cong \prod_{\mathfrak{v}|v} (E \otimes F_{\mathfrak{v}})^*$$

(in entsprechender Sortierung); man beachte, daß all diese Punkte-Gruppen natürlicherweise in der starken Topologie $\mathbb{Q}_v$-Lie-Gruppen sind.

Auf die lokale Situation $GL_{F_{\mathfrak{v}}}(V \otimes_F F_{\mathfrak{v}}) = G_0(F_{\mathfrak{v}}) \supset H_0(F_{\mathfrak{v}}) = (E \otimes F_{\mathfrak{v}})^*$ an einer Stelle $\mathfrak{v}$ von F findet also der Abschnitt 2.4.1 (mit dortigem $F :\widehat{=} F_{\mathfrak{v}}$ hier und $A :\widehat{=} E \otimes_F F_{\mathfrak{v}}$) entsprechend Anwendung, wobei die Menge $S_A :\widehat{=} \mathrm{Specmax}(E \otimes_F F_{\mathfrak{v}})$ natürlich stark von den Spezifika der Stelle $\mathfrak{v}$ abhängt. –Für *endliche* Stellen $\mathfrak{v} \widehat{=} \mathfrak{p} \in \mathrm{Specmax}(\mathcal{O}_F)$ wird dies im Kapitel 3 weiterverfolgt; die Situation an den archimedischen (insbesondere den komplexen) Stellen wird im Kapitel 4 untersucht.

3 Lokale Verkettungsoperatoren: nichtarchimedische Stellen

Es sei F ein nichtarchimedischer lokaler Körper mit der Bewertung $v = v_F : F^* \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, es sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F := \{f \in F \mid v(f) \geq 0\}$ sein Ganzzahlring (ein diskreter Bewertungsring) mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_F := \{f \in F \mid v(f) > 0\}$. Ein uniformisierendes Element $\pi = \pi_F$ werde fixiert, d.h. $\mathfrak{m} = \mathcal{O} \cdot \pi = (\pi)$, $v(\pi) = 1$.

3.1 Die Maximalparabolische P und von ihr aus induzierte Darstellungen

Es sei $n \geq 2$, V ein F-Vektorraum der Dimension n, $v_0 \in V \setminus \{0\}$ ein Vektor und $< v_0 >_F = F \cdot v_0$ die Gerade durch v_0. Ferner sei $\Lambda \subset V$ ein (vollständiges) Gitter in V, d.h. ein (automatisch torsionsfreier und damit freier) $\mathcal{O}$-Untermodul vom Rang n, also $F \cdot \Lambda = \Lambda \otimes_{\mathcal{O}} F = V$. Mit $G/_F$ werde die lineare algebraische F-Gruppe $GL_F(V) \cong GL_n/_F$ bezeichnet. Für $v_0 \in V$ wie oben ist dann

$$P := P_{v_0} := \mathrm{Stab}_G(<v_0>_F) = \{g \in G \mid g \cdot v_0 \in \mathbb{G}_\mathrm{m} \cdot v_0\}$$

eine über F definierte maximale parabolische Untergruppe; hiermit gilt: $G/P = \mathbb{P}(V^\vee) \cong \mathbb{P}^n/_F$, und $P \backslash G \cong \mathbb{P}(V)$ durch $Pg \mapsto [g^{-1} \cdot v_0]$, vgl. Abschnitt 2.1.

Zu dem Gitter (der maximalen kompakten Untergruppe !) $\Lambda \subset V$ gehört die maximalkompakte Untergruppe $K := \mathrm{Stab}_G(\Lambda) = GL_{\mathcal{O}}(\Lambda) \cong GL_n(\mathcal{O})$ von $G(F)$. Es existiert genau ein $r \in \mathbb{Z}$ mit $\pi^r \cdot v_0 \in \Lambda \setminus \pi \cdot \Lambda$; im folgenden werde $r = 0$ angenommen, d.h. $\Lambda/(\mathcal{O} \cdot v_0)$ ist torsionsfrei; v_0 heißt ein *primitiver Vektor* von Λ. (Hiervon bleibt P unberührt.)

Man verfügt dann über die <u>Iwasawa-Zerlegung</u> (zu K und P, bzw. zu v_0 und Λ) von $G(F)$:

$$G(F) = P(F) \cdot K;$$

man beachte, daß wegen der Primitivitätsannahme gilt

$$P(F) \cap K = P(\mathcal{O}) \cong \big(\mathcal{O}^* \times GL_{n-1}(\mathcal{O})\big) \ltimes (\mathcal{O}^{n-1}).$$

(–Zur Berechnung der Zerlegung von Elementen vgl. Abschnitt 5.1.)

Nun sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V mit v_0 als erstem Vektor, $\mathcal{F}$ die zugehörige vollständige Fahne, und T und B seien der maximale spaltende Torus und die Borel-Untergruppe zu den getroffenen Wahlen (vgl. Abschnitt 2.1), so daß P eine Standard-parabolische mit der Standard-Levi-Untergruppe M_P wird. Es mögen dann für $i = 1, \ldots, n(-1)$ mit ω_i die fundamentaldominanten Gewichte von G bzgl. B und T bezeichnet werden. Der Charaktermodul $X^*(P) = X^*(M_P)$ ist dann über $\mathbb{Z}$ erzeugt von den Charakteren ω_1 und $(\omega_n - \omega_1)$, die ein $\underline{p} = \begin{pmatrix} a & \underline{u} \\ 0 & \underline{m} \end{pmatrix} \in P(F)$ [mit $a \in F^*$, $\underline{u} \in F^{n-1}$ und $\underline{m} \in GL_{n-1}(F)$] auf $\omega_1(\underline{p}) = a$ bzw. auf $\big(\omega_n - \omega_1\big)(\underline{p}) = \det(\underline{m})$ abbilden.

Für stetige Charaktere $\varphi_j : F^* \to \mathbb{C}^*$ ($j = 1, 2$) betrachte man den stetigen Charakter $\underline{\varphi}$ „vom algebraischen Typ“

$$\underline{\varphi} : P(F) \to \mathbb{C}^*, \quad \underline{\varphi}(\underline{p}) = \big(\varphi_1 \circ \omega_1\big) \cdot \big(\varphi_2 \circ (\omega_n - \omega_1)\big)(\underline{p}) = \varphi_1(a) \cdot \varphi_2\big(\det(\underline{m})\big).$$

Es bezeichne dann

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\underline{\varphi}} &:= \operatorname{Ind}_{P(F)}^{G(F)}(\underline{\varphi}) \\ &= \{\phi : G(F) \to \mathbb{C} \text{ lokal konstant } \mid \forall p \in P(F), x \in G(F) : \ \phi(p \cdot x) = \underline{\varphi}(p) \cdot \phi(x)\}\end{aligned}$$

die von P nach G aus dem Charakter $\underline{\varphi}$ (naiv) induzierte Darstellung, auf der $g \in G(F)$ bekanntlich durch

$$\big(g.\phi\big)(x) = \phi(x \cdot g)$$

operiert. –Setzt man $\varphi := \frac{\varphi_1}{\varphi_2} : F^* \to \mathbb{C}^*$ und schreibt man $\mathbf{1}$ für den trivialen Charakter auf F^* (oder –später– auf anderen Gruppen), so überlegt man sich leicht, daß ein (ziemlich kanonischer) Isomorphismus von $G(F)$-Darstellungen

$$\mathcal{J}_{\underline{\varphi}} \cong \underbrace{\operatorname{Ind}_{P(F)}^{G(F)}\big((\varphi \circ \omega_1) \cdot (\mathbf{1} \circ (\omega_n - \omega_1))\big)}_{=:\operatorname{Ind}_{P(F)}^{G(F)}(\varphi) =: \mathcal{J}_\varphi} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \cdot (\varphi_2 \circ \det)$$

besteht, der einem „erlaubt", bei Bedarf $\varphi_2 = \mathbf{1}$ anzunehmen und $\mathcal{J}_\varphi$ zu betrachten.

–Man kann sich Funktionen im Raum $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$ wie folgt „herstellen“ : auf dem Raum der SCHWARTZ-Funktionen auf V,

$$\mathcal{S}(V) := \{f : V \to \mathbb{C} \mid f \text{ lokal konstant, } \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt}\},$$

operiert $G(F) \ni g$ in der offensichtlichen Weise: $\big(g.f\big)(v) = f(g^{-1} \cdot v)$, und somit ist auch $\mathcal{S}(V) \otimes (\varphi_2 \circ \det)$ eine Darstellung von $G(F)$ (mit freundlichen Eigenschaften). Man definiere nun für $g \in G(F)$ und $f \in \mathcal{S}(V)$:

$$j\big(f \otimes (\varphi_2 \circ \det)\big)(g) := (\varphi_2 \circ \det)(g) \cdot \int_{F^*} f\Big(\big((a \cdot \mathbb{1}_n) \cdot g\big)^{-1} v_0\Big) \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1}(a) \ \mathrm{d}^\times a,$$

falls dieser Ausdruck sinnvoll ist; hierbei ist „ $\mathrm{d}^\times a$“ dasjenige HAAR-Maß auf F^*, für welches das Volumen $\mathrm{d}^\times a(\mathcal{O}^*) = 1$ ist.

Zunächst werde die Konvergenz aller auftretenden Integrale vorausgesetzt, dann hat man für $\underline{p} = \begin{pmatrix} z & u \\ 0 & \underline{m} \end{pmatrix} \in P(F)$, d.h. $p^{-1} v_0 = z^{-1} \cdot v_0$:

$$\begin{aligned}
& j\big(f \otimes (\varphi_2 \circ \det)\big)(\underline{p} \cdot g) \\
&= \varphi_2\big(z \cdot \det(m) \cdot \det(g)\big) \cdot \int_{F^*} f(a^{-1} \cdot g^{-1} \cdot \underline{p}^{-1} \cdot v_0) \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1}(a) \ \mathrm{d}^\times a \\
&= \varphi_2\big(z \cdot \det(m) \cdot \det(g)\big) \cdot \int_{F^*} f((za)^{-1} \cdot g^{-1} \cdot v_0) \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1}(za) \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_2}(z) \ \mathrm{d}^\times a \\
&= \varphi_1(z) \cdot \varphi_2\big(\det(m)\big) \cdot \varphi_2\big(\det(g)\big) \cdot \int_{F^*} f((a \cdot g)^{-1} \cdot v_0) \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1}(a) \ \mathrm{d}^\times a \\
&= \underline{\varphi}(\underline{p}) \cdot j\big(f \otimes (\varphi_2 \circ \det)\big)(g),
\end{aligned}$$

also ist j eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\mathcal{S}(V)\otimes(\varphi_2\circ\det)\to\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$. –Ferner gilt (wobei $x\in G(F)$):

$$\begin{aligned}
& j\Big(g.\big(f\otimes(\varphi_2\circ\det)\big)\Big)(x)\\
= {} & \varphi_2\big(\det(x)\cdot\det(g)\big)\cdot\int_{F^*}(g.f)(a^{-1}\cdot x^{-1}\cdot v_0)\cdot\frac{\varphi_2}{\varphi_1}(a)\ \mathrm{d}^\times a\\
= {} & \varphi_2\big(\det(x\cdot g)\big)\cdot\int_{F^*}f((axg)^{-1}v_0)\cdot\frac{\varphi_2}{\varphi_1}(a)\ \mathrm{d}^\times a\\
= {} & j\big(f\otimes(\varphi_2\circ\det)\big)(x\cdot g)\\
= {} & \Big(g.\big(j(f\otimes(\varphi_2\circ\det)\big)\Big)(x),
\end{aligned}$$

also:

- (falls das Integral existiert:) j ist ein Verkettungsoperator/ Homomorphismus von $G(F)$-Darstellungen;
- (setze $x=1$ und betrachte die vorletzte Zeile:) es genügt, die Existenz der Integrale

$$\begin{aligned}
& j\big(f\otimes(\varphi_2\circ\det)\big)(\mathbb{1}_n)\\
= {} & \int_{F^*}f(a^{-1}\cdot v_0)\cdot\frac{\varphi_2}{\varphi_1}(a)\ \mathrm{d}^\times a\\
= {} & \int_{F^*}f(b\cdot v_0)\cdot\frac{\varphi_1}{\varphi_2}(b)\ \mathrm{d}^\times b
\end{aligned}$$

  für *alle* $f\in\mathcal{S}(V)$ nachzuweisen,

<u>aber</u>: letzterer Ausdruck ist $=\zeta_F\big(f\big|_{F\cdot v_0},\frac{\varphi_1}{\varphi_2},(s=0)\big)$, das (lokale) TATE'sche Zeta-Integral für die SCHWARTZ-Funktion (!) $f\big|_{F\cdot v_0}$ auf dem eindimensionalen F-Vektorraum $F\cdot v_0$ und den Quasicharakter $\varphi=\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ auf F^*. Es ist wohlbekannt, daß derartige Integrale existieren, wenn der „Realteil" (der Absolutbetrag) des Charakters φ groß genug ist, und daß man über meromorphe Fortsetzung in den Raum „aller" Charaktere auf F^* verfügt, wobei ein Pol nur bei $\varphi=\mathbf{1}$ vorliegen kann, vgl. die Rechnung unten.

Falls der Charakter φ_2 *unverzweigt* ist (d.h. $\varphi_2\big|_{\mathcal{O}_F^*}\equiv\mathbf{1}$) –und dies werde im folgenden angenommen–, dann enthält die Darstellung $\mathcal{S}(V)\otimes(\varphi_2\circ\det)$ K-invariante Elemente, sog. *sphärische Vektoren*, nänlich genau die komplexen Linearkombinationen der Funktionen $\chi_{\Lambda'}\otimes(\varphi_2\circ\det)$, d.h. der mit φ_2 verschränkten charakteristischen Funktionen $\chi_{\Lambda'}$ von Gittern Λ', die von K invariant gelassen werden –aber: die K-invarianten Gitter Λ' sind *genau* diejenigen, die durch Homothetie aus Λ hervorgehen, oder anders gesagt: die Gitter $\pi^r\cdot\Lambda$, für beliebiges $r\in\mathbb{Z}$. Wegen der Verkettung-Eigenschaft von j ist dann die Funktion $j\big(\chi_{\pi^r\cdot\Lambda}\otimes(\varphi_2\circ\det)\big)\in\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$ ebenfalls K-invariant, und man hat

$$\begin{aligned}
j\big(\chi_{\pi^r\cdot\Lambda}\otimes(\varphi_2\circ\det)\big)(\mathbb{1}_n) &= \int_{F^*}\chi_{\pi^r\cdot\Lambda}(a\cdot v_0)\cdot\varphi(a)\ \mathrm{d}^\times a\\
&= \int_{F^*\cap(\pi^r\cdot\mathcal{O})}\varphi(a)\ \mathrm{d}^\times a\quad\text{(da } v_0 \text{ primitiv in } \Lambda)\\
&= \sum_{k\geq r}\varphi(\pi)^k\cdot\int_{\mathcal{O}^*}\varphi(\epsilon)\ \mathrm{d}^\times\epsilon.
\end{aligned}$$

Nun gilt –wie gewöhnlich–

$$\int_{\mathcal{O}^*} \varphi(\epsilon)\ \mathrm{d}^\times\epsilon = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad \varphi|_{\mathcal{O}^*} \not\equiv \mathbf{1}; \\ 1, & \text{falls} \quad \varphi \text{ unverzweigt.} \end{cases}$$

Im verzweigten Falle bildet der (nichttriviale!) Verkettungsoperator j also den Raum der sphärischen Vektoren auf $\{0\}$ ab, falls aber $\varphi = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ *unverzweigt* und $\neq \mathbf{1}$ ist (d.h. ebenso wie φ_2 ist auch φ_1 trivial auf der Einheitengruppe, aber $\varphi_1 \neq \varphi_2$), dann gilt:

$$j\big(\chi_{\pi^r\cdot\Lambda} \otimes (\varphi_2 \circ \det)\big)(\mathbb{1}_n) = \frac{\varphi(\pi)^r}{1-\varphi(\pi)},$$

insbesondere

$$j\big(\chi_\Lambda \otimes (\varphi_2 \circ \det)\big)(\mathbb{1}_n) = \frac{1}{1-\varphi(\pi)} = L_F(\varphi, s=0)$$

(nach evtl. meromorpher Fortsetzung); das Bild des Raums der sphärischen Vektoren unter j ist eindimensional! [Nähere Betrachtung dieser Rechnung zeigt, daß für $\varphi = \mathbf{1}$ das Integral $j\big(f \otimes (\varphi_2 \circ \det)\big)$ höchstens/genau für Funktionen f konvergiert, für die $0 \notin \operatorname{supp}(f)$ gilt.]

Die Standard-sphärische Funktion

$$\phi_{0,\underline{\varphi}} : G(F)(= P(F)\cdot K) \to \mathbb{C}, \quad p\cdot k \mapsto \underline{\varphi}(p)$$

in $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}^K$ (die es offenbar genau für $\underline{\varphi}$ unverzweigt „gibt“) ist das Bild unter $j = j_{v_0,\Lambda,\underline{\varphi}}$ der Funktion

$$\big([1-\varphi(\pi)]\cdot\chi_\Lambda \otimes (\varphi_2 \circ \det)\big) \in \big(\mathcal{S}(V) \otimes (\varphi_2 \circ \det)\big)^K.$$

(Diese Konstruktion findet sich schon (spätestens) bei R. Godement in Sém. Bourbaki 278 unter dem Namen „Thetareihen“ , implizit (und im globalen Kontext) bei [Wi85], aufgegriffen in der Diplomarbeit von U. Weselmann, …)

3.2 Vom maximalen Torus H aus induzierte Darstellungen

Es sei nun E eine n-dimensionale étale F-Algebra. Dann ist (vgl. Abschnitt 2.4.1) der F-Torus $H/_F :=$„$E^*/_F$“$\subset G/_F$ ein maximaler Torus in $G = GL_n$, und jeder maximale Torus entsteht auf diese Weise. Es ist $\operatorname{Specmax}(E) =: S_E$ eine endliche Menge der Mächtigkeit $a := \#S_E \leq n$; für $\mathfrak{q} \in S_E$ ist $E_\mathfrak{q} := E/\mathfrak{q}$ eine endliche separable Körpererweiterung von F, und man hat $E \cong \bigoplus_{\mathfrak{q}\in S_E} E_\mathfrak{q}$ als F-Algebren (da E étale über F ist). Dieser Isomorphismus entspricht der Angabe eines *maximalen Systems von orthogonalen Idempotenten*, nämlich dem System der Einselemente $(1_{E_\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}\in S_E}$ der „eingebetteten“ Körper-Summanden.

Der Torus H ist folglich zum quasispaltenden Torus $\prod_\mathfrak{q} \operatorname{Res}_F^{E_\mathfrak{q}}(\mathbb{G}_m/_{E_\mathfrak{q}})$ isomorph. Die Ganzzahlringe $\mathcal{O}_{E_\mathfrak{q}} \subset E_\mathfrak{q}$ sind wohldefiniert (und sind jeweils diskrete Bewertungsringe und vollständige Gitter in den F-Vektorräumen $E_\mathfrak{q}$), und man setzt

$$\mathcal{O}_E := \bigoplus_{\mathfrak{q}\in S_E} \mathcal{O}_{E_\mathfrak{q}} \text{ (unter obigem Isomorphismus);}$$

dies ist eine Maximalordnung in E und damit ein vollständiges $\mathcal{O}_F$-Gitter in E.

Man verfügt über die *Normabbildung* $N = N_F^E : E \to F$, die gleich dem Produkt $\prod_{\mathfrak{q}} N_F^{E_{\mathfrak{q}}}$ der „lokalen" Normen $N_F^{E_{\mathfrak{q}}} =: N_{\mathfrak{q}}$ der Komponenten in den einzelnen Körper-Summanden ist, vgl. Abschnitt 2.4.2. Klarerweise hat man $N_F^E(\mathcal{O}_E^*) \subset \mathcal{O}_F^*$.

Nun werde ein Charakter $\underline{\eta} : E^* = H(F) \to \mathbb{C}^*$ betrachtet, der sich in der genannten Sehensweise als ein Produkt von Charakteren $\eta_{\mathfrak{q}} : E_{\mathfrak{q}}^* \to \mathbb{C}^*$ darstellt: $\underline{\eta}\big((\ldots, e_{\mathfrak{q}}, \ldots)\big) = \prod_{\mathfrak{q}} \eta_{\mathfrak{q}}(e_{\mathfrak{q}})$; es soll natürlich $\underline{\eta}$ *unverzweigt* heißen, falls alle $\eta_{\mathfrak{q}}$ unverzweigt, d.h. auf der jeweiligen Einheitengruppe $\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{q}}}^*$ trivial sind.

Der F-rationale Charaktermodul $X_F^*(H/F)$ des F-Torus H hat als eine $\mathbb{Z}$-Basis die Menge $\{N_{\mathfrak{q}} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Specmax}(E)\}$, vgl. Abschnitt 2.4.2; man wird sagen, daß der Charakter $\underline{\eta}$ *F-algebraisch*[11] ist, falls jede seiner „Koordinaten" $\eta_{\mathfrak{q}}$ über die jeweilige Norm faktorisiert, d.h. $\eta_{\mathfrak{q}}(e_{\mathfrak{q}}) = \tilde{\eta}_{\mathfrak{q}}\big(N_{\mathfrak{q}}(e_{\mathfrak{q}})\big)$ für stetige Charaktere $\tilde{\eta}_{\mathfrak{q}} : F^* \to \mathbb{C}^*$ zu allen $\mathfrak{q}$, weiterhin soll $\underline{\eta}$ ein *diagonaler* algebraischer Charakter heißen, falls alle die zugehörigen $\tilde{\eta}_{\mathfrak{q}}$ *gleich* sind, d.h. falls $\underline{\eta} = \tilde{\eta} \circ N_F^E$ mittels eines stetigen Charakters $\tilde{\eta}$ von F^* über die Norm faktorisiert. Beim Verschränken der dem algebraischen Charakter $\underline{\eta}$ zugeordneten eindimensionalen Darstellung von $H(F)$ mit einem diagonalen Charakter ergibt sich also

$$\underline{\eta} \otimes (\psi \circ N_F^E) = (\ldots, (\tilde{\eta}_{\mathfrak{q}} \cdot \psi) \circ N_{\mathfrak{q}}, \ldots)_{\mathfrak{q}}.$$

–Man definiert nun die von H nach G aus dem Charakter $\underline{\eta}$ induzierte Darstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\underline{\eta}} &:= \operatorname{Ind}_{H(F)}^{G(F)}(\underline{\eta}) \\ &= \{\psi : G(F) \to \mathbb{C} \text{ lokal konstant } \mid \forall h \in H(F), x \in G(F) :\ \psi(h \cdot x) = \underline{\eta}(h)\psi(x)\}, \end{aligned}$$

auf der $g \in G(F)$ wiederum durch $\big(g.\psi\big)(x) = \psi(x \cdot g)$ operiert.

[Bemerkung: Im Gegensatz zu den „parabolisch-induzierten" $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$, die zulässige (oft irreduzible) Darstellungen der Gruppe $G(F)$ sind („weil" der Quotient $P\backslash G$ kompakt ist), sind diese „torisch-induzierten" $\mathcal{K}_{\underline{\eta}}$ sehr „große" (*nicht* zulässige) Darstellungen; siehe die Bemerkung auf Seite 75.]

3.3 Räume von Verkettungsoperatoren zwischen P- und H-induzierten Darstellungen

Das Interesse gilt hier nun den Räumen von Verkettungsoperatoren zwischen den beiden eben eingeführten Arten induzierter Darstellungen

$$\operatorname{Hom}_{G(F)}(\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}, \mathcal{K}_{\underline{\eta}}) = \operatorname{Hom}_{G(F)}\left(\operatorname{Ind}_{P(F)}^{G(F)}(\underline{\varphi}), \operatorname{Ind}_{H(F)}^{G(F)}(\underline{\eta})\right),$$

die gemäß (dem einfachen Fall) der Frobenius-Reziprozität auch als die Räume

$$\operatorname{Hom}_{H(F)}\left(\operatorname{Res}_{H(F)}^{G(F)}\left(\operatorname{Ind}_{P(F)}^{G(F)}(\underline{\varphi})\right), \mathbb{C} \cdot \underline{\eta}\right) = \operatorname{Hom}_{E^*}(\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}\big|_{E^*}, \underline{\eta})$$

aufgefaßt werden können/sollen. Diese Räume hängen natürlich nicht von den individuell gewählten Untergruppen $P, H \subset G$, sondern nur von deren jeweiligen Isomorphie-(d.h. hier: Konjugations-)Klassen ab.

[11] das ist *nicht* der Standard-Algebraizitätsbegriff ... vielleicht keine gut gewählte Bezeichnung

Die nachfolgende, leicht zu verifizierende allgemeine Bemerkung erlaubt ferner eine gewisse Vereinfachung durch Einschränkung der Betrachtung auf Charaktere von (etwas) einfacherer Gestalt:

Für eine algebraische Untergruppe $Q/_F$ der Gruppe $G/_F$, Darstellungen $\rho : Q(F) \to GL_{\mathbb{C}}(M)$, $\sigma : Q(F) \to GL_{\mathbb{C}}(N)$ und einen Charakter $\psi : F^* \to \mathbb{C}^*$ hat man Isomorphismen

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{Q(F)}^{G(F)}\left(\rho \otimes (\psi \circ \det)\big|_{Q(F)}\right) &\cong (\mathrm{Ind}_{Q(F)}^{G(F)}\rho) \otimes (\psi \circ \det);\\ \mathrm{Hom}_{Q(F)}\left(M \otimes (\psi \circ \det)\big|_{Q(F)}, N \otimes (\psi \circ \det)\big|_{Q(F)}\right) &\cong \mathrm{Hom}_{Q(F)}(M, N).\end{aligned}$$

Nachdem auf diese Weise mit $\varphi_2^{-1} \circ \det$ „verschränkt“ und $\underline{\eta} \cdot (\varphi_2^{-1} \circ \det) =: \underline{\eta}'$ gesetzt wurde, stehen Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}, \mathcal{K}_{\underline{\eta}}) \cong \mathrm{Hom}_{G(F)}(\mathcal{J}_{\varphi}, \mathcal{K}_{\underline{\eta}'}) \cong \mathrm{Hom}_{E^*}(\mathcal{J}_{\varphi}\big|_{E^*}, \mathbb{C} \cdot \underline{\eta}')$$

zur Verfügung, und im Folgenden wird also der hier eingeführte Raum von E^*-Verkettungsoperatoren untersucht. –Der Charakter $\underline{\eta}' : H(F) \to \mathbb{C}^*$ vereinfacht sich hierbei im Falle, daß $\underline{\eta}$ algebraisch ist, zu $\underline{\eta}' = (\ldots, \frac{\eta_{\mathfrak{q}}}{\varphi_2} \circ N_{\mathfrak{q}}, \ldots)_{\mathfrak{q}} =: (\ldots, \eta'_{\mathfrak{q}}, \ldots)$ und im diagonalen Falle sogar zu $\underline{\eta}' = \frac{\tilde{\eta}}{\varphi_2} \circ N_F^E$.

Die Gruppen P und H enthalten beide das Zentrum Z von G der Skalarmatrizen –wenn E ein Körper, also H „maximal-anisotrop“ ist, gilt sogar $H \cap P = Z$–, und eine erste Bedingung an die Nichttrivialität des Raumes $\mathrm{Hom}_{G(F)}(\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}, \mathcal{K}_{\underline{\eta}})$ $\big($oder des isomorphen Raumes $\mathrm{Hom}_{E^*}(\mathcal{J}_{\varphi}\big|_{E^*}, \underline{\eta}')\big)$ist natürlich, daß die Einschränkungen auf Z der beiden induzierenden Charaktere $\underline{\varphi}$ und $\underline{\eta}$ übereinstimmen:

$$(\diamondsuit_Z): \quad \underline{\varphi}\big|_{Z(F)} = \underline{\eta}\big|_{Z(F)};$$

in „Koordinaten“ ausgedrückt: die Charaktere $z \mapsto \underline{\varphi}(z \cdot \mathbb{1}_n) = \varphi_1(z) \cdot \varphi_2(z)^{n-1}$ und $z \mapsto \underline{\eta}(z \cdot \mathbb{1}_n) = \prod_{\mathfrak{q}}(\eta_{\mathfrak{q}} \circ N_{\mathfrak{q}})(z \cdot 1_{E_{\mathfrak{q}}})$ auf F^* müssen übereinstimmen; wegen $N_{\mathfrak{q}}(z \cdot 1_{E_{\mathfrak{q}}}) = z^{[E_{\mathfrak{q}}:F]}$ und $\sum_{\mathfrak{q}}[E_{\mathfrak{q}} : F] = n$ heißt das $\varphi_1 \cdot \varphi_2^{n-1} \stackrel{!}{=} \prod_{\mathfrak{q}} \eta_{\mathfrak{q}}^{[E_{\mathfrak{q}}:F]}$ bzw. in Termen der „normalisierten“ Charaktere auf F^*

$$(\diamondsuit'_Z): \quad \varphi = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \stackrel{!}{=} \underline{\eta}'\big|_Z = \prod_{\mathfrak{q}}(\frac{\eta_{\mathfrak{q}}}{\varphi_2})^{[E_{\mathfrak{q}}:F]} = \prod_{\mathfrak{q}}(\eta'_{\mathfrak{q}})^{[E_{\mathfrak{q}}:F]}.$$

Ab jetzt möge diese Relation gelten!

3.4 Filtrierung der Hom-Räume und lokale Multiplizität 1

Zur Untersuchung des Raums von Verkettungsoperatoren

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}, \mathcal{K}_{\underline{\eta}}) \cong \mathrm{Hom}_{E^*}(\mathcal{J}_{\varphi}\big|_{E^*}, \underline{\eta}')$$

soll nun $\mathcal{J}_{\varphi}$ als ein Raum von Funktionen auf $E \setminus \{0\}$ gedeutet werden, zu dessen Studium dann die E^*-invariante Stratifizierung dieser Varietät eingesetzt wird.

–Aus den Tatsachen

- $P(F) = Z(F) \times P^{(1)}(F)$,
- $P^{(1)}(F) \subset \ker\big((\varphi \circ \omega_1), (\mathbf{1} \circ (\omega_n - \omega_1))\big)$,
- $P^{(1)}(F) \backslash G(F) \cong E \setminus \{0\}$ (unter $P^{(1)}(F) \cdot g \mapsto g^{-1} \cdot v_0$) und
- $Z(F) \widehat{=} F^*$

folgt, daß der Funktionenraum

$$\mathsf{C}^\infty_{c \bmod Z}(E \setminus \{0\})[\varphi] :=$$
$$\{f : E \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \text{ lokal konstant} \mid \forall v \in E \setminus \{0\}, z \in Z(F) :\ f(z \cdot v) = \varphi^{-1}(z) \cdot f(v)\}$$

mit dem Vektorraum der betrachteten P-induzierten Darstellung

$$\mathcal{J}_\varphi = \{\phi : G(F) \to \mathbb{C} \text{ lokal konstant} \mid \forall p \in P(F), x \in G(F) :\ \phi(p \cdot x) = \varphi\big(\omega_1(p)\big) \cdot \phi(x)\}$$

isomorph ist, und zwar unter der Abbildung

$$f \mapsto \phi_f;\ \phi_f(g) := f(g^{-1} \cdot v_0)$$

mit der Umkehrabbildung

$$\phi \mapsto f_\phi;\ f_\phi(v) := \phi(g), \text{ falls } g \cdot v = v_0.$$

Klarerweise sind diese Abbildungen wohldefiniert; sie übersetzen die jeweils zu erfüllenden Links-Varianz-Eigenschaften ineinander, sie sind invers zueinander (d.h. $f_{(\phi_f)} = f$ etc.) und sind nach Konstruktion (!) Verkettungsoperatoren für die genannten $G(F)$-Operationen der beteiligten Räume.

(Beachte, daß $z \in Z(F)$ bei der Einschränkung der natürlichen Operation von $E^* \ni e$ durch $\big(e.f\big)(v) = f(e^{-1} \cdot v)$ *wirklich* durch Multiplikation mit $\varphi(z)$ –und nicht dessen Inversem– auf $\mathsf{C}^\infty_{c \bmod Z}(E \setminus \{0\})[\varphi]$ operiert!)

Im Abschnitt 2.4.3 wurde die unter dem Torus $H/_F \widehat{=} E^*$ invariante Stratifizierung der F-Varietät $\mathbb{P}_F(E) = (E \backslash \{0\})/_F$ durch die „angeordneten“ Vereinigungen $\mathfrak{O}_i := \dot{\bigcup}_{0 \le j \le i} \mathfrak{O}^{(I_j)}$ der (mit den „partiellen Einheiten“ $\sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Specmax}(E) \backslash I} 1_{\mathfrak{p}} =: 1^{(I)}$ als Aufpunkten gebildeten) Orbiten $\mathfrak{O}^{(I)} := E^* \cdot 1^{(I)}$ diskutiert, wobei die I_j sämtliche echten Teilmengen von $S_E = \mathrm{Specmax}(E)$ in der gewählten lexikographischen Anordnung sind. Diese liefert natürlich eine Stratifizierung (in der starken Topologie) der F-Mannigfaltigkeit $E \setminus \{0\}$ und analog für deren Quotienten $\mathbb{P}(E)$.

Wenn nun $\mu^{(I)} \in SL_n(F)$ beliebig gewählte invertierbare Matrizen mit $\mu^{(I)}(v_0) = 1^{(I)}$ sind, so hat man (nach dem Vorigen) eine Zerlegung in Doppelnebenklassen

$$G(F) = \dot{\bigcup_{I \subsetneq S_E}} E^* \cdot \mu^{(I)} \cdot P^{(1)}(F)$$

bzw. nach Invertieren

$$G(F) = \dot{\bigcup_{I \subsetneq S_E}} P^{(1)}(F) \cdot m^{(I)} \cdot E^*$$

mit den Matrizen $m^{(I)} := (\mu^{(I)})^{-1}$. –Setzt man weiter für $0 \leq i \leq 2^a - 2$

$$G(F)_i := \dot{\bigcup_{j \leq i}} P^{(1)}(F) \cdot m^{(I_j)} \cdot E^*$$

$\big($= Urbild des Stratums $\mathfrak{O}_i$ unter der Projektion $G(F) \twoheadrightarrow P^{(1)}(F)\big\backslash G(F)\big)$, so bilden diese (von links unter $P^{(1)}(F)$ und von rechts unter E^* invarianten) Teilmengen eine Stratifizierung von $G(F)$; insbesondere hat man, daß

$$G(F)_i \setminus G(F)_{i-1} = P^{(1)}(F) \cdot m^{(I_i)} \cdot E^*$$

immer eine in $G(F)_i$ *abgeschlossene* Teilmenge ist, und natürlich ist $G(F)_{2^a-2}$ ganz $G(F)$!

[Zur Wahl dieser Matrizen $\mu^{(I)}$: Ist $a = 1$, d.h. E ein Körper, so wählt man am zweckmäßigsten $v_0 = 1_E$ und damit $\mu^{(\varnothing)} = \mathrm{id}_E \mathrel{\widehat{=}} \mathbb{1}_n$; im spaltenden Falle $a = n$, $E = F^n$ ist die folgende Wahl vom Standpunkt des sparsamen Matrizenschreibens wohl am angenehmsten: $v_0 = e_1 = 1^{(\{2,\ldots,n\})}$, so daß $P = \{\begin{pmatrix} z & \underline{u} \\ 0 & \underline{m} \end{pmatrix}\}$; dann $1^{(\varnothing)} = 1_E = e_1 + \ldots + e_n$; setze $i_I := \min\big(\{1,\ldots,n\} \setminus I\big)$ für jede echte Teilmenge $I \subsetneqq S_E = \{1,\ldots,n\}$; mit den unteren unipotenten Streifenmatrizen $u_{-,I} := \prod_{k \notin (I \cup \{j_I\})} (\mathbb{1}_n + E_{k,1}) \in U_{P_0^{\mathrm{opp}}}$ und mit dem Repräsentanten $w_{\max,j} = \begin{pmatrix} 0 & & & \pm 1 & 0 \\ & & 1 & & \vdots \\ & \iddots & & & \vdots \\ 1 & & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbf{1}_{n-j} \end{pmatrix} \in SL_n$ der „längsten“ Permutation $(1,j)(2,j-1)(3,j-2)\ldots$ kann man $\mu^{(I)} = w_{\max,j_I} \cdot u_{-,I}$ wählen, z.B. $\mu^{(\varnothing)} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$.]

Man betrachte nun die Räume von Funktionen auf diesen Strata

$$\mathcal{F}_i^\varphi := \{\phi : G(F)_i \to \mathbb{C} \text{ lokal konstant} \;\big|\; \forall p \in P(F), x \in G(F) :\; \phi(p \cdot x) = \varphi\big(\omega_1(p)\big)\phi(x),$$

$$\text{und } \operatorname{supp}(\phi) \text{ kompakt modulo } P(F)\},$$

die sich sofort in Räume von modulo $Z(F)$ kompakt getragenen Funktionen auf den entsprechenden Strata $\mathfrak{O}_i$ von $E\backslash\{0\}$ mit φ-Linksvarianz unter $Z(F)$ „übersetzen“ : man hat (bezüglich der natürlichen Operation von E^* mittels Rechtstranslation des Arguments) Isomorphismen von Darstellungen

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i^\varphi &\cong \mathsf{C}^\infty_{c \bmod Z}(\mathfrak{O}_i)[\varphi], \text{ insbesondere} \\ \mathcal{F}_0^\varphi &\cong \mathsf{C}^\infty_{c \bmod Z}(\mathfrak{O}_0)[\varphi] = \mathsf{C}^\infty_{c \bmod Z}(E^*)[\varphi] \text{ (das „Fundament“), und} \\ \mathcal{J}_\varphi = \mathcal{F}^\varphi_{2^a-2} &\cong \mathsf{C}^\infty_{c \bmod Z}(\mathfrak{O}_{2^a-2})[\varphi] = \mathsf{C}^\infty_{c \bmod Z}(E \setminus \{0\})[\varphi]! \end{aligned}$$

Die „Anklebe-Beziehungen“ zwischen den Strata und Orbiten (genauer gesagt: zwischen ihren jeweiligen Mengen von F-wertigen Punkten in deren natürlicher „starker“ Topologie, bzgl. welcher sie “totally disconnected spaces“ sind) bewirken, daß man für $1 \leq i \leq 2^a - 2$ die folgenden exakten Sequenzen von (zulässigen) $H(F)$-Moduln hat:

$$(\mathrm{Seq}_i) : \quad 0 \to \mathcal{F}^\varphi_{i-1} \to \mathcal{F}^\varphi_i \to \mathsf{C}^\infty_{c \bmod Z}(\mathfrak{O}^{(I_i)})[\varphi] \to 0.$$

(Die Abbildungen in dieser Sequenz sind „Ausdehnung-durch-0“ bzw. Einschränkung von Funktionen; die $H(F)$-Äquivarianz sowie die Exaktheit überall außer „rechts“ sind offensichtlich, und Exaktheit „rechts“ folgt aus den Eigenschaften der Relativ-Topologie, vgl. [Fl81, Prop. 1.1], wo auch auf die grundlegende Arbeit von BERNSTEIN–ZELEVINSKY verwiesen wird.)

Um nun diese E^*-Filtrierung $(\mathcal{F}_i^{\varphi})_i$ zur Untersuchung des Raumes

$$\mathrm{Hom}_{H(F)}(\mathcal{J}_{\varphi}\big|_{H(F)}, \underline{\eta}') \cong \mathrm{Hom}_{E^*}(\mathcal{F}^{\varphi}_{2^a-2}, \underline{\eta}')$$

einzusetzen, wird zunächst die „Fundament-Schicht"

$$\mathrm{Hom}_{E^*}(\mathcal{F}_0^{\varphi}, \underline{\eta}') = \mathrm{Hom}_{E^*}(\mathsf{C}^{\infty}_{c\ \mathrm{mod}\ Z}(E^*)[\varphi], \underline{\eta}')$$

betrachtet; nach den oben diskutierten Prinzipien ist dieser Raum auch isomorph zu

$$\mathrm{Hom}_{E^*}(\mathsf{C}^{\infty}_{c\ \mathrm{mod}\ Z}(E^*)[\varphi] \otimes (\underline{\eta}')^{-1}, \mathbf{1}).$$

–Die Menge derjenigen (stetigen) Charaktere η von E^*, deren Einschränkung auf $F^* = Z(F)$ mit dem gegebenen $\varphi\big|_Z$ übereinstimmt, ist offenbar ein prinzipalhomogener Raum unter der Gruppe der (stetigen) Charaktere $\tilde{\eta}$ von $\overline{H} := E^*/F^*$ (= F-rationale Punkte des Bildes PH von H in PGL_n).

Da φ und $\underline{\eta}'$ die Bedingung $(\diamondsuit'_Z)$ erfüllen, ist durch die Abbildung $f \mapsto f \cdot \underline{\eta}'$ ein Isomorphismus von E^*-Moduln

$$\mathsf{C}^{\infty}_{c\ \mathrm{mod}\ Z}(E^*)[\varphi] \otimes (\underline{\eta}')^{-1} \cong \mathsf{C}^{\infty}_{c\ \mathrm{mod}\ Z}(E^*)[\mathbf{1}]$$

gegeben, und letzterer Modul ist kanonisch zu $\mathsf{C}^{\infty}_c(E^*/F^*) = \mathsf{C}^{\infty}_c(\overline{H})$ isomorph –der erstgenannte E^*-Modul „ist" also in Wirklichkeit ein $\overline{H}$-Modul!

Nach dieser weiteren Umformulierung kann hier also ebensogut wie $\mathrm{Hom}_{E^*}(\mathcal{F}_0^{\varphi}, \underline{\eta}')$ der Raum der $\overline{H}$-invarianten Funktionale, $\mathrm{Hom}_{\overline{H}}(\mathsf{C}^{\infty}_c(\overline{H}), \mathbf{1})$ untersucht werden —aber dies „ist" der Raum der (komplexwertigen) HAAR-Maße/der invarianten Integrale auf $\overline{H}$ (einer lokalkompakten –sogar lokal proendlichen– abelschen Gruppe); daß dieser über $\mathbb{C}$ eindimensional ist, zählt zu den Geschäftsgrundlagen der Disziplin. Sogleich wird ein Erzeuger dieses gerade als eindimensional erkannten Raumes angegeben:

Die Linearform $\widetilde{\mathsf{T}}_0$ auf $\mathsf{C}^{\infty}_{c\ \mathrm{mod}\ Z}(E^*)[\varphi]$, definiert durch

$$\widetilde{\mathsf{T}}_0 : f \mapsto \int_{\overline{H}} f(h) \cdot \underline{\eta}'(h) \mathrm{d}\overline{h},$$

ist *wohldefiniert* (denn wenn h und $h' \in H(F)$ beide auf $\overline{h} \in \overline{H}$ abgebildet werden, dann ist $h' = z \cdot h$ mit $z \in Z(F)$, also gilt

$$f(h')\underline{\eta}'(h') = f(zh)\underline{\eta}'(zh) = f(zh)\underline{\eta}'(z)\underline{\eta}'(h) = \varphi^{-1}(z) \cdot f(h)\underline{\eta}'(z)\underline{\eta}'(h) \overset{\diamondsuit_Z}{=} f(h)\underline{\eta}(h),$$

d.h. der Integrand hängt nicht von einer Repräsentantenwahl ab); sie *verkettet* tatsächlich in den H-Modul $\mathbb{C} \cdot \underline{\eta}'$ hinein, denn

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathsf{T}}_0(h_0.f) &= \int_{\overline{H}} f({h_0}^{-1} \cdot h) \cdot \underline{\eta}'(h_0 \cdot {h_0}^{-1} \cdot h) \mathrm{d}\overline{h} \\
&= \underline{\eta}'(h_0) \cdot \int_{\overline{H}} f({h_0}^{-1} \cdot h) \cdot \underline{\eta}'({h_0}^{-1} \cdot h) \mathrm{d}\overline{h} \\
&= \underline{\eta}'(h_0) \cdot \widetilde{\mathsf{T}}_0(f)
\end{aligned}$$

(letztere Gleichheit, da $\mathrm{d}\overline{h}$ ein invariantes Maß ist); und sie ist *nichttrivial*: ist $U \subset E^*$ eine kleine kompakte Umgebung der 1, für die $\underline{\eta}'\big|_U \equiv 1$ gilt, und bildet man hiermit die Funktion

$$f_U : e(\in E^*) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, falls} \quad e \notin F^* \cdot U; \\ \underline{\eta}(e)\big(= \underline{\varphi}(e)!\big) & \text{, falls} \quad e \in F^* \cdot U, \end{cases},$$

so gilt $f_U \in \mathsf{C}^\infty_{c \bmod Z}(E^*)[\varphi]$ und $\widetilde{\mathsf{T}}_0(f_U) = \mathrm{vol}(\overline{U}) > 0!$

Ist nun $h \in H(F) = E^*$, so ist für ein beliebiges $p_1 \in P^{(1)}(F) = \mathrm{Stab}_{G(F)}(\{v_0\})$ und für das vorn festgelegte $\mu^{(\varnothing)} = (m^{(\varnothing)})^{-1}$ wegen dessen Eigenschaft $\mu^{(\varnothing)} \cdot v_0 = 1^{(\varnothing)} = 1_E$ der „Vektor" $h = h \cdot 1_E \in E \cong F^n$ von der Form $h = (h \cdot \mu^{(\varnothing)} \cdot p_1) \cdot v_0$. Für $\phi \in \mathcal{F}_0^\varphi$ [d.h. $\phi(pg) = \varphi\big(\omega_1(p)\big) \cdot \phi(g)$ und $\mathrm{supp}(\phi) \subset G(F)_0 = P^{(1)}(F) \cdot m^{(\varnothing)} \cdot E^*$] ist das dazugehörige $f_\phi \in \mathsf{C}^\infty_{c \bmod Z}(E^*)[\varphi]$ durch $f_\phi(h) = \phi(p_1^{-1} \cdot (\mu^{(\varnothing)})^{-1} \cdot h^{-1}) = \phi(m^{(\varnothing)} \cdot h^{-1})$ gegeben, und „die" Basis-Linearform T_0 des eindimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathrm{Hom}_{H(F)}(\mathcal{F}_0^\varphi, \mathbb{C} \cdot \underline{\eta}')$ ist schließlich gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_0(\phi) &= \int_{\overline{H}} \underline{\eta}'(h) \cdot f_\phi(h) \mathrm{d}\overline{h} \\ &= \int_{\overline{H}} \underline{\eta}'(h) \cdot \phi(m^{(\varnothing)} \cdot h^{-1}) \mathrm{d}\overline{h} \\ &= \int_{\overline{H}} \phi(m^{(\varnothing)} \cdot h) \cdot (\underline{\eta}')^{-1}(h) \mathrm{d}\overline{h} \,. \end{aligned}$$

Nun soll dieser durch Integration über $\overline{H}$ gegebene $H(F)$-Verkettungsoperator T_0 zu

$$\big(0 \neq\big) \mathsf{T} = \mathsf{T}_{\underline{\varphi}, \underline{\eta}} \overset{!}{\in} \mathrm{Hom}_{H(F)}(\mathcal{J}_\varphi\big|_{H(F)}, \underline{\eta}')$$

fortgesetzt werden! –Ist für ein $i \in \{0, \ldots, 2^a - 3\}$ ein nichttrivialer Verkettungsoperator $\mathsf{T}_i \in \mathrm{Hom}_{H(F)}(\mathcal{F}_i^\varphi, \underline{\eta}')$ vorhanden, so folgt, daß mit (Seq_i) auch

$$0 \to \mathcal{F}_i^\varphi / \ker(\mathsf{T}_i) \to \mathcal{F}_{i+1}^\varphi / \ker(\mathsf{T}_i) \to \mathsf{C}^\infty_{c \bmod Z}(\mathfrak{O}^{(I_{i+1})})[\varphi] \to 0$$

eine exakte Sequenz von Darstellungen von $H(F)$ ist. Der Stabilisator $\prod_{\mathfrak{p} \in I_{i+1}} E_\mathfrak{p}^*$ eines jeden Punktes in dem Orbit $\mathfrak{O}^{(I_{i+1})} = E^* \cdot 1^{(I_{i+1})} \cong \prod_{\mathfrak{q} \notin I_{i+1}} E_\mathfrak{q}^* \cong E^* / (\prod_{\mathfrak{p} \in I_{i+1}} E_\mathfrak{p}^*)$ operiert also trivial auf dem rechten Term dieser Sequenz. Für ein $h_{(I_{i+1})}$ in dieser Standgruppe operiert das Element $1 - h_{(I_{i+1})}$ des Gruppenringes mit ganz $H(F)$ vertauschbar auf allen in der Sequenz auftretenden Moduln, auf dem rechten Term operiert es als $1 - 1 = 0$, und auf dem (eindimensionalen) linken Term $\mathcal{F}_i^\varphi / \ker(\mathsf{T}_i)$ operiert es nach Konstruktion als Multiplikation mit dem Skalar $1 - \underline{\eta}'(h_{(I_{i+1})}) = 1 - \prod_{\mathfrak{p} \in (I_{i+1})} \eta_\mathfrak{p}'(h_\mathfrak{p})$.

<u>Falls</u> nun die Einschränkung des Charakters $\underline{\eta}'$ auf die genannte Orbit-Standgruppe *nichttrivial* ist, so ist der letztgenannte Skalar für geeignetes $h_{(I_{i+1})}$ jedenfalls von 0 verschieden. Es ist dann also

$$\mathsf{L}_i := \frac{1}{1 - \underline{\eta}'(h_{(I_{i+1})})} \cdot \big(1 - h_{(I_{i+1})}\big)$$

ein $H(F)$-Endomorphismus des mittleren Terms $\mathcal{F}_{i+1}^\varphi / \ker(\mathsf{T}_i)$ der obigen Sequenz, dessen Einschränkung auf den „linken" Untermodul $\mathcal{F}_i^\varphi / \ker(\mathsf{T}_i)$ die identische Abbildung ist und der auf dem Quotienten „rechts" die Nullabbildung induziert, anders gesagt: dieses L_i ist eine (Links-)Spaltung der Sequenz! (Setzt man $\iota_i(f) := \tilde{f} - \mathsf{L}_i(\tilde{f})$ für $f \in$

$\mathsf{C}^\infty_{c \bmod Z}(\mathfrak{O}^{(I_{i+1})})[\varphi]$ und ein beliebiges Urbild $\tilde{f} \in \mathcal{F}^\varphi_{i+1}/\ker(\mathsf{T}_i)$ von f, so ist die Abbildung ι_i offenbar wohldefiniert und die zu L_i gehörige *Rechts*spaltung der Sequenz.)

Insbesondere sieht man dann die Tatsachen

$$\mathrm{Hom}_{H(F)}(\mathsf{C}^\infty_{c \bmod Z}(\mathfrak{O}^{(I_{i+1})})[\varphi], \underline{\eta}') = \{0\}$$

und

$$\mathcal{F}^\varphi_{i+1}/\ker(\mathsf{T}_i) \cong \mathcal{F}^\varphi_i/\ker(\mathsf{T}_i) \oplus \mathsf{C}^\infty_{c \bmod Z}(\mathfrak{O}^{(I_{i+1})})[\varphi] \text{ als } H(F)\text{-Moduln}$$

ein. Gilt nun sogar $\dim_\mathbb{C}(\mathrm{Hom}_{H(F)}(\mathcal{F}^\varphi_i, \eta)) = 1$ mit T_i als einem Erzeuger, so daß also $\mathcal{F}^\varphi_i$ als $H(F)$-Modul zur direkten Summe des Kerns und des Cokerns von T_i isomorph ist und letzterer gerade $\mathbb{C} \cdot \underline{\eta}'$ ist, so folgt auch

$$\mathcal{F}^\varphi_{i+1} \cong \mathbb{C} \cdot \underline{\eta}' \oplus \underbrace{\big(\ker(\mathsf{T}_i) \oplus \mathsf{C}^\infty_{c \bmod Z}(\mathfrak{O}^{(I_{i+1})})[\varphi]\big)}_{\text{frei vom } H(F)\text{-Typ } \underline{\eta}'!},$$

also gilt das

Lemma 6 *<u>Wenn</u> für ein $i \in \{0, \ldots, 2^a - 3\}$ gilt* $\boxed{\mathrm{Hom}_{H(F)}(\mathcal{F}^\varphi_i, \underline{\eta}') = \mathbb{C} \cdot \mathsf{T}_i}$, *<u>und</u> wenn der zu verkettende Charakter auf dem Orbitstabilisator nichttrivial ist:* $\boxed{\underline{\eta}'\big|_{\prod_{\mathfrak{p} \in I_{i+1}} E^*_\mathfrak{p}} \not\equiv \mathbf{1}}$, *<u>dann gilt</u>*

$$\mathrm{Hom}_{H(F)}(\mathcal{F}^\varphi_{i+1}, \underline{\eta}') = \mathbb{C} \cdot \mathsf{T}_{i+1}$$

mit einem T_{i+1}, dessen Einschränkung auf den Unterraum $\mathcal{F}^\varphi_i$ mit T_i übereinstimmt: $\mathsf{T}_{i+1}\big|_{\mathcal{F}^\varphi_i} = \mathsf{T}_i$.

Dieses Lemma soll natürlich als „Induktionsschritt“ dienen; um es tatsächlich in jedem Schritt anwenden zu können, müssen die Charaktere $\underline{\varphi}$ und $\underline{\eta}$ offenbar die folgende starke Nichtausartungsbedingung erfüllen:

$$\big(\mathrm{NT}(\underline{\varphi}, \underline{\eta})\big): \quad \forall \mathfrak{p} \in S_E : \eta'_\mathfrak{p} \not\equiv \mathbf{1};$$

ist dies erfüllt, so ist natürlich auch für jede nichtleere Teilmenge $I \subset S_E$ die Einschränkung von $\underline{\eta}'$ auf $\prod_{\mathfrak{p} \in I} E^*_\mathfrak{p}$ nichttrivial, so daß obiges Lemma angewendet werden kann. Da der „Induktionsanfang“ für $i = 0$ ($\mathrel{\widehat{=}} I_0 = \varnothing$) oben aus der Eindeutigkeit des Haar-Maßes gefolgert wurde, hat man insgesamt:

Lemma 7 *Wenn die Charaktere $\underline{\eta} \mathrel{\widehat{=}} (\eta_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in S_E}$ von $H(F) = E^*$ und $\underline{\varphi} \mathrel{\widehat{=}} (\varphi_1, \varphi_2)$ von $P(F)$ die Zentrums-Verträglichkeit $(\diamond_Z)$ und die obige Bedingung $\big(NT(\underline{\varphi}, \underline{\eta})\big)$ erfüllen, dann ist $\mathrm{Hom}_{H(F)}(\mathcal{J}_\varphi\big|_{H(F)}, \mathbb{C} \cdot \underline{\eta}')$ ein eindimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum! Die Einschränkung eines Erzeugers T_H auf den Unterraum $\mathcal{F}^\varphi_0 \subset \mathcal{J}_\varphi$ ist der vorn angegebene Integral-Operator $\widetilde{\mathsf{T}_0}$.*

Ein offensichtlicher Kandidat für einen Erzeuger T_H ist durch

$$\phi \mapsto \mathsf{T}_H(\phi) = \mathsf{T}^\int_H(\phi) := \int_{\overline{H}} \phi(m^{(\varnothing)} \cdot h) \cdot \underline{\eta}'^{-1}(h) \mathrm{d}\overline{h}$$

für Funktionen $\phi \in \mathcal{J}_\varphi$ gegeben, wobei die Konvergenz dieser Integrale noch zu zeigen ist –jedenfalls, wenn E kein Körper ist.

–Im Falle eines nichttrivialen zu induzierenden Charakters, $\varphi \neq \mathbf{1}$, sollte die Darstellung $\mathcal{J}_\varphi$ von G *irreduzibel* sein (vgl. den wohlbekannten GL_2-Fall), und damit stimmt sie mit dem Bild des (nichttrivialen) G-Verkettungsoperators j überein. Es wird hier nun zunächst so getan, als wäre die Existenz des H-Integral-Verkettungsoperators $\mathsf{T}_H^{\int}(\phi)$ schon gesichert, und dann wird dieser in einen G-Verkettungsoperator umgerechnet, dessen Existenz als Operator auf dem Bild von j im folgenden Abschnitt etabliert wird: die auftretenden Integrale werden als (harmlos) verallgemeinerte TATE-Zeta-Integrale identifiziert, und für diese ist ja Konvergenz bzw. meromorphe Fortsetzbarkeit wohlbekannt [bis auf Pole, die im hier betrachteten Kontext *nicht* relevant sind: φ nichttrivial!]. (Ein direkter rechnerischer Existenz- bzw. Fortsetzbarkeitsbeweis für $\mathsf{T}_H^{\int}$ ist sicher unschwer möglich, wird hier aber nicht unternommen.)

–Der FROBENIUS-Reziprozitäts-Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{H(F)}(\mathcal{J}_\varphi\big|_{H(F)}, \mathbb{C}\cdot\underline{\eta}') \cong \mathrm{Hom}_{G(F)}(\mathcal{J}_\varphi, \mathcal{K}_{\underline{\eta}'}) \cong \mathrm{Hom}_{G(F)}(\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}, \mathcal{K}_{\underline{\eta}})$$

bildet (in nächstliegender Normierung) ein Element T_H der linken Seite auf das durch

$$\forall g \in G(F), \forall \phi \in \mathcal{J}_{\underline{\varphi}} : \big(\mathsf{T}_G(\phi)\big)(g) := \mathsf{T}_H(g.\phi)$$

definierte Element T_G der rechten Seite ab, wie eine leichte, aber unübersichtliche Verifikation zeigt. Für den oben postulierten Integral-Verkettungsoperator $\mathsf{T}_H^{\int}$, dessen Existenz in den relevanten Fällen durch den folgenden Abschnitt etabliert wird und der dann nach dem Lemma „eindeutig bestimmt“ ist, erhält man das zugehörige $\mathsf{T}^{\mathrm{int}} := \mathsf{T}_G^{\int}$ also durch

$$\begin{aligned}\mathsf{T}^{\mathrm{int}}(\phi) : g\big(\in G(F)\big) \quad &\mapsto \quad \int_{H(F)/Z(F)} \big(g.\phi\big)(m^{(\varnothing)}\cdot h)\cdot\underline{\eta}^{-1}(h)\mathrm{d}\overline{h} \\ &= \quad \int_{H(F)/Z(F)} \phi(m^{(\varnothing)}\cdot h\cdot g)\cdot\underline{\eta}^{-1}(h)\mathrm{d}\overline{h}\end{aligned}$$

für Funktionen $\phi \in \mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$. Dieses $\mathsf{T}^{\mathrm{int}}$ ist also —im Falle des Vorliegens der Bedingungen $(\diamondsuit_Z)$ und $\big(\mathrm{NT}(\underline{\varphi},\underline{\eta})\big)$— ein Basiselement des *eindimensionalen* Raums $\mathrm{Hom}_{G(F)}(\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}, \mathcal{K}_{\underline{\eta}})$ von $G(F)$-Verkettungsoperatoren!

3.5 Der Faktor zwischen zwei natürlichen Verkettungsoperatoren ist ein Zetawert

Weiter vorn wurde beobachtet, daß ein (oft „großer“, s.o.) Unterraum von $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$ durch die Integraltransformation j (zu einem Vektor v_0) aus SCHWARTZ-Funktionen auf dem F-Vektorraum E gewonnen werden kann. Daher wird in diesem Abschnitt der Operator $\mathsf{T}^{\mathrm{int}}\circ j : \mathcal{S}(E) \to \mathcal{K}_{\underline{\eta}}$ untersucht und mit seiner Hilfe insbesondere die Wirkung von $\mathsf{T}^{\mathrm{int}}$ auf den sphärischen Funktionen (soweit vorhanden) in Termen lokaler (TATE-)Zeta-Integrale ausgedrückt; die auftretenden Nenner liefern eine weitere Erklärung für die Notwendigkeit der Nichtausartungsbedingung $\big(\mathrm{NT}(\underline{\varphi},\underline{\eta})\big)$.

–Seien also ein Vektor $v_0 \in E \setminus \{0\}$, primitiv in einem $\mathcal{O}_F$-Gitter $\Lambda \subset E$, und eine Matrix $m^{(\varnothing)} \in G(F)$ mit $(m^{(\varnothing)})^{-1}(v_0) = 1_E$ gegeben (ohne Einschränkung $m^{(\varnothing)} \in SL_F(E)$); es seien wieder $P = P_{v_0} := \mathrm{Stab}_G(< v_0 >_F)$ maximalparabolisch in $G/_F$ und $K := \mathrm{Stab}_{G(F)}(\Lambda) \cong GL_n(\mathcal{O}_F)$ maximalkompakt in $G(F)$. Es seien algebraische Charaktere $\underline{\varphi} \mathrel{\widehat{=}} (\varphi_1, \varphi_2) : P(F) \to \mathbb{C}^*$ und $\underline{\eta} \mathrel{\widehat{=}} (\dots, \eta_{\mathfrak{p}}, \dots) : E^*(\cong \prod_{\mathfrak{p}} E^*_{\mathfrak{p}}) \to \mathbb{C}^*$ gegeben, wobei diese Charaktere auf $F^* = Z(F) \subset P(F) \cap E^*$ übereinstimmen sollen (d.h. $(\Diamond_Z)$ sei erfüllt). Im folgenden mögen immer g, h, z Elemente von $G(F)$ bzw. $H(F)$ bzw. $Z(F)$ bezeichnen. Das „allgemeine Element“ der $G(F)$-Darstellung $\mathcal{S}(E) \otimes (\varphi_2 \circ \det)$ werde als $f \otimes \varphi_2$ geschrieben, wobei f eine Schwartz-Funktion auf E ist. Man erinnere die definierende Formel

$$j\big(f \otimes \varphi_2\big)(g) := \varphi_2\big(\det(g)\big) \cdot \int_{Z(F)} f\big((z \cdot g)^{-1} \cdot v_0\big) \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1}(z) \cdot \ \mathrm{d}^{\times} z$$

und die Verkettungseigenschaft

$$j\big(f \otimes \varphi_2\big)(g) = j\big(g.(f \otimes \varphi_2)\big)(\mathbb{1}_n)$$

für den Verkettungsoperator $j = j_{v_0, \Lambda, \underline{\varphi}} : \mathcal{S}(E) \otimes (\varphi_2 \circ \det) \to \mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$. Es ergibt sich als Formel für den zusammengesetzten Verkettungsoperator

$$\mathsf{T}^{\mathrm{int}} \circ j = \mathsf{T}^{\int}_G \circ j : \mathcal{S}(E) \otimes (\varphi_2 \circ \det) \to (\mathcal{J}_{\underline{\varphi}} \to) \mathcal{K}_{\underline{\eta}}$$

der Ausdruck

$$(\mathsf{T}^{\mathrm{int}} \circ j)\big(f \otimes \varphi_2\big)(g) = \int_{H(F)/Z(F)} j\big(f \otimes \varphi_2\big)(m^{(\varnothing)} \cdot h \cdot g) \cdot \underline{\eta}^{-1}(h) \mathrm{d}\overline{h}$$

$$= \int_{\overline{H}} \int_{Z(F)} (\varphi_2 \circ \det)(m^{(\varnothing)} \cdot h \cdot g) \cdot f\big((z \cdot m^{(\varnothing)} \cdot h \cdot g)^{-1} \cdot v_0\big) \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1}(z) \cdot \underline{\eta}^{-1}(h) \ \mathrm{d}^{\times} z \mathrm{d}\overline{h}$$

$$= \varphi_2(\underbrace{\det m^{(\varnothing)}}_{=1}) \cdot \varphi_2(\det g) \cdot \int_{\overline{H}} \int_{Z(F)} f\big(g^{-1} \cdot (h \cdot z)^{-1} \cdot m^{(\varnothing)} \cdot v_0\big) \frac{\varphi_2}{\varphi_1}(z) \cdot \frac{\varphi_2(\det h)}{\underline{\eta}(h)} \ \mathrm{d}^{\times} z \mathrm{d}\overline{h}.$$

Nun beachte man die Identitäten

- $\int_{\overline{H}} \int_{Z(F)} f(z \cdot \overline{h}) \ \mathrm{d}^{\times} z \mathrm{d}\overline{h} = \int_{E^*(=H(F))} f(e) \ \mathrm{d}^{\times} e$ wegen des Satzes von Fubini und passender Wahl der Haar-Maße auf den involvierten Punktegruppen $E^*, F^*, \overline{H}$ von Tori, und
- $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}(z) = \frac{\varphi_2^n(z)}{\varphi_1(z) \cdot \varphi_2^{n-1}(z)} = \frac{(\varphi_2 \circ \det)(z \cdot \mathbb{1}_n)}{\underline{\varphi}(z)} \overset{(\Diamond_Z)}{=} \frac{(\varphi_2 \circ \det)(z \cdot \mathbb{1}_n)}{\underline{\eta}(z)}$, also $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}(z) \cdot \frac{\varphi_2(\det h)}{\underline{\eta}(h)} = \frac{(\varphi_2 \circ \det)(h \cdot z)}{\underline{\eta}(h \cdot z)} = \frac{(\varphi_2 \circ N^E_F)(h \cdot z)}{\underline{\eta}(h \cdot z)}$.

Somit gilt

$$\begin{aligned}(\mathsf{T}^{\mathrm{int}} \circ j)\big(f \otimes \varphi_2\big)(g) &= \varphi_2(\det g) \cdot \int_{E^*} f\big(g^{-1} \cdot e^{-1}(\cdot 1_E)\big) \cdot \frac{\varphi_2 \circ N^E_F}{\underline{\eta}}(e) \ \mathrm{d}^{\times} e \\ &= \int_{E^*} \big(g.(f \otimes \varphi_2)\big)(e^{-1}) \cdot \frac{\varphi_2 \circ N^E_F}{\underline{\eta}}(e) \ \mathrm{d}^{\times} e \\ &= \int_{E^*} \big(g.(f \otimes \varphi_2)\big)(e) \cdot \frac{\underline{\eta}}{\varphi_2 \circ N^E_F}(e) \ \mathrm{d}^{\times} e.\end{aligned}$$

Zu der Zerlegung als Summe von Teilkörpern $E = \oplus_{\mathfrak{q}\in S_E} E_{\mathfrak{q}}$ korrespondiert ja eine Produktdarstellung $N_F^E = \prod_{\mathfrak{q}} N_F^{E_{\mathfrak{q}}} = \prod_{\mathfrak{q}} N_{\mathfrak{q}}$, und folglich gilt $\underline{\eta}' = \frac{\eta}{\varphi_2\circ N_F^E} = \prod_{\mathfrak{q}}(\frac{\eta_{\mathfrak{q}}}{\varphi_2\circ N_{\mathfrak{q}}}) = \prod_{\mathfrak{q}} \eta'_{\mathfrak{q}}$.

Ferner folgt die Tensorzerlegung $\mathcal{S}(E) \otimes (\varphi_2 \circ \det) = \bigotimes_{\mathfrak{q}} \Big(\mathcal{S}(E_{\mathfrak{q}}) \otimes (\varphi_2 \circ N_{\mathfrak{q}})\Big)$. –Ist also $f \in \mathcal{S}(E)$ ein *reiner Tensor*/eine faktorisierbare Funktion, d.h. $f = \otimes f_{\mathfrak{q}}$ mit $f_{\mathfrak{q}} \in \mathcal{S}(E_{\mathfrak{q}})$, so erhält man für den Wert im Einselement

$$\begin{aligned}(\mathsf{T}^{\text{int}} \circ j)\Big(\otimes_{\mathfrak{q}} \big(f_{\mathfrak{q}} \otimes (\varphi_2 \circ N_{\mathfrak{q}})\big)\Big)(\mathbb{1}_n) &= \prod_{\mathfrak{q}} \int_{E_{\mathfrak{q}}^*} \big(f_{\mathfrak{q}} \otimes (\varphi_2 \circ N_{\mathfrak{q}})\big)(e_{\mathfrak{q}}) \cdot \eta'_{\mathfrak{q}}(e_{\mathfrak{q}})\ \mathrm{d}^\times e_{\mathfrak{q}} \\ &= \prod_{\mathfrak{q}} \underbrace{\zeta_{E_{\mathfrak{q}}}(f_{\mathfrak{q}} \otimes (\varphi_2 \circ N_{\mathfrak{q}}), \eta'_{\mathfrak{q}}; s=0)}_{\text{lokale TATE-Zeta-Integrale!}} \\ &=: \zeta_E(f \otimes \varphi_2, \underline{\eta}', s=0),\end{aligned}$$

wenn man durch die letzte Identität (und deren multilineare Fortsetzung auf beliebige SCHWARTZ-Funktionen) Zeta-Integrale für étale Algebren über lokalen Körpern definiert, so daß dann auch allgemein

$$(\mathsf{T}^{\text{int}} \circ j)\big(f \otimes \varphi_2\big)(g) = \zeta_E\big(g.(f \otimes \varphi_2), \underline{\eta}', s=0\big)$$

gilt, obwohl ja ein $g \in G(F)$ eine Tensor-Faktorisierung $f = \otimes f_{\mathfrak{q}}$ genau dann respektiert, wenn $g \in H(F)$ ist.

(Dies gilt zunächst für Charaktere im Bereich der absoluten Konvergenz der Integrale, dann —nach der wohlbekannten meromorphen Fortsetzung der TATE-Zetafunktionen— für „alle“ Charaktere – mit dem wohlbekannten Polverhalten!)

(Bemerkung: Man beachte, daß bis hierhin keinerlei Annahmen über Unverzweigtheit gemacht wurden; die Resultate bis hier sind also für *alle* lokalen Situationen anwendbar, die sich wie in 3.6 aus einer Zahlkörpersituation ergeben—dort mehr!)

Die Situation soll nun im unverzweigt-sphärischen Falle weiter aufgeschlüsselt werden!

Falls der Charakter φ_2 unverzweigt ist, so enthält –wie im Abschnitt 3.1 besprochen– die $G(F)$-Darstellung $\mathcal{S}(E) \otimes (\varphi_2 \circ \det)$ einen nichtverschwindenden Unterraum von sphärischen, d.h. unter $K = G(\mathcal{O}_F)$ invarianten Funktionen, der z.B. von $f_{0,\varphi_2} := \chi_{\mathcal{O}_E} \otimes \varphi_2$ aufgespannt ist; das Bild dieses Unterraumes unter j besteht wegen der Verkettungseigenschaft wiederum aus sphärischen Vektoren (nun in $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$)[12], und derartige (von 0 verschiedene) existieren genau im Falle, daß der Charakter φ_1 ebenfalls unverzweigt ist, nämlich dann die Vielfachen der dort „zuständigen“ Standard-sphärischen Funktion $\phi_{0,\underline{\varphi}}$, die auf einem $g \in G(F)$ mit P-K-Iwasawazerlegung $g = p \cdot k$ den Wert $\underline{\varphi}(p)$ hat (also insbesondere $\phi_{0,\underline{\varphi}}(\mathbb{1}_n) = 1$). Im Ausartungsfalle $\varphi_1 = \varphi_2$ wurde vorn eingesehen, daß das Integral $j\big(\chi_{\mathcal{O}_E} \otimes \varphi_2\big)(\mathbb{1}_n)$ divergiert; im eigentlich interessierenden Falle $\varphi_1 \neq \varphi_2$ (und beide unverzweigt) ergab sich allgemein $j\big(\phi \otimes \varphi_2\big)(g) = \zeta_F(g.\phi, \frac{\varphi_1}{\varphi_2}; s=0)$, insbesondere

$$j\big(\chi_{\mathcal{O}_E} \otimes \varphi_2\big)(\mathbb{1}_n) = \big(1 - \frac{\varphi_1}{\varphi_2}(\pi)\big)^{-1} = \zeta_F(\chi_{\mathcal{O}_F}, \varphi, s=0) = L_F(\varphi, s=0)\big(\neq 0\,!\big).$$

[12] Genau hier wird die Primitivität des Vektors v_0 im Gitter $\Lambda := \mathcal{O}_E$ benutzt!

(Bei der üblichen kundigen Benutzung von „$\infty = \frac{1}{0}$“ stimmt diese Formel also für alle Charaktere!)

Es kann der Standard-sphärische Vektor $\chi_{\mathcal{O}_E} \in \mathcal{S}(E)$ als reiner Tensor $\otimes_{\mathfrak{q}} \chi_{\mathcal{O}_{E_\mathfrak{q}}}$ aufgefaßt werden, und man hat nach den obigen Formeln

$$(\mathsf{T}^{\mathrm{int}} \circ j)\big(\chi_{\mathcal{O}_E} \otimes \varphi_2\big)(\mathbb{1}_n) = \prod_{\mathfrak{q} \in S_E} L_{E_\mathfrak{q}}(\eta'_\mathfrak{q}, s=0) = \Big(\prod_{\mathfrak{q}} 1 - \eta'_\mathfrak{q}(\pi_{E_\mathfrak{q}})\Big)^{-1},$$

wobei dieses Produkt von Eulerfaktoren als die TATE-L-Funktion der étalen Algebra E zum Charakter $\underline{\eta}' = \frac{\eta}{\varphi_2 \circ N_F^E}$ auf ihrer multiplikativen Gruppe angesehen werden sollte, s.o. . –Insbesondere liegt „Holomorphie“ in diesem Punkt *genau dann* vor, wenn

$$\forall \mathfrak{q} \in S_E : \quad \eta'_\mathfrak{q} \not\equiv \mathbf{1},$$

–genau dann, wenn $\big(\mathrm{NT}(\underline{\varphi}, \underline{\eta})\big)$ gilt, wenn also die Aussage $\boxed{\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{G(F)}(\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}, \mathcal{K}_{\underline{\eta}})) = 1}$ bewiesen werden konnte.

Das Bild des (wegen $L_F(\varphi, s=0) \neq 0$ „legal“ gebildeten) Standard-sphärischen Vektors

$$\phi_{0,\underline{\varphi}} = \big(L_F(\varphi, s=0)\big)^{-1} \cdot j\big(\chi_{\mathcal{O}_E} \otimes (\varphi_2 \circ \det)\big) \in \mathcal{J}_{\underline{\varphi}}^K$$

unter $\mathsf{T}^{\mathrm{int}}$ ist somit diejenige sphärische Funktion im Bild von $\mathsf{T}^{\mathrm{int}} = \mathsf{T}^{\mathrm{int}}_{\varphi}$ in $\mathcal{K}_{\underline{\eta}}$, die im Einselement den Wert $\boxed{\frac{L_E(\underline{\eta}', s=0)}{L_F(\varphi, s=0)}}$ annimmt.

Nun kann in der eben geschilderten unverzweigt-nichtausgearteten Situation *jeder* Verkettungsoperator $\mathsf{T}' \in \mathrm{Hom}_{G(F)}(\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}, \mathcal{K}_{\underline{\eta}}) \cong \mathbb{C}$ durch den Wert im Einselement des T'-Bildes von $\phi_{0,\underline{\varphi}}$ angegeben werden; ein sich aus algebraischer Sicht aufdrängendes Basiselement dieses Raumes ist also der Operator $\mathsf{T}^{\mathrm{sph}}$ (in [Ha92] mit $\mathsf{T}^{\mathrm{loc}}$ bezeichnet), der dadurch gekennzeichnet ist, daß $\mathsf{T}^{\mathrm{sph}}(\phi_{0,\underline{\varphi}})$ diejenige sphärische Funktion im Bild von $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$ in $\mathcal{K}_{\underline{\eta}}$ ist, die im Einselement den Wert 1 annimmt.

Bemerkung: Die Darstellungen $\mathcal{K}_{\underline{\eta}}$ enthalten „sehr viele“ sphärische Vektoren! —Beispielsweise kann ein sphärischer Vektor, dessen Träger die Doppelnebenklasse $E^* \cdot x \cdot K$ zu einem $x \in G(F)$ ist, durch $f_x(exk) := \underline{\eta}(e)$ definiert werden, *sobald* $\underline{\eta}$ auf der Untergruppe $E^* \cap x \cdot K \cdot x^{-1}$ trivial ist; für unverzweigtes $\underline{\eta}$ $\big($trivial auf $\mathcal{O}_E^* = E^* \cap GL_n(\mathcal{O}_F)\big)$gibt es also sogar sogar sphärische Vektoren, die auf $E^* \cdot K$ „leben“ . Aber auch für hochverzweigte Charaktere $\underline{\eta}$ kann man einen, sogar immer unendlichdimensionalen, Unterraum von $\mathcal{K}_{\underline{\eta}}^K$ angeben: der Stabilisator $E^* \cap x \cdot K \cdot x^{-1}$ in E^* zu einem Vertex im BRUHAT–TITS-Gebäude von $PGL_n(F)$, der einer maximalkompakten Untergruppe $x \cdot K \cdot x^{-1}$ entpricht, wird nämlich umso kleiner, je größer die Distanz vom (eindeutigen!) Fixpunkt von E^* auf dem Gebäude zum betrachteten Vertex ist. (Vgl. hierzu im GL_2-Falle die ausführlichen Rechnungen in [JS96, Kap. 3].) Konkret für $n = 2$ und $E = F^2$ spaltend (d.h. $H = T$ Diagonaltorus): es sei $x_r := \begin{pmatrix} \pi^r & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$T(F) \cap x_r \cdot GL_2(\mathcal{O}_F) \cdot x_r^{-1} = Z(\mathcal{O}_F) \cdot \{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid u \in U_F^{(r)}\},$$

mit der Gruppe $U_F^{(r)} \subset \mathcal{O}_F^*$ der r-ten höheren Einseinheiten. Ist also $\underline{\eta} : T(F) \to \mathbb{C}^*$ von der Form $\begin{pmatrix} a \cdot c & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mapsto \eta_Z(a) \cdot \eta_0(c)$ mit unverzweigtem $\eta_Z (\mathrel{\widehat{=}} \varphi\big|_Z)$ und η_0 trivial (erst) auf $U_F^{(s)}$, so steht oben das Rezept zur Konstruktion eines auf $T(F) \cdot x_r \cdot GL_2(\mathcal{O})$ getragenen sphärischen Vektors, für jedes $r \geq s$. Ebenso sieht man auch im allgemeinen Falle ein, daß durch obige Vorschrift konstruierte Funktionen auf *allen* E^*-K-Doppelnebenklassen zu Vertizes „weit genug draußen“ leben, insbesondere kann $\mathcal{K}_{\underline{\eta}}$ *niemals* zulässig sein!

Für spätere Verwendung werden nun die Ergebnisse dieses Abschnitts zusammengefaßt:

Proposition 1 *Eine étale Algebra E der Dimension $n \geq 2$ über dem lokalen Körper F sei gegeben, und es sei $E \cong \oplus_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Specmax}(E)} E_{\mathfrak{q}}$ die Zerlegung in Körpersummanden; es mögen $\mathcal{O}_F$ und $\mathcal{O}_E$ die jeweiligen Ganzzahlringe bezeichnen.*

Mit $H/_F := GL_E(E) \subset G := GL_F(E) \cong GL_n/_F$ werde der zu H gehörige maximale Torus in GL_n bezeichnet (also $H(F) = E^*$).

Ein „F-algebraischer" [etwas unübliche Bezeichnung, siehe vorn] Charakter $\underline{\eta} : E^* \to \mathbb{C}^*$ mit der Zerlegung $\underline{\eta} = \prod_{\mathfrak{q}} \eta_{\mathfrak{q}}$ in „lokale" Charaktere $\eta_{\mathfrak{q}} : E_{\mathfrak{q}}^* \to \mathbb{C}^*$ sei gegeben, und es bezeichne $\mathcal{K}_{\underline{\eta}} := \mathrm{Ind}_{H(F)}^{G(F)}(\underline{\eta})$ die aus $\underline{\eta}$ induzierte Darstellung von $G(F)$.

Zu einem primitiven Vektor $v_0 \neq 0$ des $\mathcal{O}_F$-Gitters $\mathcal{O}_E$ sei $P := \mathrm{Stab}_G(< v_0 >_F)$ die zugehörige F-maximalparabolische Untergruppe in G; es bezeichnen $\omega_1, (\omega_n - \omega_1)$ die durch die Determinanten der Faktoren GL_1, GL_{n-1} des Leviquotienten von P gegebene Basis von $X^*(P)$. Zu stetigen Charakteren $\varphi_1, \varphi_2 : F^* \to \mathbb{C}^*$ mit $\varphi := \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \not\equiv \mathbf{1}$ ist ein zugehöriger Charakter von $P(F)$ durch $\underline{\varphi} := \big(\varphi_1 \circ \omega_1, \varphi_2 \circ (\omega_n - \omega_1)\big)$ definiert, und es bezeichne $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}} := \mathrm{Ind}_{P(F)}^{G(F)} \underline{\varphi}$ die hieraus nach $G(F)$ induzierte Darstellung. Ferner setze man $\underline{\eta}' := \underline{\eta} \cdot (\varphi_2 \circ N_F^E)^{-1} : E^* \to \mathbb{C}^*$; $\underline{\eta}' \mathrel{\widehat{=}} (\ldots, \eta'_{\mathfrak{q}}, \ldots)_{\mathfrak{q}}$.

Das aus den Homothetien bestehende Zentrum von G, $Z \cong \mathbb{G}_m$, ist in P und H enthalten.

Die Charaktere mögen die folgenden <u>Voraussetzungen</u> erfüllen:

- $\underline{\varphi}\big|_{Z(F)} = \underline{\eta}\big|_{Z(F)}$ *(oder äquivalent $\varphi = \prod_{\mathfrak{q} \in S_E} (\eta'_{\mathfrak{q}})^{[E_{\mathfrak{q}}:F]}$).*
- *Für jedes $\mathfrak{q} \in S_E = \mathrm{Specmax}(E)$ ist der „lokale" Charakter $\eta'_{\mathfrak{q}} = \frac{\eta_{\mathfrak{q}}}{\varphi_2 \circ N_F^{E_{\mathfrak{q}}}} : E_{\mathfrak{q}}^* \to \mathbb{C}^*$* nichttrivial.

<u>Dann gilt:</u>

(i) Es ist $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{G(F)}(\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}, \mathcal{K}_{\underline{\eta}})) = 1$; ein Erzeuger $\mathsf{T}^{\mathrm{int}}$ ist beschrieben durch

$$\mathsf{T}^{\mathrm{int}}(\phi)(g) = \int_{H(F)/Z(F)} \phi(m^{(\varnothing)} \cdot h \cdot g) \cdot \underline{\eta}^{-1}(h) \mathrm{d}\overline{h}$$

für $g \in G(F)$ und $\phi \in \mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$, wobei $m^{(\varnothing)} \in G(F)$ ein Element der Determinante 1 mit $\big(m^{(\varnothing)}\big)^{-1}(v_0) = 1_E$ ist.

(ii) Liegt $\phi = j(f \otimes \varphi_2)$ im Bild des Verkettungsoperators $j : \mathcal{S}(E) \otimes (\varphi_2 \circ \det) \to \mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$, so gilt $\mathsf{T}^{\mathrm{int}}\big(j(f \otimes \varphi_2)\big)(g) = \zeta_E\big(g.(f \otimes \varphi_2), \underline{\eta}', s = 0\big)$; hierdurch kann auch die meromorphe Fortsetzung von $\mathsf{T}^{\mathrm{int}}$ für solche Charaktere $\underline{\eta}$ gegeben werden, für die das obige Integral nicht absolut konvergiert.

(iii) Es seien zusätzlich *die Charaktere $\varphi_j : F^* \to \mathbb{C}^*$ $(j = 1, 2)$ beide unverzweigt, so daß die $G(F)$-Darstellung $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$ also sphärische (unter $K := GL_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_E)$ invariante) Vektoren enthält; unter einer Standard-sphärischen Funktion werde derjenige (eindeutig bestimmte!) sphärische Vektor mit dem Wert 1 im Einselement $\mathbb{1}_n$ von $G(F)$ verstanden.*

Es bezeichne $\mathsf{T}^{\mathrm{sph}}$ *denjenigen Erzeuger von* $\mathrm{Hom}_{G(F)}(\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}, \mathcal{K}_{\underline{\eta}})$*, der die Standard-sphärische Funktion* $\phi_{0,\underline{\varphi}}$ *von* $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$ *auf die (einzige) sphärische Funktion mit Wert* 1 *im Einselement im Bild von* $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$ *in* $\mathcal{K}_{\underline{\eta}}$ *abbildet.*

Dann gilt: $\mathsf{T}^{\mathrm{int}} = \dfrac{L_E(\underline{\eta}', s=0)}{L_F(\varphi, s=0)} \cdot \mathsf{T}^{\mathrm{sph}}.$ □

Bemerkung: Im Falle $n = 2$ wurde dies in [Ha81] durch explizite Rechnungen gezeigt; hier ist eine solche Algebra E *entweder* eine quadratische Körpererweiterung (verzweigt oder unverzweigt) *oder* zu $F \oplus F$ isomorph/zerfallend; jeder der drei Fälle erfordert eine eigene Rechnung. Vom Verfasser wurden ähnliche Rechnungen (unter Benutzung expliziter B-K–Iwasawa-Zerlegungen von Elementen in $m^{(I)} \cdot H(F)$, vgl. 5.1) für allgemeines n ausgeführt; sie führen auf induktive (und nicht unkomplizierte) Weise zum selben Resultat – allerdings braucht man für jede endliche Körpererweiterung ($\hat{=}$ jeden möglichen quasispaltenden F-Torus) einen eigenen „Induktionsanfang“ , dessen Durchführung genau das oben angegebene Verfahren benutzt, das sich dann als „im allgemeinen Falle auch nicht schwieriger“ herausstellt. –Die Verbindung zwischen toroidalen Integralen von Funktionen in P-induzierten Darstellungen und Zetawerten ist –wie gesagt– in [Wi85] zu finden (dort im globalen Kontext, mit P-Eisensteinreihen); Anregungen zur Behandlung der Multiplizität-1-Problematik mittels der Stratifizierung stammen von G. Harder und C. Kaiser.

Ist nun der Charakter $\underline{\eta}$ *diagonal*, d.h. entsteht er als $\underline{\eta} = \psi \circ N_F^E$ mit einem Charakter $\psi : F^* \to \mathbb{C}^*$, so vereinfacht sich einiges: Es gilt (mit $N_F^{E_{\mathfrak{q}}} =: N_{\mathfrak{q}}$) $\eta_{\mathfrak{q}} = \psi \circ N_{\mathfrak{q}}$ für jedes $\mathfrak{q} \in S_E$, und ist $\underline{\varphi} = \big(\varphi_1 \circ \omega_1, \varphi_2 \circ (\omega_n - \omega_1)\big)$ mit Charakteren $\varphi_j : F^* \to \mathbb{C}^*$, so hat man mit $\psi' := \frac{\psi}{\varphi_2}$ also $\eta'_{\mathfrak{q}} = \psi' \circ N_{\mathfrak{q}}$. –Wegen $N_F^E\big|_{F^* \cdot 1_E} = (x \mapsto x^n)$ ist der Charakter $\underline{\eta}'\big|_Z$ auf $F^* = Z(F)$ gerade $(\psi')^n$; die Bedingung $\Diamond_Z$: $\underline{\eta}\big|_Z = \underline{\varphi}\big|_Z$ ist also genau für $\varphi (:= \frac{\varphi_1}{\varphi_2}) \stackrel{!}{=} (\psi')^n$ erfüllt.

Die Nichttrivialitätsbedingung $\mathrm{NT}(\underline{\varphi}, \underline{\eta})$ besagt in dieser Situation gerade

$$\forall \mathfrak{q} : \ \eta'_{\mathfrak{q}} \not\equiv \mathbf{1},$$

und dies ist offenbar genau dann erfüllt, wenn ψ' ein *nichttrivialer* Charakter auf F^* ist –bzw. wenn $\psi \neq \varphi_2$.

Im Falle $\varphi_2 = \mathbf{1}$, auf den man sich ja ohne Einschränkung zurückziehen darf, muß also $\boxed{\varphi = \psi^n}$ und $\boxed{\psi \neq \mathbf{1}}$ gelten, damit die Proposition angewendet werden kann; man erhält (wenn man noch überlegt, welche Eigenschaften des Körpers $\mathbb{C}$ als Wertekörpers der Funktionen und Charaktere benutzt wurden: nämlich „keine“):

Corollar 1 *Ist* $\psi : F^* \to \mathbb{C}^*$ *ein nichttrivialer Charakter, für den* $\varphi := \psi^n$ *unverzweigt ist, so ist mit dem Charakter* $\eta := \psi \circ N_F^E$ *auf* $E^* = H(F)$ *der Vektorraum* $\mathrm{Hom}_{G(F)}(\mathcal{J}_\varphi, \mathcal{K}_\eta)$ *von der Dimension* 1 *(über jedem Körper, in dem alle Charakterwerte vorhanden sind); zwischen seinem „geometrischen“ Erzeuger* $\mathsf{T}^{\mathrm{int}}_{(\psi)}$ *und seinem „algebraischen“ Erzeuger* $\mathsf{T}^{\mathrm{sph}}_{(\psi)}$ *besteht die Proportionalität*

$$\mathsf{T}^{\mathrm{int}}_{(\psi)} = \frac{L_E(\eta, 0)}{L_F(\varphi, 0)} \cdot \mathsf{T}^{\mathrm{sph}}_{(\psi)}.$$

3.6 Räume endlich-adelischer Verkettungsoperatoren und Zetawerte

Achtung, abrupter Notationswechsel!!

Es sei jetzt F ein Zahlkörper und E ein Erweiterungskörper[13] von F vom Grade $n := [E : F] \geq 2$. Dies definiert –bis auf Konjugation– einen (fast anisotropen) maximalen Torus $H_0 := \mathrm{Res}_F^E(\mathbb{G}_m/E) \subset G_0 := GL_n/F$. Es sei $v_0 \in E \setminus \{0\} = F^n \setminus \{0\}$ und $P_0 \subset G_0$ diejenige maximale F-Parabolische, die die Gerade durch v_0 stabilisiert. Mit H, P, G werden die Skalarrestriktionen der entsprechenden vorgenannten Gruppen von F nach $\mathbb{Q}$ bezeichnet, also insbesondere $H = \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^E(\mathbb{G}_m/E) = T_E$. (Vgl. die Abschnitte 2.1, 2.4.1, 2.5.)

Es sei ψ ein algebraischer HECKE-Charakter auf F (vgl. Abschnitt 1.3) von *negativem* Gewicht $w = \mathrm{wt}(\psi) < 0$, und χ sei ein DIRICHLET-Charakter auf E. Mit dem DIRICHLET-Charakter $\omega := \chi\big|_{\mathbb{I}_F}$ auf F werden hiermit algebraische HECKE-Charaktere $\eta := \chi \cdot (\psi \circ N_F^E)$ auf E und $\varphi := \omega \cdot \psi^n$ auf F gebildet, die folglich beide negatives Gewicht haben; es sei K deren gemeinsamer Wertekörper. Es gehören dann hierzu die stetigen Charaktere auf adelewertigen Punktegruppen $\eta_{\mathbb{A}} = (\eta_\infty, \eta_f) : H(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^*$ und $\underline{\varphi} = (\underline{\varphi}_\infty, \underline{\varphi}_f) \mathrel{\widehat{=}} \big(\varphi \circ \omega_1, \mathbf{1} \circ (\omega_N - \omega_1)\big) : P(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^*$, die nach ihrer Konstruktion auf dem zu $\mathbb{I}_F$ isomorphen Zentrum $Z(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A}) \cap H(\mathbb{A}) \subset G(\mathbb{A})$ übereinstimmen. Hiermit können nun induzierte Darstellungen $\mathcal{J}_{\varphi_f} := \mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A}_f)}^{G(\mathbb{A}_f)}(\underline{\varphi}_f)$ und $\mathcal{K}_{\eta_f} := \mathrm{Ind}_{H(\mathbb{A}_f)}^{G(\mathbb{A}_f)}(\eta_f)$ gebildet werden, die natürlich eingeschränkte Tensorprodukte über alle endlichen Stellen sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\varphi_f} &= \widehat{\bigotimes}_{p \in \mathbb{V}_{\mathbb{Q},f}} \mathrm{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\varphi_p) \\ &= \widehat{\bigotimes}_{\mathfrak{p} \in \mathbb{V}_{F,f}} \mathrm{Ind}_{P_0(F_\mathfrak{p})}^{G_0(F_\mathfrak{p})}(\varphi_\mathfrak{p}) =: \widehat{\bigotimes}_{\mathfrak{p} \in \mathbb{V}_{F,f}} \mathcal{J}_{\varphi_\mathfrak{p}} \end{aligned}$$

(da $G(\mathbb{Q}_p) = G_0(F \otimes \mathbb{Q}_p) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{V}_{F,f}\colon \mathfrak{p}|p} G_0(F_\mathfrak{p}) = \prod_{\mathfrak{p}|p} GL_n(F_\mathfrak{p})$, etc.); die Eingeschränkte-Tensorprodukt-Struktur ist bezüglich der Standard-sphärischen Vektoren in $\mathcal{J}_{\varphi_\mathfrak{p}}$ für φ unverzweigt an $\mathfrak{p}$ zu nehmen; analog:

$$\mathcal{K}_{\eta_f} = \widehat{\bigotimes}_{\mathfrak{p} \in \mathbb{V}_{F,f}} \mathrm{Ind}_{H_0(F_\mathfrak{p})}^{G_0(F_\mathfrak{p})}(\eta_\mathfrak{p}) =: \widehat{\bigotimes}_{\mathfrak{p} \in \mathbb{V}_{F,f}} \mathcal{K}_{\eta_\mathfrak{p}}.$$

Die „lokalen Faktoren" $\mathcal{J}_{\varphi_\mathfrak{p}}, \mathcal{K}_{\eta_\mathfrak{p}}$ sind nun [was niemanden überraschen dürfte] genau von der in den vorherigen Abschnitten dieses Kapitels untersuchten Natur (der Übergang geschieht durch Streichen des Index' $\mathfrak{p}$): zunächst ist natürlich für jede endliche Stelle $\mathfrak{p}$ von F das Tensorprodukt $E_\mathfrak{p} := E \otimes_F F_\mathfrak{p}$ eine étale $F_\mathfrak{p}$-Algebra!

Da negative Gewichte der beteiligten HECKE-Charaktere vorausgesetzt wurden, gilt insbesondere für die lokalen Komponenten von φ: $|\,\varphi_\mathfrak{p}(\pi_\mathfrak{p})\,| = N(\mathfrak{p})^{\frac{\mathrm{wt}(\varphi)}{2}} < 1$; analog für $\eta_\mathfrak{p}$. Die lokalen Charaktere sind also nichttrivial (anders gesagt: überall ist die lokale Nichtausgeartetheits-Bedingung $NT(\underline{\varphi}_\mathfrak{p}, \underline{\eta}_\mathfrak{p})$ erfüllt; die Bedingung $(\diamond_Z)_\mathfrak{p}$ gilt ja nach Konstruktion ebenfalls), und die lokalen Verkettungsintegrale sind sogar absolut konvergent;

[13] Dies alles funktioniert offenbar auch, wenn E eine étale F-Algebra ist, z.B. $E = F^n$. D.h. die endlich-adelischen Bausteine für die Behandlung spaltend-torischer modularer Symbole (wie in [Ha88, Kap. 6] bzw. wie am Schluß von [Ha99] angedeutet) stehen hiermit zur Verfügung.

es gilt also gemäß Proposition 1 für *jede* endliche Stelle $\mathfrak{p}$ von F:

$$\dim_{\mathbb{C}}\big(\mathrm{Hom}_{GL_n(F_\mathfrak{p})}(\mathcal{J}_{\varphi_\mathfrak{p}},\mathcal{K}_{\eta_\mathfrak{p}})\big)=1,$$

und man verfügt über die Erzeuger $\mathsf{T}^{\mathrm{int}}_{\mathfrak{p}}$ dieser Räume, die durch Integration gegen $\eta_\mathfrak{p}$ über den „projektiven Torus" $\overline{H}(F_\mathfrak{p})=H(F_\mathfrak{p})/Z(F_\mathfrak{p})=(E\otimes_F F_\mathfrak{p})^*/(F_\mathfrak{p})^*$ gegeben sind.

Es folgt, daß der Raum endlich-adelischer Verkettungsoperatoren

$$\mathrm{Hom}_{G(\mathbb{A}_f)}(\mathcal{J}_{\varphi_f},\mathcal{K}_{\eta_f})\cong\widehat{\bigotimes_{\mathfrak{p}}}\mathrm{Hom}_{GL_n(F_\mathfrak{p})}(\mathcal{J}_{\varphi_\mathfrak{p}},\mathcal{K}_{\eta_\mathfrak{p}})$$

als (eingeschränktes) Tensorprodukt eindimensionaler Räume selbst von der Dimension 1 ist; im Falle der Konvergenz des EULER-Produkts ist ein erzeugendes Element $\mathsf{T}^{\mathrm{int}}_f=\bigotimes_\mathfrak{p}\mathsf{T}^{\mathrm{int}}_\mathfrak{p}$ durch Integration über den endliche-Adele-wertigen projektiven Torus gegeben:

$$\big(\mathsf{T}^{\mathrm{int}}_f(\phi_f)\big)(\underline{g}_f)=\int_{H(\mathbb{A}_f)/Z(\mathbb{A}_f)}\phi_f(m^{(\varnothing)}\cdot\underline{h}_f\cdot\underline{g}_f)\cdot\eta_f^{-1}(\underline{h}_f)\mathrm{d}\overline{h}_f\tag{20}$$

$$=\prod_\mathfrak{p}\int_{H(F_\mathfrak{p})/Z(F_\mathfrak{p})}\phi_\mathfrak{p}(m^{(\varnothing)}\cdot h_\mathfrak{p}\cdot g_\mathfrak{p})\cdot\underline{\eta}_\mathfrak{p}^{-1}(h_\mathfrak{p})\mathrm{d}\overline{h}_\mathfrak{p}\tag{21}$$

wobei $\mathrm{d}\overline{h}_f$ als Produktmaß der HAAR-Maße $\mathrm{d}\overline{h}_\mathfrak{p}$ gewählt ist; es ist wieder $m^{(\varnothing)}\in SL_n(F)$ eine Matrix mit Determinante 1, deren Inverses den gewählten Vektor v_0 auf des Einselement von E abbildet. –Die erwähnte Konvergenz des EULER-Produkts $\prod_\mathfrak{p}\int_{H(F_\mathfrak{p})/Z(F_\mathfrak{p})}\cdots$ liegt nun genau für $\mathrm{wt}(\psi)\leq-3$ vor (cf. Abschnitt 1.3.4); um auch in den Fällen $\mathrm{wt}(\psi)\in\{-2,-1\}$ dem Integral einen Sinn zu geben, hat man sich der bedingten Konvergenz der zugehörigen DIRICHLET-Reihe bzw. der meromorphen Fortsetzung der L-Funktionen zu bedienen, die wegen der hier vorausgesetzten Nichttrivialität von ψ (und damit von φ,η) auch zum Ziel führt, so daß man sich auch dann $\mathsf{T}^{\mathrm{int}}_f$ als „durch globale TATE-Zetafunktionen gegeben" denken kann.

Da Verzweigung globaler Objekte immer nur an endlich vielen Stellen statthat, kann man eine *endliche* Teilmenge $S_f\subset\mathbb{V}_{F,f}$ wählen, so daß mit $S:=S_f\cup\mathbb{V}_{F,\infty}$ (der Menge der in dieser Situation „schlechten" Stellen) gilt:

$$\mathfrak{p}\notin S\implies\begin{array}{l}i)\ \varphi_\mathfrak{p}\text{ ist unverzweigt,}\\ ii)\ \forall\mathfrak{P}\in\mathbb{V}_{E,f},\ \mathfrak{P}\mid\mathfrak{p}:\ \eta_\mathfrak{P}\text{ ist unverzweigt.}\end{array}$$

(Insbesondere ist dann $\chi_\mathfrak{p}$ trivial an Stellen $\mathfrak{P}$ von E oberhalb Stellen $\mathfrak{p}$ von F, die nicht zu S gehören.)

Für $\mathfrak{p}\notin S$ befindet man sich also in der Situation des Teils (*iii*) der Proposition und des Corollars: es gibt hier einen lokalen „algebraisch-kanonischen" Verkettungsoperator $\mathsf{T}^{\mathrm{sph}}_\mathfrak{p}$, der die jeweiligen Standard-sphärischen Funktionen aufeinander abbildet, und der Proportionalitätsfaktor zwischen diesem und der lokalen Komponente $\mathsf{T}^{\mathrm{int}}_\mathfrak{p}$ des „geometrischen" (durch Integration gegebenen) Verkettungsoperators ist der erwünschte Quotient von lokalen L-Werten.

Definiert man nun für *jede* endliche Stelle $\mathfrak{p}$ von F einen lokalen Verkettungsoperator $\mathsf{T}^{\mathrm{loc}}_\mathfrak{p}:\mathcal{J}_{\varphi_\mathfrak{p}}\to\mathcal{K}_{\eta_\mathfrak{p}}$ durch

$$\mathsf{T}^{\mathrm{loc}}_\mathfrak{p}:=\begin{cases}\mathsf{T}^{\mathrm{sph}}_\mathfrak{p} & ,\text{ falls }\ \mathfrak{p}\notin S\\ \frac{L_\mathfrak{p}(\varphi_\mathfrak{p},0)}{L_{E_\mathfrak{p}}(\eta_\mathfrak{p},0)}\cdot\mathsf{T}^{\mathrm{int}}_\mathfrak{p} & ,\text{ falls }\ \mathfrak{p}\in S\end{cases}$$

und setzt hiermit

$$\mathsf{T}_f^{\mathrm{loc}} := \bigotimes_{\mathfrak{p}\in\mathbb{V}_{F,f}} \mathsf{T}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{loc}},$$

so ist dies ein weiteres Element in $\mathrm{Hom}_{G(\mathbb{A}_f)}(\mathcal{J}_{\varphi_f}, \mathcal{K}_{\eta_f})$, und es gelten die Proportionalitäten $\forall\mathfrak{p}: \ \mathsf{T}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{int}} = \frac{L_{E_{\mathfrak{p}}}(\eta_{\mathfrak{p}},0)}{L_{F_{\mathfrak{p}}}(\varphi_{\mathfrak{p}},0)} \cdot \mathsf{T}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{sph}}$ (nach dem Corollar für $\mathfrak{p} \notin S$ und nach Definition für $\mathfrak{p} \in S$), also insgesamt:

$$\mathsf{T}_f^{\mathrm{int}} = \frac{L_E(\eta_f, 0)}{L_F(\varphi_f, 0)} \cdot \mathsf{T}_f^{\mathrm{loc}}. \tag{22}$$

Man sieht auch, daß dieser lokal konstruierte erzeugende Verkettungsoperator $\mathsf{T}_f^{\mathrm{loc}}$ von der Wahl von S unabhängig ist, da $\mathsf{T}_f^{\mathrm{int}}$ und der Quotient von (endlichen Anteilen von) L-Werten es offenbar sind!

Die endlich-adelischen L-Werte, deren Quotient hier als Proportionalitätsfaktor der beiden Verkettungsoperatoren auftritt, lassen sich wiederum als Zeta-Integrale bzw. -Funktionen auffassen, z.B.

$$L_F(\varphi_f, 0) = \int_{\mathbb{I}_{F,f}} \chi_{\hat{\mathcal{O}}_F}(\underline{x}_f) \cdot \varphi_f(\underline{x}_f) \mathrm{d}\underline{x}_f.$$ [14]

Es ist nachzutragen, daß die Definition von $\mathsf{T}_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{loc}}$ für eine schlechte Stelle $\mathfrak{q} \in S_f$ „legal“ ist, d.h. daß durch die Zahl $L_{E_{\mathfrak{p}}}(\eta_{\mathfrak{p}}, 0)$ dividiert werden darf. Diese ist ja –wenn wieder $E \otimes_F F_{\mathfrak{q}} = \bigoplus_{\mathfrak{Q}|\mathfrak{q}} E_{\mathfrak{Q}}$ die Zerlegung der lokalen étalen Algebra in Körpersummanden ist– $= \prod_{\mathfrak{Q}\in\mathbb{V}_{E,f},\, \mathfrak{Q}|\mathfrak{q}} L_{E_{\mathfrak{Q}}}(\eta_{\mathfrak{Q}}, 0)$. Die endlich vielen Faktoren $L_{E_{\mathfrak{Q}}}(\eta_{\mathfrak{Q}}, 0)$ sind aber alle von 0 verschieden, denn *entweder* ist der einschlägige lokale Charakter $\eta_{\mathfrak{Q}} = \chi_{\mathfrak{Q}} \cdot (\psi_{\mathfrak{q}} \circ N_{F_{\mathfrak{q}}}^{E_{\mathfrak{Q}}})$ verzweigt –dann ist das lokale TATE-Integral $= 1$–, *oder* unverzweigt –aber dann ist $\eta_{\mathfrak{Q}}(\pi_{\mathfrak{Q}}) \neq 1$ wegen des negativen Gewichtes von (ψ und damit) η, also $L_{E_{\mathfrak{Q}}}(\eta_{\mathfrak{Q}}, 0) = \big(1 - \eta_{\mathfrak{Q}}(\pi_{\mathfrak{Q}})\big)^{-1} \in \mathbb{C}^*$ auch hier!

[14] Das hierin auftretende χ ist eine charakteristische Funktion, kein Charakter.

4 Archimedisch-Lokales: $(\mathfrak{g}, K)$–Kohomologie

4.1 Die maximalkompakten Untergruppen und ihre Darstellungen

4.1.1 $GL_n(\mathbb{C})$ und $U(n)$ als $\mathbb{R}$-algebraische Gruppen

Man kann bekanntlich $\mathbb{C}$ als die $\mathbb{R}$-Algebra der reellen 2×2-Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ beschreiben; so wird $\mathbb{C}^*$ die algebraische Gruppe $\mathrm{Res}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/_{\mathbb{C}}) \cong \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a^2+b^2 \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}\right\}$ über $\mathbb{R}$, dies ist der Zentralisator in $GL_2/_{\mathbb{R}}$ von $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Die komplexe Konjugation ist in diesen Modellen durch den $\mathbb{R}$-algebraischen Homomorphismus $\overline{(\cdot)} : a \mapsto a, b \mapsto -b$ gegeben. In analoger Blockmatrizen-Weise kann man Matrizengruppen mit komplexen Einträgen als Gruppen reeller Matrizen der doppelten Größe realisieren; Matrixoperationen wie Transposition und komplexe Konjugation sind dann immer so zu verstehen, daß sie sich auf die Matrix von *komplexen* Zahlen (entsprechend 2×2-Matrizen) beziehen.

Es sei $G_0 := GL_n/_{\mathbb{C}}$ und $V := \mathbb{C}^n$ die Standarddarstellung von G_0; wie üblich sei $T_0 \subset G_0$ der Diagonaltorus und $B_0 \subset G_0$ die Borel-Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen, dies versieht dann den Charaktermodul $X^*(T_0)$ mit Wurzel- und Gewichtegitter, und letzteres ist von den fundamentaldominanten Gewichten $\omega_j := \prod_{k=1}^{j} t_k$ $(1 \leq j \leq n)$ aufgespannt, die als die Höchstgewichte der Darstellungen $\bigwedge^j(V)$ auftreten. –Es werden hiermit die $\mathbb{R}$-algebraischen Gruppen $G := \mathrm{Res}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(G_0) \supset B \supset T$ definiert; dann ist $G(\mathbb{C}) \cong GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$, und hierhinein ist $G(\mathbb{R})$ als der Graph der komplexen Konjugation eingebettet. Die $\mathbb{R}$-algebraische Darstellung $\overline{V}$„$= V \circ \mathrm{pr}_2$“ ist dann die Darstellung auf dem Vektorraum V, bei der $g \in G(\mathbb{R})$ auf dem Vektor $v \in V$ durch die Matrixmultiplikation $\overline{g} \cdot v$ operiert; so ist natürlich $\overline{V} \cong \mathcal{M}_G(\overline{\omega}_1)$ und entsprechend $\bigwedge^j(\overline{V}) \cong \mathcal{M}_G(\overline{\omega}_j)$, wo $\overline{\omega}_j\big((t_1, \ldots, t_n)\big) = \prod_{k=1}^{j} \overline{t}_j$.

Das absolute Charaktergitter $X^*(T) = \mathrm{Hom}(T \times \mathbb{C}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}/_{\mathbb{C}})$ ist zu $\mathbb{Z}^{2n}$ isomorph, und die Menge $\{\omega_j, \overline{\omega}_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ ist die Basis der fundamentaldominaten Gewichte für das Gewichtegitter; durch dessen positiven Kegel bzgl. der Wurzeln *in* B der dominanten (ganzen) Gewichte werden also die irreduziblen algebraischen Darstellungen von $GL_n(\mathbb{C})$ beschrieben.

Sind nun $\omega = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \omega_j$ eine Linearkombination der „holomorphen“ fundamentaldominanten Gewichte ω_i und $\overline{\omega'} = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \overline{\omega}_j$ eine Linearkombination der „antiholomorphen“ fundamentaldominanten Gewichte $\overline{\omega}_i$ von G, so ist natürlich

$$\mathcal{M}_G(\omega + \overline{\omega'}) = \mathcal{M}_{GL_n(\mathbb{C})}(\omega) \otimes \mathcal{M}_{\overline{GL_n(\mathbb{C})}}(\overline{\omega'}) = \mathcal{M}_{GL_n(\mathbb{C})}(\omega) \otimes \overline{\mathcal{M}_{GL_n(\mathbb{C})}(\omega')}$$

(für $\omega' = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \omega_j = \overline{(\overline{\omega'})}$); die beiden Tensorfaktoren werden mittels der Weyl-Konstruktion (vgl. Abschnitt 2.3.2) in den Tensoralgebren von V bzw. $\overline{V}$ realisiert.

Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G ist natürlich einfach die Matrixalgebra $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ mit der Kommutatorklammer $[X, Y] := X \cdot Y - Y \cdot X$ als Lie-Klammer.

Die *unitäre Gruppe* $U(n)$ zur positiv-definiten hermiteschen Form auf $V = \mathbb{C}^n$ mit der Einheitsmatrix als Strukturmatrix, also die Gruppe aller $g \in GL_n(\mathbb{C})$ mit ${}^t\overline{g}^{-1} = g$, ist eine maximalkompakte Untergruppe in $GL_n(\mathbb{C})$, und zwar bis auf Konjugation die einzige („weil“ aufgrund der Existenz des HAAR-Maßes *jede* kompakte Untergruppe eine positiv-definite hermitesche Form invariant läßt).

Es ist also $U(n)$ die Gruppe der $\mathbb{R}$-wertigen Punkte der $\mathbb{R}$-algebraischen Untergruppe

$$K/_{\mathbb{R}} := \{g \in G \mid {}^t\overline{g} \cdot g = \mathbb{1}_n\};$$

damit wird

$$K(\mathbb{C}) = \{(g,h) \in GL_n/_{\mathbb{C}} \times GL_n/_{\mathbb{C}} \mid h = {}^tg^{-1}\} \cong GL_n(\mathbb{C}),$$

denn offenbar gilt

$$\begin{aligned} K(\mathbb{R}) &= K(\mathbb{C}) \cap G(\mathbb{R}) \\ &= \{(g, {}^tg^{-1})\} \cap \{(h, \overline{h})\}. \end{aligned}$$

Die LIE-Algebra $\mathfrak{k}/_{\mathbb{R}}$ von K ist, wie man leicht nachrechnet,

$$\mathfrak{k} = \{A + iB \mid A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), A \text{ antisymmetrisch}, B \text{ symmetrisch}\}.$$

Ihre Komplexifizierung $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ist somit der Graph von $(Z \mapsto -{}^tZ)$ in $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})) = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$, oder anders gesagt der Eigenraum zum Eigenwert $+1$ der Involution $\vartheta : (U, V) \mapsto (-{}^tV, -{}^tU)$ auf $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$; da eine beliebige quadratische komplexe Matrix Z als $Z = X + i \cdot Y$ mit der komplexen antisymmetrischen Matrix $X = \frac{1}{2} \cdot (Z - {}^tZ)$ und der symmetrischen Matrix $Y = \frac{-i}{2} \cdot (Z + {}^tZ)$ geschrieben werden kann, ist $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ (als komplexe LIE-Algebren), und folglich ist $K \cong U(n)$ eine (und zwar *die* kompakte) reelle Form von GL_n. –Die Gruppe $K(\mathbb{C}) \cong GL_n(\mathbb{C})$ wirkt auf ihrer LIE-Algebra $\mathfrak{k} \otimes \mathbb{C} = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) = V^{\vee} \otimes_{\mathbb{C}} V$ mittels der adjungierten Darstellung $\mathrm{Ad} : (g, Z) \mapsto g \cdot Z \cdot g^{-1}$.

4.1.2 Einige algebraische Darstellungen

Die Darstellungen von $K(\mathbb{R}) = U(n)$ auf $\mathbb{C}$-Vektorräumen (wie $V, \overline{V}, \mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}, \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} \ldots$) sind bekanntlich vollständig beschrieben durch die zugehörigen Darstellungen auf denselben Räumen zunächst der Komplexifizierung $K(\mathbb{C}) \cong GL_n(\mathbb{C})$ und dann durch die abgeleiteten Darstellungen der komplexifizierten LIE-Algebra $\mathfrak{k} \otimes \mathbb{C} =: \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$; da der halbeinfache Anteil $SU(n)$ bekanntlich für $n \geq 2$ topologisch einfach zusammenhängend ist, erhält man *alle* Darstellungen von K (auf $\mathbb{C}$-Vektorräumen) aus Darstellungen von $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$.

Das $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$-invariante Komplement von $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} =: \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^+$ in $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ werde mit $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^-$ bezeichnet, es handelt sich also um den Eigenraum zu -1 der Involution ϑ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^- &= \{(U, V) \mid (-{}^tV, -{}^tU)) = -(U, V)\} \\ &= \{(U, {}^tU\}. \end{aligned}$$

Dieses ϑ ist offenbar ein LIE-Algebren-Automorphismus, und damit hat man, daß $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^+ \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^-$ mit dieser Graduierung eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierte LIE-Algebra ist.

Die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\sigma : (U, V) \mapsto (U, -V)$ vertauscht offenbar die beiden Eigenräume $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^{\pm}$ von ϑ, und man kann für $(X, -{}^tX) \in \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ und (U, V) beliebig sofort nachrechnen:

$[(X,-{}^tX),\sigma\big((U,V)\big)] = \sigma\big([(X,-{}^tX),(U,V)]\big)$, d.h. σ ist ein *Isomorphismus* von $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$-Darstellungen von $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^+$ nach $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^-$ –und damit ist (gemäß obiger Bemerkung) die $K(\mathbb{C})$-Darstellung $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^- \cong \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ als isomorph zur adjungierten Darstellung $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \cong V^\vee \otimes V$ identifiziert, also:

$$\Big(K(\mathbb{C}),\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}\Big) \cong \Big(GL_n, \underbrace{\mathcal{M}_{GL_n}(\omega_{n-1}-\omega_n)\otimes\mathcal{M}_{GL_n}(\omega_1)}_{\cong\mathcal{M}_{GL_n}(\omega_1+\omega_{n-1}-\omega_n)\oplus\mathcal{M}_{GL_n}(0)}\Big).$$

Das absolute Gewichtegitter von K $\big($also das $\mathbb{C}$-Gewichtegitter von $K(\mathbb{C}) \cong GL_n(\mathbb{C})\big)$ist erzeugt von den Einschränkungen $\tau_i := \omega_i\big|_K$ der „holomorphen“ fundamental-dominanten Gewichte ω_i; $1 \le i \le n(-1)$; d.h. die fundamentalen Darstellungen sind die äußeren Potenzen der Standarddarstellung V, $\mathcal{M}_K(\tau_i) = \mathcal{M}_{GL_n}(\omega_i)\big|_K \cong \big(\bigwedge^i V\big)\big|_K$. –Was aber sind die Einschränkungen der „antiholomorphen“ fundamentaldominanten Gewichte $\overline{\omega}_i$ von $G/_{\mathbb{R}}$? Es liegt ja (nach der Definition von K) ein Element $k \in G(\mathbb{R}) = GL_n(\mathbb{C})$ genau dann in $K(\mathbb{R})$, wenn $\overline{k} = {}^tk^{-1}$ gilt, aber das heißt ja, daß die Einschränkung der konjugiert-komplexen Standard-Darstellung $\overline{V} : (g,v) \mapsto \overline{g}\cdot v$ auf $K(\mathbb{R})$ isomorph zur *Contragredienten* der Standard-Darstellung $V^\vee : (g,v) \mapsto {}^tg^{-1}\cdot v)$ ist (jeweils $v \in V = \mathbb{C}^n, g \in GL_n(\mathbb{C})$);

$$\mathcal{M}_K(\overline{\tau}_1) := \mathcal{M}_{GL_n}(\overline{\omega}_1)\big|_K \cong \overline{V}\big|_K \overset{!}{\cong} V^\vee\big|_K \cong \mathcal{M}_{GL_n}(\omega_{n-1}-\omega_n)\big|_K = \mathcal{M}_K(\tau_{n-1}-\tau_n)!$$

Ebenso findet man unter Benutzung der Dualitäten zwischen den höheren äußeren Potenzen von V: Für jedes j zwischen 1 und $n-1$ gilt $\overline{\tau}_j := \overline{\omega}_j\big|_K \overset{!}{=} \tau_{n-j}-\tau_n$! (Führt man, wie es manchmal zweckmäßig ist, noch $\omega_0 = 0$ als das triviale Gewicht von GL_n ein und bezeichnet man mit $\tau_0 = 0$ „seine Einschränkung auf K“, so gilt $\boxed{\overline{\tau}_j = \tau_{n-j}-\tau_n}$ für $0 \le j \le n$.)

Wenn nun die K-Isomorphien von Darstellungen untersucht werden sollen, die als Einschränkungen von Darstellungen von G entstehen, so „übersetzt“ man diese mit den gegebenen Rezepten zuerst –soweit möglich– in die Form $\mathcal{M}_K(\sum_{i=1}^n a_i\cdot\tau_i)$ und benutzt dann den Isomorphismus $K\times\mathbb{C} \cong GL_n$; $\tau_i \,\widehat{=}\, \omega_i$, um gegebenenfalls auftretende Tensor- oder andere Produkte wie in Abschnitt 2.3.2 weiter auszureduzieren.

Die <u>erste Anwendung</u>: Zerlegt man die Summe $\bigoplus_{j=1}^{n-1}\bigwedge^j(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$ der „kleinen“ (d.h. $j \le n-1$) äußeren Potenzen der Darstellung von K auf dem Lie-Algebren-Quotienten $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ in irreduzible Darstellungen von K,

$$\bigoplus_{j=1}^{n-1}\bigwedge^j(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}) \cong \bigoplus_{\underline{\tau}}\mathcal{M}_K(\underline{\tau})^{m_{\underline{\tau}}},$$

wobei die K-dominanten Gewichte $\underline{\tau}$ als $\sum_{k=1}^n a_k\cdot\tau_k$ mit $a_k \in \mathbb{N}_0$ für $k \le n$ und $a_n \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden, so kommen für $n > 2$ *genau zweimal* „halbeinfache“ Koeffizienten $a_k \ge n$ (mit $k \le n-1$!) vor, und zwar in $\underline{\tau} = \tau^\uparrow := n\cdot\tau_1-\tau_n$ und seinem Contragredienten $\underline{\tau} = \tau^\downarrow := n\cdot\tau_{n-1}-(n-1)\cdot\tau_n = (\tau^\uparrow)^\vee$, die jeweils mit Vielfachheit $m_{\underline{\tau}} = 1$ auftreten; die Restklasse des Elements $\mathbf{u}^\uparrow := u_{12}\wedge u_{13}\wedge\ldots\wedge u_{1n} \in \bigwedge^{n-1}\mathfrak{u}_P(\otimes\mathbb{C})$ in $\bigwedge^{n-1}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$ ist Höchstgewichtsvektor für die Kopie von $\mathcal{M}_K(\tau^\uparrow)$. [Für $n = 2$ tritt genau einmal ein „hoher“ Koeffizient $a_1 = 2$ auf, und zwar das selbstduale $\tau^\updownarrow = 2\cdot\tau_1-\tau_2$ in Vielfachheit

1 in $\bigwedge^1(\mathfrak{g}_\mathbb{C}/\mathfrak{k}_\mathbb{C})$.] –Dies ist wegen $\mathfrak{g}_\mathbb{C}/\mathfrak{k}_\mathbb{C} \cong \mathfrak{p}_\mathbb{C} \cong V^\vee \otimes V \cong \mathrm{End}(V)$ als K-Darstellung genau die Übersetzung von Lemma 1 aus Abschnitt 2.3.3 (über GL_n) in die K-Situation!

Eine zweite Anwendung: mit den (gegen Ende von Abschnitt 2.3.1 im Prinzip eingeführten) Darstellungen von G auf den homogenen n-ären Polynomen vom Grad d in den „holomorphen“ Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ von $\mathbb{C}^n/_\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_d[c+d] = \mathrm{Sym}^d(V^\vee) \otimes \det^{c+d} = \mathcal{M}_G(d\cdot\omega_{n-1} + c\cdot\omega_n)$, ihren Contragredienten $\mathcal{M}_d^\vee[-(c+d)] = \mathcal{M}_G(d\cdot\omega_1 - (c+d)\cdot\omega_n) = \mathrm{Sym}^d(V)\otimes\det^{-(c+d)}$, ihren „antiholomorphen“ Pendants $\overline{\mathcal{M}}_d[c+d] = \mathrm{Sym}^d(\overline{V}^\vee)\otimes\overline{\det}^{c+d} = \mathcal{M}_G(d\cdot\overline{\omega}_{n-1} + c\cdot\overline{\omega}_n)$ und deren Contragredienten $\overline{\mathcal{M}}_d^\vee[-(c+d)] = \mathcal{M}_G(d\cdot\overline{\omega}_1 - (c+d)\cdot\overline{\omega}_n)$ sei für $\underline{d} = (d', d'')$ und $\underline{c} = (c', c'') \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ gesetzt

$$\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}[\underline{c}+\underline{d}] := \mathcal{M}_{d'}[c'] \otimes \overline{\mathcal{M}}_{d''}^\vee[c''] \cong \mathcal{M}_G(d'\cdot\omega_{n-1} + c'\cdot\omega_n + d''\cdot\overline{\omega}_1 - (c''+d'')\cdot\overline{\omega}_n).$$

Dann hat man

$$\begin{aligned}
\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}[\underline{c}+\underline{d}]\big|_K &\cong \big(\mathrm{Sym}^{d'}(V^\vee)\otimes\det^{c'+d'}\big)\big|_K \otimes \big(\mathrm{Sym}^{d''}(\overline{V})\otimes(\overline{\det})^{-(c''+d'')}\big)\big|_K \\
&\cong \big(\mathrm{Sym}^{d'}(V^\vee)\otimes\det^{c'+d'}\big)\big|_K \otimes \big(\mathrm{Sym}^{d''}(V^\vee)\otimes\det^{+(c''+d'')}\big)\big|_K \\
&\cong \mathcal{M}_K(d'\cdot\tau_{n-1} + c'\cdot\tau_n) \otimes \mathcal{M}_K(d''\cdot\tau_{n-1} + c''\cdot\tau_n) \\
&\overset{\text{Pieri}}{\cong} \Big(\bigoplus_{i=0}^{\min(d',d'')} \mathcal{M}_K\big(i\cdot\tau_{n-2} + (d'+d''-2i)\cdot\tau_{n-1} + (c'+c''+i)\cdot\tau_n\big)\Big).
\end{aligned}$$

Nebenbei: man errechnet leicht $\big(\overline{\mathcal{M}_{(d',d'')}[(c',c'')]}\big)^\vee = \mathcal{M}_{(d'',d')}[(c'',c')]$; es ist also $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{(d',d'')}[(c',c'')]$ *hermitesch-selbstdual* (d.h. es erfüllt $\mathcal{M} \overset{!}{=} \big(\overline{\mathcal{M}}\big)^\vee$) *genau* für $d' = d''$ und $c' = c''$.

4.1.3 $U(n)$-Typen in P-induzierten Darstellungen

Es sei wieder $P_0 \subset G_0 = GL_n/_\mathbb{C}$ die als Stabilisator der Geraden $<e_1>_\mathbb{C}$ auftretende maximale Standardparabolische, und $P = \mathrm{Res}_\mathbb{R}^\mathbb{C}(P_0) \subset G/_\mathbb{R}$, also

$$P(\mathbb{R}) = \{\underline{p} = \begin{pmatrix} z & \underline{u} \\ 0 & \underline{m} \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C}^*, \underline{u} \in \mathbb{G}_\mathrm{a}(\mathbb{C})^{n-1}, \underline{m} \in GL_{n-1}(\mathbb{C})\}.$$

Dann ist ein algebraischer Charakter $\underline{\varphi}$ von $P(\mathbb{R})$ von der Form

$$\underline{\varphi} : \underline{p} \mapsto z^{r'} \cdot \overline{z}^{r''} \cdot (\det \underline{m})^{s'} \cdot (\overline{\det \underline{m}})^{s''}$$

für gewisse $r', \ldots, s'' \in \mathbb{Z}$ –anders gesagt:

$$\underline{\varphi} = r'\cdot\omega_1 + s'\cdot(\omega_n - \omega_1) + r''\cdot\overline{\omega}_1 + s''\cdot(\overline{\omega}_n - \overline{\omega}_1),$$

woraus unschwer $\underline{\varphi}\big|_Z = \big(z\cdot\mathbb{1}_n \mapsto z^{r'+(n-1)\cdot s'} \cdot \overline{z}^{r''+(n-1)\cdot s''}\big)$ abzulesen ist.

Der Schnitt von P und K ist die Untergruppe

$$K^P := K \cap P \overset{(!)}{=} K \cap M_P = \{\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \underline{k} \end{pmatrix} \mid z\cdot\overline{z} = 1 \text{ (also } z = e^{i\theta}),\ {}^t\overline{\underline{k}}\cdot\underline{k} = \mathbb{1}_{n-1}\},$$

die man sofort als isomorph zu $U(1) \times U(n-1)$ (also „$K^{(1)} \times K^{(n-1)}$“) erkennt. Die Einschränkung eines Charakters $\underline{\varphi}$ auf P (wie oben) auf K^P ist dann [wegen $z, \det \underline{k} \in U(1) = \{w \in \mathbb{C}^* \mid \overline{w} = w^{-1}\}$] durch $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & \underline{k} \end{pmatrix} \mapsto e^{i(r'-r'')\theta} \cdot (\det \underline{k})^{s'-s''}$ gegeben, d.h. $\underline{\varphi}\big|_{K^P} = (r'-r'') \cdot \tau_1 + (s'-s'') \cdot (\tau_n - \tau_1)$; mit den „$K$-Kennzahlen“ $r := r' - r''$ und $s := s' - s''$ des Charakters $\underline{\varphi}$ ist dies auch $= (r-s) \cdot \tau_1 + s \cdot \tau_n$. –Für das zweidimensionale Zentrum Z_{K^P} von K^P kommt zum Zentrum $Z_K \cong U(1) \cdot \mathbb{1}_n$ von K (den unitären Skalarmatrizen) noch der ebenfalls eindimensionale $\mathbb{R}$-anisotrope Torus $Z_{K^P}^{[1]} = \{\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n-1} \end{pmatrix}\}$ hinzu; die als Einschränkungen von $\underline{\varphi}$ erhaltenen Charaktere $\underline{\varphi}\big|_{Z_K}$ bzw. $\underline{\varphi}\big|_{Z_{K^P}^{[1]}}$ auf $U(1)$ sind also [unter der obigen Identifikation $\mathbb{Z} = \operatorname{End}\big(U(1)\big)$] durch die ganzen Zahlen $r + (n-1) \cdot s = (r-s) + n \cdot s$ bzw. r gegeben.

Zur Vereinfachung der Situation kann man mit Potenzen der eindimensionalen Darstellungen det und $\overline{\det}$ tensorieren, um sich hierdurch von s', s'' zu „befreien“; es ist dann statt eines zu r', r'', s', s'' gehörigen Charakters der Charakter $\underline{\varphi} \mathrel{\widehat{=}} (r'-s', r''-s'', 0, 0)$ zu betrachten, der keine „Determinanten-Anteile“ mehr hat. (Dies wurde im nichtarchimedischen Kontext schon diskutiert, vgl. Seite 20.)

Um die (naiv, d.h. ohne Modulus-Charakter-Twist!) parabolisch induzierten Darstellungen

$$\operatorname{Ind}_{P(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}(\underline{\varphi}) := \{\phi : G(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \text{ „freundlich“ } \big| \, \forall p \in P(\mathbb{R}) : \ \phi(p \cdot g) = \big(\underline{\varphi}(p)\big) \cdot \phi(g)\}$$

für solche Charaktere φ *ohne Determinanten-Anteile* zu studieren, beachtet man, daß P_0 das *direkte* Produkt des Zentrums $Z_0 \cong \mathbb{G}_{\mathrm{m}}/\mathbb{C}$ und des Punktstabilisators $P_0^{(1)} = \operatorname{Stab}_{G_0}(e_1)$ ist und sich Entsprechendes auf die Skalarrestriktionen überträgt. Die parabolisch induzierten Darstellungen von $G(\mathbb{R})$, die aus derartigen Charakteren von $P(\mathbb{R})$ induziert sind, haben dann eine „natürliche“ Realisierung als Räume von Funktionen auf $\mathbb{C}^N \setminus \{0\} = V \setminus \{0\} \cong P^{(1)}(\mathbb{R}) \backslash G(\mathbb{R})$ mit gewissen Transformationseigenschaften unter Homothetien,

$$\{f : V \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \mid f \text{ „freundlich“ }, \forall v \in V, z \in \mathbb{C}^* : \ f(z \cdot v) = \big(\underline{\varphi}\big|_Z(z)\big) \cdot f(v)\},$$

wobei die Freundlichkeitsanforderung an die Funktionen (differenzierbar, quadratintegrierbar modulo $Z, \dots$) nach Geschmack bzw. Kontext festzulegen ist. Der Isomorphismus von $\operatorname{Ind}_{P(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}(\underline{\varphi})$ zu einem solchen Funktionenraum wurde im nichtarchimedischen Kontext schon diskutiert, siehe Seite 67!

Die $\mathbb{C}$-Algebra der komplexwertigen Polynomfunktionen auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{C}^n$ ist die bigraduierte Algebra $\operatorname{Sym}^*(V^\vee) \otimes \operatorname{Sym}^*(\overline{V}^\vee)$; der Summand im Grade (a, b) ist die irreduzible Darstellung $\operatorname{Sym}^a(V^\vee) \otimes \operatorname{Sym}^b(\overline{V}^\vee) \cong \mathcal{M}_G\big(a \cdot (\omega_{n-1} - \omega_n) + b \cdot (\overline{\omega}_{n-1} - \overline{\omega}_n)\big)$, bestehend aus denjenigen Polynomen, die bezüglich der „holomorphen“ Koordinaten Z_j homogen vom Grade a, bezüglich der „antiholomorphen“ Koordinaten $\overline{Z}_j$ aber homogen vom Grade b sind; dieser ist erzeugt vom Höchstgewichtsvektor $Z_n^a \cdot \overline{Z}_n^b$, und auf ihm operiert ein Element $z \cdot \mathbb{1}_n$ des Zentrums $Z(\mathbb{R}) \cong \mathbb{C}^* \cdot \mathbb{1}_n$ durch Multiplikation mit $z^{-a} \cdot \overline{z}^{-b}$ (*sic!*), ein $e^{i\theta} \cdot \mathbb{1}_n \in (K \cap Z)(\mathbb{R})$ also durch $e^{i(b-a)\theta}$. –Diese Polynomräume könen nun noch mit ganzzahligen Potenzen von det und $\overline{\det}$ verziert (tensoriert) werden, und unschwer erhält man eine Zerlegung des Raumes $\operatorname{Sym}^*\big((V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^\vee\big) \otimes \det^{*'} \otimes \overline{\det}^{*''}$ aller $\mathbb{R}$-polynomialen Funktionen auf V (bzw. deren Einschränkungen auf $V \setminus \{0\}$, was für

$n \geq 2$ keinen Unterschied macht) nach den zentralen Charakteren, was hier nicht explizit geschehen soll.

Es stabilisiert ja K das Standard-hemitesche Skalarprodukt auf V, das man auch als eine bilineare Paarung $<,>\colon V \times \overline{V} \to \mathbb{C}$ auffassen kann; mittels Dualität hat man auch eine K-invariante bilineare Paarung $<,>^\vee\colon V^\vee \times \overline{V}^\vee \to \mathbb{C}$, und diese induziert eine Kontraktionsabbildung von $\mathrm{Sym}^a(V^\vee) \otimes \mathrm{Sym}^b(\overline{V}^\vee) \cong \mathcal{M}_G\big(a\cdot(\omega_{n-1}-\omega_n)+b\cdot(\overline{\omega}_{n-1}-\overline{\omega}_n)\big)$ nach $\mathrm{Sym}^{a-1}(V^\vee) \otimes \mathrm{Sym}^{b-1}(\overline{V}^\vee)$ (für $a, b \geq 1$). Der *Kern* dieser Kontraktion ist somit ein K-invarianter Unterraum, und er enthält den Höchstgewichtsvektor der linken Seite, da dessen Gewicht (aus Längen-Gründen) auf der rechten Seite nicht vorkommt! Somit enthält dieser Kern der Kontraktion im Bigrade (a, b) die irreduzible Darstellung von K zur Einschränkung dieses Höchstgewichts $\big(a\cdot(\omega_{n-1}-\omega_n)+b\cdot(\overline{\omega}_{n-1}-\overline{\omega}_n)\big)\big|_K = a\cdot(\tau_{n-1}-\tau_n)+b\cdot(\overline{\tau}_{n-1}-\overline{\tau}_n) = b\cdot\tau_1+a\cdot(\tau_{n-1}-\tau_n)$, d.h. die Darstellung $\mathcal{M}_K\big(b\cdot\tau_1+a\cdot(\tau_{n-1}-\tau_n)\big)$. Man kann prüfen, daß dies schon der gesamte Kern der Kontraktion in diesem Bigrad ist!

–In der Sprache der Polynomfunktionen in den $Z_j, \overline{Z}_j$ äußert sich das Anwenden der Kontraktion gerade als das Anwenden des (K-invarianten) LAPLACE-Operators $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial Z_j}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}_j}$; dessen Kern besteht also aus den *harmonischen* Polynomen, und der Summand $\mathcal{M}_K\big(b\cdot\tau_1 + a\cdot(\tau_{n-1}-\tau_n)\big)$ ist das K-Erzeugnis des (für $n \geq 2$!) harmonischen Monoms $Z_n^a \cdot \overline{Z}_1^b$. Der Kern der Kontraktion ist aber bekanntlich auch das Bild der K-äquivarianten Abbildung „Einschränkung von Polynomfunktionen auf V auf die Sphäre $\mathsf{S}(V)$“, wobei $\mathsf{S}(V) = \{(z_1, \ldots, z_n) \in V \setminus \{0\} \mid \sum_{j=1}^n z_j \cdot \overline{z}_j = 1\} = \mathsf{S}^{2n-1} \subset V$! Beachtet man, daß nach dem <u>Satz von STONE–WEIERSTRASS</u> die polynomialen Funktionen in den naheliegendsten Funktionenräumen auf der Sphäre (z.B. in C^0, C^∞ oder $L^2(\mathsf{S}^{2n-1})$) *dicht* liegen, so erhält man die Zerlegung

$$L^2(\mathsf{S}^{2n-1}, \mathbb{C})^{(K)} \cong \bigoplus_{a,b\in\mathbb{N}_0} \mathcal{M}_K\big(a\cdot\tau_1 + b\cdot(\tau_{n-1}-\tau_n)\big)$$

des „Skeletts“ der K-endlichen Vektoren in der HILBERT-Raum-Darstellung $L^2(\mathsf{S}^{2n-1}, \mathbb{C})$ von K!

Vorsicht, die Parameter a und b haben gegenüber Obigem die Rollen getauscht!

Man beachte noch, daß alle Vielfachheiten der irreduziblen Darstellungen in dieser Zerlegung $= 1$ sind <u>und</u> daß das Zentrum Z_K von K auf dem Summanden $\mathcal{M}_K(a\cdot\tau_1 + b\cdot\tau_{n-1})$ gerade durch den Charakter $e^{i\theta}\cdot\mathbb{1}_n \mapsto e^{i\cdot(a-b)\cdot\theta}$ operiert!

–Zur Untersuchung der HARISH-CHANDRA- bzw. $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln der K-endlichen glatten Vektoren

$$\mathcal{J}_{\underline{\varphi}} := \Big(\big(\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}(\underline{\varphi})\big)^{(K)}\Big)\Big|_K$$

in der P-induzierten Darstellung zu einem Charakter $\underline{\varphi} \mathrel{\widehat{=}} (r'-s', r''-s'', 0, 0)$ (man erinnere sich, daß die Determinanten-Anteile „wegtensoriert“ wurden) betrachtet man diese K-Darstellung nun mittels

$$\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}\big|_K \cong \big(\mathrm{Ind}_{K^P(\mathbb{R})}^{K(\mathbb{R})}(\underline{\varphi}\big|_{K^P(\mathbb{R})})\big)^{(K)}$$

als einen Raum von Funktionen auf $\mathsf{S}^{2n-1} \cong K^P(\mathbb{R})\big\backslash K(\mathbb{R})$, also als eine direkte Summe von Darstellungen $\mathcal{M}_K(a\cdot\tau_1 + b\cdot\tau_{n-1})$ zu gewissen Parameter-Paaren (a, b), und zwar ist $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}\big|_K$ gerade der Teilraum von $\mathrm{Ind}_{\{1\}\times U(n-1)}^{K(\mathbb{R})}(\underline{\varphi})$, auf dem das Zentrum Z_K durch den Charakter zur ganzen Zahl $r-s=(r'-s')-(r''-s'')$ operiert, also die direkte Summe aller Unterdarstellungen in $L^2(\mathsf{S}^{2n-1},\mathbb{C})^{(K)}$, für welche die Parameter-Differenz $a-b$ gleich dem geforderten $r-s$ ist,

$$\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}\big|_K \cong \bigoplus_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0:\\ a-b=r-s}} \mathcal{M}_K\big(a\cdot\tau_1+b\cdot(\tau_{n-1}-\tau_n)\big).$$

Tensoriert man nun den vorher ggf. beseitigten Determinanten-Anteil wieder an die Darstellungen heran, so hat man schließlich:

Lemma 8 *Ist $\underline{\varphi}=r'\cdot\omega_1+s'\cdot(\omega_n-\omega_1)+r''\cdot\overline{\omega}_1+s''\cdot(\overline{\omega}_n-\overline{\omega}_1)$ ein algebraischer Charakter auf $P(\mathbb{R})$ und ist $r-s=(r'-r'')-(s'-s'')\geq 0$, so hat der* Harish-Chandra*–Modul $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$ zur von $P(\mathbb{R})$ nach $G(\mathbb{R})$ aus $\underline{\varphi}$ induzierten Darstellung die folgende Zerlegung in K-Typen (jeweils mit Vielfachheit 1):*

$$\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}\big|_K \;\cong\; \bigoplus_{b\in\mathbb{N}_0} \mathcal{M}_K\big((b+r-s)\cdot\tau_1+b\cdot\tau_{n-1}+(s-b)\cdot\tau_n\big).$$

4.2 $(\mathfrak{g},K)$-Kohomologie P-induzierter Darstellungen mit Koeffizienten

4.2.1 Lie-Algebren-Kohomologie und das Theorem von Kostant: algebraischer Kontext

Kurzfristiger Wechsel der Notation zu den Bezeichnungen (und Ergebnissen) der Abschnitte 2.1, 2.2 und 2.3:
Es sei F ein Körper der Charakteristik 0 und $G_0/F := GL_n/F$ für ein $n\geq 2$. Sei $R_0\subset G_0$ eine Standardparabolische mit Standard-Levi-Zerlegung $M_{R_0}\ltimes U_{R_0}$. Die Lie-Algebren-Kohomologie der nilpotenten Lie-Algebra $\mathfrak{u}_{R_0}$ mit Koeffizienten in einer Höchstgewichtsdarstellung $\mathcal{M}_{G_0}(\lambda)$ (für λ ganz und dominant) ist in natürlicher Weise eine algebraische Darstellung der reduktiven Gruppe M_{R_0}. Ihre Struktur wurde von Kostant bestimmt:

Wegen $\mathrm{char}(F)=0$ ist ja $H^*\big(\mathfrak{u}_{R_0},\mathcal{M}_{G_0}(\lambda)\big)$ gleich der Kohomologie des Chevalley–Eilenberg-Komplexes $\mathrm{Hom}_F\left(\bigwedge^*\mathfrak{u}_{R_0},\mathcal{M}_{G_0}(\lambda)\right)$, dessen Differential offensichtlich äquivariant für die Operation von M_{R_0} ist. Man verifiziert (mit dem Casselman–Osborne-Theorem, das den (!) Eigenwert des Casimir-Operators auf der Lie-Algebra-Kohomologie des unipotenten Radikals identifiziert) und dem Harish-Chandra-Isomorphismus für das Zentrum der Universellen Einhüllenden der Lie-Algebra $\mathfrak{g}_0$), daß in dieser Kohomologie nur solche Gewichte von M_{R_0} auftreten können, die für einen Kostant-Repräsentanten $w\in W^{R_0}$ von der Form $w*\lambda$ sind, und daß man zu einem solchen w genau folgendermaßen eine zu $\mathcal{M}_{M_{R_0}}(w*\lambda)$ isomorphe Unterdarstellung von $\mathrm{Hom}_F\left(\bigwedge^{\ell(w)}\mathfrak{u}_{R_0},\mathcal{M}_{G_0}(\lambda)\right)$ erhält, die in der Kohomologie „überlebt“ :

Wie üblich sei zu $w\in W$ gesetzt $\Phi^+(w):=\{\beta\in\Phi^+\mid w^{-1}\cdot\beta\notin\Phi^+\}$, eine Menge von positiven Wurzeln der Kardinalität $\ell(w)$, und zu jedem $\beta\in\Phi^+$ sei $u_\beta\in\mathfrak{u}_{B_0}(F)$ ein Erzeuger des eindimensionalen β-Eigenraums der Ad-Operation von T_0 auf $\mathfrak{u}_{B_0}$. Wenn nun

$w \in W^{R_0}$ ist, dann ist[15] $\hat{u}_w^{R_0} := \wedge_{\beta \in \Phi^+(w)} u_\beta \in \bigwedge^{\ell(w)} \mathfrak{u}_{R_0}$ ein M_{R_0}-Höchstgewichtsvektor zum Gewicht $\delta - w \cdot \delta$ einer irreduziblen M_{R_0}-Unterdarstellung von $\bigwedge^{\ell(w)} \mathfrak{u}_{R_0}$. –Weiter sei $m_w \in \mathcal{M}_{G_0}(\lambda)[w \cdot \lambda]$ ein Erzeuger des $(w \cdot \lambda)$-Gewichtsraumes (dieser ist eindimensional, da für $w \in W^{R_0}$ das Gewicht $w \cdot \lambda$ in dieser G_0-Darstellung *extremal* ist). Es legt dann

$$\Psi_{w,\lambda} : \hat{u}_w^{R_0} \mapsto m_w$$

eine M_{R_0}-Unterdarstellung des Raumes $\mathrm{Hom}_F\left(\bigwedge^{\ell(w)} \mathfrak{u}_{R_0}, \mathcal{M}_{G_0}(\lambda)\right)$ fest, die offenbar vom Höchstgewicht $w \cdot \lambda - (\delta - w \cdot \delta) = w * \lambda$ für M_{R_0} ist; nun muß man noch prüfen, daß diese in Grad j des Chevalley–Eilenberg-Komplexes mit der Multiplizität $\delta_{j,\ell(w)}$ auftritt, also sich tatsächlich genau einmal – und zwar im vorhergesagten Grad $\ell(w)$– in die Kohomologie „hinüberrettet" .

Es gilt also insgesamt

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 \ : H^i\big(\mathfrak{u}_{R_0}, \mathcal{M}_{G_0}(\lambda)\big) \cong \bigoplus_{w \in W^{R_0}, \ell(w)=i} \mathcal{M}_{M_{R_0}}(w \star \lambda); \tag{23}$$

die auftretenden $w \star \lambda$ sind paarweise verschieden und dominant für M_{R_0}, d.h. die Formel beschreibt eine multiplizitätenfreie Zerlegung in (irreduzible) Höchstgewichtsmoduln. (**Beweis**: siehe z.B. [KV95, Thm. 4.139], dort allerdings im Kontext kompakter halbeinfacher Lie-Gruppen.)

Im Spezialfall $R_0 = P_0 = \mathrm{Stab}_{G_0}(< e_1 >_F)$ interessiert nun die Frage, in welchen Fällen *eindimensionale* Darstellungen des (zu $\mathbb{G}_m \times GL_{n-1}$ isomorphen) Levi-Quotienten M_{P_0} (oder anders gesagt: Invarianten unter der derivierten Gruppe $M_{P_0}^{(1)}$) in der Kohomologie $H^*\big(\mathfrak{u}_{P_0}, \mathcal{M}_{G_0}(\omega)\big)$ des unipotenten Radikals (mit Koeffizienten in der Höchstgewichtsdarstellung $\mathcal{M}_{G_0}(\omega)\big)$ auftreten, d.h. (gemäß obigem Lemma): Wann tritt für ein $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ und ein dominantes ganzes Gewicht $\omega := \sum_{i=1}^n a_i \cdot \omega_i$ der Fall auf, daß

$$s^{\{j\}} * \omega \in \mathbb{Z} \cdot \omega_1 + \mathbb{Z} \cdot \omega_n \ ?$$

(Die Charaktergruppe der Standard-Levi-Untergruppe M_{P_0} ist ja von ω_1 und $(\omega_n - \omega_1)$ erzeugt.)

Für $1 \leq j \leq n-2$ ist –wie auf Seite 42 festgestellt– der Koeffizient $\hat{a}_{j+1}^{\{j\}} = 1 + a_j + a_{j+1}$ von ω_j in $s^{\{j\}} * \omega$ mindestens 1 (da die a_j für $j < n$ in $\mathbb{N}_0$ liegen), also sicher von 0 verschieden, so daß also höchstens für die „Extremlagen" $j = 0$ (mit $s^{\{0\}} = \mathrm{id}$) und $j = n-1$ solche eindimensionalen Darstellungen auftreten können. Betrachtung der weiteren Koeffizienten $\hat{a}_i^{\{j\}}$ gemäß Formel (15) liefert die folgenden Informationen:

- Für $j = 0$ tritt dieser gewünschte Fall genau für $a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$ auf, d.h. $\omega = a \cdot \omega_1 + b \cdot \omega_n$ oder anders gesagt $\mathcal{M}_{G_0}(\omega) \cong \mathrm{Sym}^a(V) \otimes \det^b$;
- für $j = n-1$ liegt Eindimensionalität vor genau für $a_1 = \ldots = a_{n-2} = 0$, also $\omega = a \cdot \omega_{n-1} + b \cdot \omega_n$ oder anders gesagt $\mathcal{M}_{G_0}(\omega) \cong \mathrm{Sym}^a(V^\vee) \otimes \det^{a+b}$.

[15] für eine beliebige Wahl der Produkt-Reihenfolge!

In diesen Fällen eindimensionaler Kohomologiedarstellungen von M_{P_0} soll nun noch jeweils ein Basisvektor mittels der Vorgehensweise von KOSTANT identifiziert werden. –Man prüft leicht

$$\Phi^+(s^{\{j\}}) = \{\frac{t_1}{t_i} \mid 2 \leq i \leq j+1\},$$

insbesondere ist $\Phi^+(s^{\{n-1\}})$ gleich der Menge *aller* Wurzeln von T_0, die im unipotenten Radikal von P_0 vorkommen. –Es können also $\mathbf{u}^{\uparrow} := \hat{u}^{P_0}_{s^{\{n-1\}}} := u_{1,2} \wedge \ldots \wedge u_{1,n} \in \bigwedge^{n-1} \mathfrak{u}_{P_0}$ (vom Gewicht $\delta - s^{\{n-1\}} \cdot \delta = n \cdot \omega_1 - 1 \cdot \omega_n (= 2 \cdot \delta_{P_0})$) und $\hat{u}^{P_0}_{s^{\mathrm{id}}} := 1 \in F = \bigwedge^0 \mathfrak{u}_{P_0}$ (vom Gewicht $0 = \delta - \delta$) gewählt werden.

Die einschlägigen Gewichtsvektoren sind ebenfalls rasch identifiziert: zu $j = 0$, $s^{\{0\}} = \mathrm{id}$ und $\omega = a \cdot \omega_1 + b \cdot \omega_n$ gehört der von $(e_1)^a \otimes 1_{\det^b}$ aufgespannte Höchstgewichtsraum in $\mathrm{Sym}^a(V) \otimes \det^b$, und zu $j = n-1$ und $\omega = a \cdot \omega_{n-1} + b \cdot \omega_n$ gehört z.B. der Erzeuger $(\xi_1)^a \otimes 1_{\det^{a+b}}$ des Gewichtsraumes zu $s^{\{n-1\}} \cdot \omega = (-a) \cdot \omega_1 + (a+b) \cdot \omega_n$ in der Darstellung $\mathrm{Sym}^a(V^\vee) \otimes \det^{a+b}$. –Zusammenfassend:

Lemma 9 *Sei $P_0 = \mathrm{Stab}_{G_0}(<e_1>_F) \subset G_0 = GL_n/F$ die Standardparabolische zu $(\mathcal{B}, \mathcal{F}_{st})$ vom Typ „Stabilisator einer Geraden“, mit der Standard-*LEVI*-Zerlegung $P_0 = M_{P_0} \ltimes U_{P_0}$, wobei ja $M_{P_0} \cong GL_1 \times GL_{n-1}$ und $U_{P_0} \cong \mathbb{G}_a^{n-1}$.* **Dann** *enthält die* LIE*-Algebren--Kohomologie $H^*(\mathfrak{u}_{P_0}, \mathcal{M}_{G_0}(\omega))$ des unipotenten Radikals von P_0 mit Koeffizienten in der Höchstgewichtsdarstellung $\mathcal{M}_{G_0}(\omega)$ von G_0* genau *in den im Folgenden beschriebenen Fällen irreduzible Darstellungen von M_{P_0},* die eindimensional *sind:*

(i) $\omega = a \cdot \omega_{n-1} + b \cdot \omega_n$, d.h. $\mathcal{M}_{G_0}(\omega) \cong \mathrm{Sym}^a(V^\vee) \otimes \det^{a+b} = \mathcal{M}_a[a+b]$; die einzige eindimensionale Unterdarstellung in diesem Falle ist

$$H^{n-1}(\mathfrak{u}_{P_0}, \mathcal{M}_{G_0}(\omega)) \cong \mathcal{M}_{M_{P_0}}(s^{\{n-1\}} * \omega)$$

mit dem M_{P_0}-Höchstgewicht

$$\begin{aligned} s^{\{n-1\}} * \omega &= -(n+a) \cdot \omega_1 + (a+b+1) \cdot \omega_n \\ &= (1+b-n) \cdot \omega_1 + (1+a+b) \cdot (\omega_n - \omega_1), \end{aligned}$$

und diese ist erzeugt von der linearen Abbildung

$$\big((u_{1,2} \wedge u_{1,3} \wedge \ldots \wedge u_{1,n}) \mapsto (\xi_1)^a \otimes 1_{\det^{a+b}}\big)$$

bzw. von

$$\mathbf{e}^{(n-1)}_{(a,b)} := \underbrace{{u_{1,2}}^\vee \wedge {u_{1,3}}^\vee \wedge \ldots \wedge {u_{1,n}}^\vee}_{=: \underline{\mathbf{u}}^{\uparrow,\vee}} \otimes (\xi_1^a \otimes 1_{\det^{a+b}}) \in (\bigwedge^{n-1} \mathfrak{u}_{P_0})^\vee \otimes \mathcal{M}_{G_0}(\omega)[s^{\{n-1\}}\omega];$$

(ii) $\omega = a \cdot \omega_1 + b \cdot \omega_n$, d.h. $\mathcal{M}_{G_0}(\omega) \cong \mathrm{Sym}^a(V) \otimes \det^b = \mathcal{M}_a^\vee[a+b]$; dann ist

$$H^0(\mathfrak{u}_{P_0}, \mathcal{M}_{G_0}(\omega)) \cong \mathcal{M}_{M_{P_0}}(s^{\{0\}} * \omega)$$

mit $s^{\{0\}} * \omega = (a+b) \cdot \omega_1 + b \cdot (\omega_n - \omega_1)$ die einzige eindimensionale Unterdarstellung, sie ist erzeugt von der linearen Abbildung $(1 \mapsto (e_1)^a \otimes 1_{\det^b})$ bzw. von dem Element

$$\mathbf{e}^{(1)}_{(a,b)} := 1^\vee \otimes (e_1^a \otimes 1_{\det^b}) \in (\bigwedge^0 \mathfrak{u}_{P_0})^\vee \otimes \mathcal{M}_{G_0}(\omega)[\omega];$$

hierbei sind jeweils $a \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{Z}$ beliebig. □

4.2.2 Der $\mathbb{C}/\mathbb{R}$-relative Kontext

Die Notation wechselt abrupt zurück zu derjenigen der vorvorigen Abschnitts: es sei $G_0 = GL_n/_{\mathbb{C}}$ und $G = \mathrm{Res}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}(G_0)$, $V = \mathcal{M}_G(\omega_1) = \mathbb{C}^n$ die Standarddarstellung. Zu Zahlen $d', d'' \in \mathbb{N}_0$ sei $\underline{\lambda} = d' \cdot (\omega_{n-1} - \omega_n) + d'' \cdot \overline{\omega}_1 \in X^*(T)$ das dominante Gewicht mit zugehöriger Darstellung $\mathcal{M}(\underline{\lambda}) = \mathrm{Sym}^{d'}(V^\vee) \otimes \mathrm{Sym}^{d''}(V) = \mathcal{M}_{d'} \otimes \overline{\mathcal{M}^\vee_{d''}} =: \underline{\mathcal{M}}_{(d',d'')}$ (Konventionen wie auf den Seiten 44, 84). Dann sei wieder $P := \mathrm{Stab}_G(< e_1 >_{\mathbb{C}})$ die einschlägige Standardparabolische von $G = G_{(n)}$ und $P = M_P \ltimes U_P$ ihre Standard-Levi-Zerlegung bzgl. $B \supset T$, also $M_P \cong \mathrm{Res}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}(GL_1 \times GL_{n-1}) \cong G_{(1)} \times G_{(n-1)}$ ihre auf Diagonal-Blöcke eigebettete Standard-Levi-Untergruppe bzgl. T und $U_P \cong (\mathrm{Res}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\, \mathbb{G}_{\mathrm{a}})^{n-1}$ ihr unipotentes Radikal, vgl. 2.1; es ist $\mathfrak{u}_P/_{\mathbb{R}}$ dessen reelle Lie-Algebra (abelsch von der Dimension $2(n-1)$, mit komplexer Struktur).

Die Lie-Algebren-Kohomologie einer Höchstgewichtsdarstellung von G zu einem Gewicht $\underbrace{\sum_{j=1}^n a_j \cdot \omega_j}_{=:\omega} + \underbrace{\sum_{j=1}^n b_j \cdot \overline{\omega}_j}_{=:\overline{\omega'}}$ ist –nach den üblichen Prinzipien und der Künneth-Formel– ein Produkt des „holomorphen" und des „antiholomorphen" Anteils:

$$H^*\big(\mathfrak{u}_P, \mathcal{M}_G(\omega + \overline{\omega'})\big) = H^*\big(\mathfrak{u}_{P_0}, \mathcal{M}_{GL_n(\mathbb{C})}(\omega)\big) \otimes H^*\big(\overline{\mathfrak{u}_{P_0}}, \overline{\mathcal{M}_{GL_n(\mathbb{C})}(\omega')}\big).$$

Die vorher besprochenen Spezialfälle der Kostant-Zerlegung liefern also gerade, daß die Gewicht der „Bauart" von $\underline{\lambda} = \underline{\lambda}(d', d'')$ neben deren contragredienten bzw. komplex-konjugierten $e' \cdot \omega_1 + e'' \cdot (\overline{\omega}_{n-1} - \overline{\omega}_n)$ die *einzigen* Gewichte sind, für die in ihrer $\mathfrak{u}_P$-Kohomologie *eindimensionale* Darstellungen von M_P *außerhalb* des Minimalgrades 0 und des Maximalgrades $2(n-1)$ auftritt (zu welchen genau die Höchstgewichte beitragen, die –bis auf Determinantentwists– aus $\{\omega_1, \overline{\omega}_1\}$ bzw. aus $\{\omega_{n-1}, \overline{\omega}_{n-1}\}$ linear kombiniert sind):

Für das Element (der Länge $n-1$) $\Theta := (s^{\{n-1\}}, \mathrm{id})$ der zu $S_n \times S_n$ isomorphen *absoluten* Weyl-Gruppe von G (wie in [Ha92]) hat man gemäß Lemma 9, daß der Summand

$$H^{n-1}(\mathfrak{u}_{P_0}, \mathcal{M}_{d'}) \otimes H^0(\overline{\mathfrak{u}_{P_0}}, \overline{\mathcal{M}^\vee_{d''}}) \cong \mathcal{M}_{M_P}(\Theta * \underline{\lambda}) = \mathcal{M}_{M_P}\big(-(n+d') \cdot \omega_1 + d'' \cdot \overline{\omega}_1 + \omega_n\big)$$

in $H^{n-1}\big(\mathfrak{u}_P, \mathcal{M}_G(\underline{\lambda})\big)$ die einzige eindimensionale Darstellung von M_P in $H^*\big(\mathfrak{u}_P, \mathcal{M}_G(\underline{\lambda})\big)$ ist!

Der erste Tensorfaktor entspricht dem im Lemma des vorigen Abschnitts behandelten Falle *i*) mit den Parameterwerten $a = -b = d'$, für den ein (natürlicher) Erzeuger $\mathbf{e}^{(n-1)}_{(d',-d')}$ des eindimensionalen Kohomologieraumes fixiert wurde; der zweite Tensorfaktor entspricht („bis auf komplexe Konjugation") dem dortigen Falle *ii*) mit Parameterwerten $a = d''$ und $b = 0$, der dort gewählte (sich aufdrängende) Erzeuger hieß $\mathbf{e}^{(1)}_{(d'',0)}$. Als naheliegender Erzeuger der hier studierten, als eindimensional erkannten Kohomologiedarstellung $H^{n-1}\big(\mathfrak{u}_P, \mathcal{M}_G(\underline{\lambda})\big)$ von M_P ergibt sich also deren Tensorprodukt

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{(d',d'')} &:= \mathbf{e}^{(n-1)}_{(d',-d')} \otimes \overline{\mathbf{e}}^{(1)}_{(d'',0)} \\
&= (\mathbf{u}^{\uparrow,\vee} \otimes \overline{1^\vee}) \otimes (\xi_1^{d'} \otimes \overline{e}_1^{d''}) \\
&\in \Big(\bigwedge^{n-1} V \otimes \bigwedge^0 \overline{V}\Big)^\vee \otimes \big(\mathcal{M}_{d'}[-d' \cdot \omega_1] \otimes \overline{\mathcal{M}''^\vee_d[d'' \cdot \omega_1]}\big) \\
&\cong \big(\bigwedge^{n-1} (V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})\big)^\vee \otimes \mathcal{M}_G(\underline{\lambda})[\Theta * \underline{\lambda}].
\end{aligned}$$

4.2.3 $(\mathfrak{g}, \mathsf{K})$-Kohomologie: Allgemeine Sätze

Für eine ZARISKI-zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe $G/_{\mathbb{R}}$ mit der LIE-Algebra $\mathfrak{g}$ und eine LIE-Untergruppe $\mathsf{K} \subset G(\mathbb{R})$, deren (topologische) Zusammenhangskomponente das Produkt einer maximalen zusammenhängend-kompakten Untergruppe $K^0 \subset G(\mathbb{R})$ und der Zusammenhangskomponente der reellen Punkte $Z_1(\mathbb{R})^\circ$ eines in G zentralen Torus $Z_1/_{\mathbb{R}} \subset Z(G)$ ist[16], untersucht man die Kategorie der $(\mathfrak{g}, \mathsf{K})$-Moduln[17]: dies sind (i.Allg. unendlichdimensionale) stetige/„lokal algebraische" Darstellungen von K auf $\mathbb{C}$-Vektorräumen, auf denen die komplexifizierte LIE-Algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ –oder ihre Universelle Einhüllende $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$– in verträglicher Weise operiert, bzw. die Unterkategorie der HARISH-CHANDRA–Moduln : dies sind hierunter die *zulässigen*, d.h. diejenigen, in denen die K-isotypischen Komponenten sämtlich von endlicher Dimension sind. –Solche HARISH-CHANDRA–Moduln entstehen u.a. aus algebraischen (endlichdimensionalen) Darstellungen von G, als die K-endlichen glatten Vektoren in unitären Darstellungen von $G(\mathbb{R})$, und als K-endliche glatte Vektoren in parabolisch induzierten Darstellungen aus zulässigen Darstellungen der LEVI-Quotienten der in Rede stehenden parabolischen Untergruppen von G.

Die höheren Ext-Gruppen $\mathrm{Ext}^q_{(\mathfrak{g},\mathsf{K})}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ zweier HARISH-CHANDRA–Moduln in dieser Kategorie können auch als die Kohomologiegruppen des $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}}$-Komplexes

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}}\left(\bigwedge^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}), \mathcal{U}^\vee \otimes \mathcal{V}\right)$$

erhalten werden ([BW00, §I.5]); für die $(\mathfrak{g}, \mathsf{K})$–Kohomologie eines HARISH-CHANDRA–Moduls $\mathcal{V}$,

$$H^*(\mathfrak{g}, \mathsf{K}; \mathcal{V}) := \mathrm{Ext}^*_{(\mathfrak{g},\mathsf{K})}(\mathbb{C}, \mathcal{V}),$$

hat man also den (beherrschbareren) Ausdruck $H^*\Big(\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}}\left(\bigwedge^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}), \mathcal{V}\right)\Big)$. (Dies gestattet oft auch eine Interpretation als Kohomologien gewisser flacher Bündel auf lokalsymmetrischen Räumen zu $G(\mathbb{R})$ und K.)

(Wenn $\mathcal{V}$ ein *unitarisierbarer* Modul ist, dann sind die Differentiale im genannten $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}}$-Komplex alle $= 0$ – aber da für nichtkompaktes $G(\mathbb{R})$ die einzigen unitarisierbaren *endlich*-dimensionalen irreduziblen Darstellungen von der Dimension 1 sind, ist das in den im Folgenden betrachteten Situationen in der Regel <u>nicht</u> der Fall.)

–Einige grundlegende Eigenschaften der $(\mathfrak{g}, \mathsf{K})$-Kohomologie:

Zum Einen gilt hier eine der zahllosen Versionen des <u>Lemmas von WIGNER</u>: Für HARISH-CHANDRA–Moduln $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ kann nur dann eine der Gruppen $\mathrm{Ext}^q_{(\mathfrak{g},\mathsf{K})}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ von $\{0\}$ verschieden sein, wenn die *infinitesimalen* (und die *zentralen*!) *Charaktere* der beiden Moduln übereinstimmen (vorausgesetzt, diese Charaktere existieren für die betrachteten Moduln). Ist nun $\mathcal{U}$ der HARISH-CHANDRA–Modul zu einer irreduziblen *endlichdimensionalen* Darstellung $\underline{\mathcal{M}}_G(\omega)$ einer reduktiven Gruppe $G/_{\mathbb{R}}$ (mit $\mathsf{K} \subset G(\mathbb{R})$ maximalkompakt o.ä.) und $\mathcal{V}$ beliebig, so ist $H^*(\mathfrak{g}, \mathsf{K}; \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = \mathrm{Ext}^*_{(\mathfrak{g},\mathsf{K})}(\mathcal{U}^\vee, \mathcal{V})$ höchstens dann nichttrivial, wenn der infinitesimale Charakter $\chi_{\mathcal{V}}$ von $\mathcal{V}$ dem von $\mathcal{U}^\vee$ gleich ist –aber letzterer ist (nach Übersetzung entlang dem HARISH-CHANDRA–Isomorphismus) gerade durch das dominante

[16] Die irreduziblen stetigen Darstellungen eines solchen K sind also endlichdimensional!

[17] Das geht natürlich in allgemeinerem Rahmen ....

ganze Gewicht $\omega^\vee$ von $\mathcal{U}^\vee$ gegeben. Setzt man nun $\mathcal{V} = \mathbb{C}$ (der triviale eindimensionale Harish-Chandra–Modul) ein, so folgt: die einzige endlichdimensionale (irreduzible) Darstellung von G, die nichttriviale $(\mathfrak{g}, \mathsf{K})$–Kohomologie hat, ist die triviale Darstellung $(\omega = 0)$!

Bemerkung: Die $(\mathfrak{g}, \mathsf{K})$–Kohomologie der trivialen Darstellung einer halbeinfachen bzw. reduktiven Gruppe hat eine (klassische) Beschreibung in Termen der invarianten Differentialformen auf dem kompakten Dual des symmetrischen Raumes; dazu hier nicht mehr.

Zum Anderen: wie jede ordentliche Kohomologietheorie für Gruppen (o.ä.) verfügt auch die $(\mathfrak{g}, \mathsf{K})$-Kohomologie über eine Version von Frobenius-Reziprozität bzw. Shapiro-Lemma über (gewisse) induzierte Darstellungen, die hier mitunter auch Delorme-Formel heißt: Es seien $\mathfrak{g}$ und K zu reduktivem $G/_{\mathbb{R}}$ gehörig, wie oben, und $P \subset G$ sei eine Parabolische mit Levi-Zerlegung $M_P \ltimes U_P$ (alles Standard bzgl. geeigneter Wahlen, falls das benötigt wird...). Es sei $\mathcal{M}$ eine irreduzible algebraische Darstellung von $G \times \mathbb{C}$, und es sei $\mathcal{W}$ ein Harish-Chandra–Modul für den Levi-Quotienten M_P (d.h. ein $(\mathfrak{m}_P, \mathsf{K}^{M_P})$-Modul, bzgl. einer zu K geeignet liegenden, „i.w. maximal kompakten“ Untergruppe $\mathsf{K}^P \subset M_P(\mathbb{R})$); läßt man das unipotente Radikal U_P (dessen $\mathbb{R}$-Punktegruppe keine kompakten Untergruppen hat!) hierauf trivial operieren, so ergibt sich ein Harish-Chandra–Modul „für P“, ebenfalls $\mathcal{W}$ genannt; hieraus kann dann ein Harish-Chandra–Modul $\mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{W})$ „für G“ konstruiert werden. –Dann gilt: die Spektralsequenz für die Kohomologie des einfachen Komplexes zum Doppelkomplex $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}^P}\big(\bigwedge^*(\mathfrak{m}_{P,\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^{M_P}), \mathcal{W} \otimes \mathrm{Hom}(\bigwedge^* \mathfrak{u}_P, \mathcal{M})\big)$ degeneriert auf den E_2-Termen, und die (mit etwas Routine) kanonische Abbildung von $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}}\big(\bigwedge^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}), \mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{W}) \otimes \mathcal{M}\big)$ in den einfachen Komplex zum o.g. Doppelkomplex ist ein Isomorphismus von Komplexen, folglich gilt:

$$H^*\big(\mathfrak{g}, \mathsf{K}; \mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{W}) \otimes \mathcal{M}\big) \cong \bigoplus_{p+q=*} H^p\big(\mathfrak{m}_P, \mathsf{K}^P; \mathcal{W} \otimes H^q(\mathfrak{u}_P, \mathcal{M})\big).$$

(Vgl. [BW00, III.3.3], [Ha88, 4.3.3].)

Nun ist ja die Struktur der Darstellung $H^*(\mathfrak{u}_P, \mathcal{M})$ von M_P durch die Kostant-Zerlegung geklärt worden: wenn $\mathcal{M}_G(\omega) = \mathcal{M}$, dann gilt

$$H^q(\mathfrak{u}_P, \mathcal{M}) \cong \bigoplus_{w \in W_G{}^P : \ell(w) = q} \mathcal{M}_{M_P}(w * \omega).$$

Ist nun auch das zu induzierende $\mathcal{W} \cong \mathcal{M}_{M_P}(\lambda)$ algebraisch/endlichdimensional (z.B. ein Charakter), so geschieht ein Nichtverschwinden der Kohomologie,

$$H^*\Big(\mathfrak{g}, \mathsf{K}; \mathrm{Ind}_P^G\left(\mathcal{M}_{M_P}(\lambda)\right) \otimes \mathcal{M}_G(\omega)\Big) \neq \{0\},$$

nach dem Wigner-Lemma (für die reduktive Gruppe M_P) *genau dann*, wenn für ein geeignetes $w_q \in W_G{}^P$ von Länge q die M_P-Gewichte λ und $(w_q * \omega)\big|_{M_P}$ contragredient zueinander sind (und wenn λ ein Charakter von M_P ist: genau dann, wenn $(w_q * \omega)\big|_{M_P}$ der zu λ inverse Charakter ist) –denn es trägt wenigstens das eindimensionale $H^0(\mathfrak{m}_P, \mathsf{K}^P; \mathbb{C})$ mittels der dann bestehenden Inklusion $\mathbb{C} \subset \mathcal{M}_{M_P}(\lambda) \otimes H^q(\mathfrak{u}_P, \mathcal{M})$ zum Gesamt-H^q bei.

4.2.4 Eindimensionalität der „lokalen“ Kohomologiebeiträge

Zu $n \geq 2$ und natürlichen Zahlen d', d'' sei wieder $\underline{\lambda} = d' \cdot (\omega_{n-1} - \omega_n) + d'' \cdot \overline{\omega}_1 \in X^*(T)$ das bereits vorn betrachtete dominante ganze Gewicht der $\mathbb{R}$-algebraischen Gruppe $G =$

$\mathrm{Res}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}(GL_n/\mathbb{C})$ und $\mathcal{M}_G(\underline{\lambda}) = \underline{\mathcal{M}}_{(d',d'')}$ die zugehörige irreduzible Höchstgewichtsdarstellung; es sei auch wieder $\mathfrak{g}$ die LIE-Algebra von G, P die Standard-maximalparabolische vom Typ „Stabilisator einer Geraden" und $\mathsf{K} = K(\mathbb{R}) \cong U(n)$ die bereits betrachtete maximalkompakte Untergruppe in $G(\mathbb{R})$. Nach dem vorvorigen Abschnitt ist dann $H^{n-1}(\mathfrak{u}_P, \underline{\mathcal{M}}_{(d',d'')})$ die einzige eindimensionale Darstellung von M_P in der LIE-Algebren-Kohomologie des unipotenten Radikals von P mit $\underline{\mathcal{M}}_{(d',d'')}$-Koeffizienten; es handelt sich um den Charakter $\Theta{*}\underline{\lambda} = -(n{+}d')\cdot\omega_1{+}\omega_n{+}d''\cdot\overline{\omega}_1$. Es sei dann $\underline{\varphi} := -(\Theta{*}\underline{\lambda})$ derjenige (auf Grund von Erwägungen mit WIGNER und DELORME im vorigen Abschnitt gefundene)[18] Charakter auf P, so daß der aus $\underline{\varphi}$ „von P nach G" induzierte HARISH-CHANDRA–Modul $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$ die Eigenschaft hat, daß $H^*\big(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathsf{K}; \mathcal{J}_{\underline{\varphi}} \otimes \underline{\mathcal{M}}_{(d',d'')}\big)$ (insbesondere $H^{n-1}(\ldots)$!) nichttrivial ist; dieses $\underline{\varphi}$ gehört damit zu den Parametern $r' = n-1+d', r'' = -d'', s' = -1, s'' = 0$, also $r = r' - r'' = (n-1) - (d' + d'')$, $s = s' - s'' = -1$, $r - s = n + d' + d''$. Die Zerlegung von $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$ in K-Typen ist also nach dem Lemma 8 die folgende:

$$\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}\big|_K \;\cong\; \bigoplus_{b\geq 0} \mathcal{M}_K\big((n + d' + d'' + b)\cdot\tau_1 + b\cdot\tau_{n-1} - (s+b)\cdot\tau_n\big),$$

wobei alle Vielfachheiten $= 1$ sind.

Zieht man nun die Bestimmung der K-Typen in $\bigwedge^j(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$ für $0 \leq j \leq n-1$ (auf Seite 84; mit Hilfe von Lemma 1) und die auf derselben Seite etablierte Isomorphie $\underline{\mathcal{M}}_{(d',d'')}\big|_K \cong \mathcal{M}_K\big(d'\cdot(\tau_{n-1}-\tau_n)\big) \otimes \mathcal{M}_K\big(d''\cdot(\tau_{n-1}-\tau_n)\big)$ heran, so folgt aus dem Lemma 2 über kleine Koeffizienten in Tensorprodukten (mit $a := n,\ b := d',\ c := d'',\ d := b, t := -(s+d)$, wobei der Autor zugibt, daß dies nicht die höchste Kunst der Bezeichnungswahl offenbart):

Der Raum $\mathrm{Hom}_K(\bigwedge^j(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}), \mathcal{J}_{\underline{\varphi}} \otimes \underline{\mathcal{M}}_{(d',d'')}\big|_K)$ ist $= \{0\}$ für $j \leq n-2$; für $j = n-1$ ist er eindimensional, erzeugt vom K-Typ $\tau^{\uparrow} = n\cdot\tau_1 - \tau_n$ (extremal in der linken, minimal in der rechten Seite und jeweils einmal auftretend).

Aus der Interpretation von $H^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathsf{K}; \ldots)$ als Kohomologie des K-Homomorphismen-Komplexes $\mathrm{Hom}_K(\bigwedge^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}), \ldots)$ folgt somit zum Einen, daß für $j \leq n{-}2$ gilt $H^j\big(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathsf{K}; \mathcal{J}_{\underline{\varphi}} \otimes \underline{\mathcal{M}}_{(d',d'')}\big) = \{0\}$ (wie auch schon aus der DELORME-Analyse bekannt), und zum Anderen (da die Nichttrivialität der $(n-1)$-ten Kohomologie schon bekannt ist):

$$\dim H^{n-1}\big(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathsf{K}; \mathcal{J}_{\underline{\varphi}} \otimes \underline{\mathcal{M}}_{(d',d'')}\big) = 1;$$

„kohomologietragend" ist hierbei die K-äquivariante Abbildung

$$\iota_{\tau^{\uparrow}} : \bigwedge^{n-1}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}) \twoheadrightarrow \underbrace{\mathcal{M}_K(\tau^{\uparrow})}_{\cong \mathrm{Sym}^n(V)\otimes\det^{-1}|_K} \hookrightarrow (d=0)\text{-Summand } \otimes \underline{\mathcal{M}}_{(d',d'')}\big|_K \hookrightarrow \ldots$$

$$\ldots \hookrightarrow \underbrace{\Big(\bigoplus\nolimits_{d\geq 0} \mathcal{M}_K\big((n{+}d'{+}d''{+}d)\cdot\tau_1{+}d\cdot\tau_{n-1}{-}(1{+}d)\cdot\tau_n\big)\Big) \otimes \Big(\mathcal{M}_K\big(d'\cdot(\tau_{n-1}{-}\tau_n)\big) \otimes \mathcal{M}_K\big(d''\cdot(\tau_{n-1}{-}\tau_n)\big)\Big)}_{\cong \mathcal{J}_{\underline{\varphi}} \otimes \underline{\mathcal{M}}_{(d',d'')}|_K}.$$

(Der mühsam errungene gemeinsame K-Typ $\tau^{\uparrow}$ wird also entgegen allen Befürchtungen nicht noch vom herzlosen Differential nach $\mathrm{Hom}_K(\bigwedge^n\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, \ldots)$ annulliert!)

[18] Die *sämtlichen* Charaktere $\underline{\varphi}$, so daß $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$ Kohomologie mit $\underline{\mathcal{M}}_{(d',d'']}$-Koeffizienten hat, sind wohl genau die Negativen aller extremalen Gewichte dieser endlichdimensionalen Darstellung – anders gesagt: alle Negativen des WEYL-Gruppen-Orbits des dominanten Gewichts; die meisten hiervon werden nicht (anti?)dominant sein/bzw. die Eisensteinreihe wird nicht „ohne weiteres" konvergieren.

4.2.5 Eindimensionalität der Kohomologie im globalen Kontext

Es sei F ein totalimaginärer Zahlkörper, $f_0 := \#\mathbb{V}_{F,\infty}$ die Anzahl seiner komplexen (n.Vor. sämtlichen archimedischen) Stellen, dies ist auch der halbe Grad von F über $\mathbb{Q}$. Es sei $n \geq 2$ gegeben und V ein F-Vektorraum der Dimension n, hiermit sei $G/_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\big(\underbrace{GL_F(V)}_{\cong GL_{n/F}}\big)$, und seien $T, B, P, \ldots$ die $\mathbb{Q}$-Untergruppen in G, die als Skalarrestriktionen der „üblichen" Untergruppen T_0 = Diagonaltorus, B_0 = obere-Dreiecks-Borel-Untergruppe, P_0 maximal-parabolisch etc. in $GL(V)$ entstehen, vgl. 2.5. Einen Kollektion von Zahlen $\underline{d} = (d_\sigma)_{\sigma:F\hookrightarrow\mathbb{C}} \in \mathbb{N}_0^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F,\mathbb{C})}$ sei gegeben, die so beschaffen ist, daß für einen CM-Typ $\mathcal{T}$ von F gilt: $\forall\sigma \in \mathcal{T}:\ d_\sigma - d_{\mathsf{c}\sigma} \geq 0$.

(Später wird gefordert, daß $(\ldots, (-d_\sigma, +d_{\mathsf{c}\sigma}), \ldots)_{\sigma\in\mathcal{T}}$ der ∞-Typ eines algebraischen Hecke-Charakters ist, für den die Stelle 0 *rechtskritisch* ist; dann muß sogar gelten: $d_\sigma - d_{\mathsf{c}\sigma} = d > 0$ unabhängig von σ.)

Hiermit wird ein dominantes ganzes Gewicht

$$\underline{\lambda} \in X^*(T) \cong \prod_{\sigma:F\hookrightarrow\mathbb{C}} X^*(T_\sigma) \cong \prod_{\sigma\in\mathcal{T}} \Big(\bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{Z}\cdot\omega_{j,\sigma} \oplus \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{Z}\cdot\omega_{j,\mathsf{c}\sigma}\Big)$$

durch

$$\underline{\lambda} = \big(\ldots, d_\sigma\cdot(\omega_{n-1,\sigma} - \omega_{n,\sigma}) + d_{\mathsf{c}\sigma}\cdot\omega_{1,\mathsf{c}\sigma}, \ldots\big)_{\sigma\in\mathcal{T}}$$

definiert; die zugehörige irreduzible Höchstgewichtsdarstellung ist also

$$\underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}} := \mathcal{M}_G(\underline{\lambda}) = \bigotimes_{\sigma\in\mathcal{T}} \mathrm{Sym}^{d_\sigma}(V_\sigma^\vee) \otimes \mathrm{Sym}^{d_{\mathsf{c}\sigma}}(V_{\mathsf{c}\sigma}).$$

An jeder komplexen Stelle $|\,\sigma\,|$ (für $\sigma \in \mathcal{T}$) von F liegt also (mit den Parameterwerten $d'_{|\sigma|} := d_\sigma, d''_{|\sigma|} := d_{\mathsf{c}\sigma}$) die in den vorigen Abschnitten studierte Situation vor:

$$G \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \prod_{\sigma\in\mathbb{V}_{F,\infty}\,\widehat{=}\,\mathcal{T}} \underbrace{\mathrm{Res}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\big(GL_{\mathbb{C}}(V\otimes_\sigma\mathbb{C})\big)}_{=:G_{|\sigma|}/\mathbb{R}}, \quad \underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}} \cong \bigotimes_{\sigma\in\mathcal{T}} \underline{\mathcal{M}}_{(d'_{|\sigma|},d''_{|\sigma|})}.$$

Es interessieren jetzt wieder eindimensionale Darstellungen von M_P in der Kohomologie $H^*(\mathfrak{u}_P, \underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}})$; da $\underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}$ eine Darstellung in einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, zerfällt dies –der direkten Summenzerlegung von $\mathfrak{u}_P$ (vgl.2.5) und der Tensorproduktzerlegung von $\underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}$ (s.o.) entsprechend– wieder in ein Tensorprodukt über *alle* Einbettungen $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ oder umgruppiert über alle komplexen Stellen $|\,\sigma\,| = \{\sigma, \mathsf{c}\sigma\}$:

$$H^*(\mathfrak{u}_P, \underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}) = \bigotimes_{|\sigma|} H^*(\mathfrak{u}_{P_{|\sigma|}}, \underline{\mathcal{M}}_{(d'_{|\sigma|},d''_{|\sigma|})})$$

(mit hoffentlich evidenten Bezeichnungen). –Bei fixiertem CM-Typ $\mathcal{T}$ wird für $\sigma \in \mathcal{T}$ nun die Notation $\omega_{j,|\sigma|} := \omega_{j,\sigma},\ \overline{\omega}_{j,|\sigma|} := \omega_{j,\mathsf{c}\sigma}$ benutzt.

Nach Abschnitt 4.2.4 enthält jeder der Tensor-Faktoren genau eine eindimensionale Darstellung von $M_{P,|\sigma|}$, und zwar im Grade $n-1$ den Charakter

$$\Theta_{|\sigma|} * \lambda_{|\sigma|} = (s^{\{n-1\}}, \mathrm{id}) * (d'_{|\sigma|}\cdot(\omega_{n-1,|\sigma|} - \omega_{n,|\sigma|}), d''_{|\sigma|}\cdot\overline{\omega}_{1,|\sigma|}) = -(n + d'_{|\sigma|})\cdot\omega_{1,|\sigma|} + \omega_{n,|\sigma|} + d''_{|\sigma|}\cdot\overline{\omega}_{1,|\sigma|}$$

mit dem KOSTANT-Vertreter $\Theta_{|\sigma|}$ der Länge $n-1$ in $\overline{W}_{|\sigma|}{}^{P_{|\sigma|}} \subset \overline{W}_{|\sigma|} \cong S_n \times S_n$; als Basiselemente dieser „lokalen“ LIE-Algebra-Kohomologieräume wurden im Abschnitt 4.2.2 gewisse $\mathbf{e}^{(\sigma)}_{(d'_{|\sigma|}, d''_{|\sigma|})}$ gewählt.

Das Element $\Theta_{\mathcal{T}} = \big(, \ldots, ((s_\sigma^{\{n-1\}}, \mathrm{id}_{\mathsf{c}\sigma}), \ldots\big)_{\sigma\in\mathcal{T}}$ der Länge $(n-1)\cdot f_0$ der zu $(S_n)^{2f_0}$ isomorphen absoluten WEYL-Gruppe $\overline{W}$ von G (das natürlich ein KOSTANT-Vertreter bzgl. P ist) „verursacht“ also eine eindimensionale Darstellung zum Charakter $\Theta_{\mathcal{T}} * \underline{\lambda}$ in der LIE-Algebren-Kohomologie im „halben Grad“ , $H^{(n-1)\cdot f_0}(\mathfrak{u}_P, \underline{\mathcal{M}_d})$; das Tensorprodukt

$$\underline{\mathbf{e}_d} := \bigotimes_{\sigma\in\mathcal{T}} \mathbf{e}^{(\sigma)}_{(d'_{|\sigma|}, d''_{|\sigma|})}$$

der ausgewählten „lokalen“ Basiselemente ist dann ein naheliegender Vektor, der als Basis dieses eindimensionalen „globalen“ LIE-Algebra-Kohomologieraumes dienen kann!

Wird $\underline{\mathbf{e}_d}$ noch durch einen von F, $\mathcal{T}$ und einer Anordnung $\prec$ auf $\mathcal{T}$ abhängenden algebraischen Vorfaktor vom Typ „signierte Wurzel aus Diskriminante“ zu $\underline{\mathbf{e}'_{d,\prec}} := \delta(\mathcal{T},\prec)\cdot \underline{\mathbf{e}_d}$ modifiziert, so bildet das System dieser $\underline{\mathbf{e}'_{d,\prec}}$ zu *allen* Gewichten im $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}} : F)$-Orbit von $\underline{\lambda}$ ein „rationales System von Erzeugenden“ im Sinne von [Ha87, 1.3]; cf. a.a.O.,2.5. .

Es sei $\mathfrak{g}/_{\mathbb{Q}}$ die LIE-Algebra von G und $\mathsf{K} \subset G(\mathbb{R}) \cong GL_n(\mathbb{C})^{\mathcal{T}}$ eine maximalkompakte Untergruppe; sie erfüllt $\mathsf{K} \cong U(n)^{\mathcal{T}}$.

Weiter sei $\underline{\varphi}$ das Inverse des in $H^{(n-1)\cdot f_0}(\mathfrak{u}_P, \mathcal{M}_{\underline{d}})$ realisierten Charakters $\Theta_{\mathcal{T}} * \underline{\lambda}$ von M_P bzw. P und $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$ der hieraus „von P nach G“ induzierte HARISH-CHANDRA–Modul.

Nun liefert Benutzung des Ergebnisses von Abschnitt 4.2.4 bei wiederum stellenweiser Betrachtung das erwartete Eindimensionalitätsresultat:

Proposition 2 *Es sei F ein totalimaginärer Zahlkörper, $f_0 := \#\mathbb{V}_{F,\infty} = \frac{[F:\mathbb{Q}]}{2}$ sein halber Grad über $\mathbb{Q}$, und sei $\mathcal{T}$ ein CM-Typ von F. Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Eine Kollektion $\underline{d} = (d_\sigma)_{\sigma:F\hookrightarrow\mathbb{C}} \in \mathbb{N}_0^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F,\mathbb{C})}$ sei gegeben, die die Bedingung*

$$\forall\sigma\in\mathcal{T}:\ d'_{|\sigma|} := d_\sigma \overset{!}{\geq} d_{\mathsf{c}\sigma} =: d''_{|\sigma|}$$

erfüllt; hiermit werde das dominante ganze Gewicht

$$\underline{\lambda} := (\ldots, d'_{|\sigma|}\cdot(\omega_{n-1,|\sigma|} - \omega_{n,|\sigma|}), d''_{|\sigma|}\cdot\overline{\omega}_{1,|\sigma|}, \ldots)_{\sigma\in\mathcal{T}}$$

der Gruppe $G/_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}(GL_n/_F)$ gebildet, und $\underline{\mathcal{M}_d} := \mathcal{M}_G(\underline{\lambda})$ sei die hierzu gebildete irreduzible Höchstgewichtsdarstellung von G.

Das Element der Länge $(n-1)\cdot f_0$, $\Theta_{\mathcal{T}} := \big(\ldots, (s_\sigma^{\{n-1\}}, \mathrm{id}_{\mathsf{c}\sigma}), \ldots\big)_{\sigma\in\mathcal{T}}$, der absoluten WEYL-*Gruppe $\overline{W} \cong (S_n)^{\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C})}$ von G ist dann ein* KOSTANT-*Repräsentant bzgl. derjenigen Standard-maximalparabolischen Untergruppe $P \subset G$, die der Stabilisator der F-Geraden durch den Vektor e_1 in der Standarddarstellung $V = F^n$ von G ist. –Es sei*

$$\begin{aligned}\underline{\varphi} &:= -(\Theta_{\mathcal{T}} * \underline{\lambda})\\ &= (\ldots, (n+d'_{|\sigma|})\cdot\omega_{1,|\sigma|} - \omega_{n,|\sigma|}, -d''_{|\sigma|}\cdot\overline{\omega}_{1,|\sigma|}, \ldots)_{\sigma\in\mathcal{T}}\end{aligned}$$

der Charakter von $P(\mathbb{R})$, *der invers ist zum Charakter von* M_P *auf der eindimensionalen Darstellung* $H^{(n-1)\cdot f_0}(\mathfrak{u}_P, \underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}) \cong \mathcal{M}_{M_P}(\Theta_{\mathcal{T}} * \underline{\lambda})$, *und* $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$ *sei der aus* $\underline{\varphi}$ *„von* P *nach* G*“ induzierte* Harish-Chandra*–Modul.*

Für eine maximalkompakte Untergruppe $\mathsf{K} \subset G(\mathbb{R}) \cong GL_n(\mathbb{C})^{\mathcal{T}}$ *(die dann zu* $U(n)^{f_0}$ *isomorph ist) gilt dann:*

- $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}} \otimes \underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}\big|_{\mathsf{K}}$ *hat* keine $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathsf{K})$*-Kohomologie in Graden* $0 \leq j \leq (n-1)\cdot f_0 - 1$*;*
- *der Raum* $H^{(n-1)\cdot f_0}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathsf{K}; \mathcal{J}_{\underline{\varphi}} \otimes \underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}\big|_{\mathsf{K}})$ *ist eindimensional; in der Interpretation dieser Kohomologie als Kohomologie des* $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}}$*-Komplexes ist er erzeugt von der Abbildung* $\iota_{\underline{\tau}^\uparrow} := \bigotimes_{\sigma\in\mathcal{T}} \iota_{\tau^\uparrow_{|\sigma|}}$ *(cf. Seite 93), die auf dem einzigen gemeinsamen* K*-Typ* $\underline{\tau}^\uparrow = (\ldots, \tau^\uparrow_{|\sigma|}, \ldots)_{\sigma\in\mathcal{T}} = (\ldots, n\cdot\tau_{1,|\sigma|} - \tau_{n,|\sigma|}, \ldots)_\sigma$ *von* $\bigwedge^{(n-1)\cdot f_0}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$ *und* $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}} \otimes \underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}\big|_{\mathsf{K}}$ *beruht.*

5 Einige Iwasawa-Zerlegungen

5.1 Iwasawa-Zerlegung unterer Streifenmatrizen

In diesem Abschnitt werden Informationen bereitgestellt über die Iwasawa-Zerlegung der Matrizen $m_k^{(n)}(\mathbf{x})$, durch welche hier Punkte des $\mathbb{P}^{n-1}$ über Körpern repräsentiert werden, vgl. Gleichung (13).

Es sei F ein lokaler Körper. Die Gruppe $G := GL_n(F)$ trägt die Struktur einer reduktiven F-Liegruppe. Ist F archimedisch, d.h. zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ isomorph, dann ist die meist mit $O(n) = O(\mathbb{1}_n; \mathbb{R})$ bzw. $U(n) = U(\mathbb{1}_n; \mathbb{C} : \mathbb{R})$ bezeichnete Isometriegruppe der quadratischen bzw. hermiteschen Form mit Strukturmatrix $\mathbb{1}_n$ eine maximalkompakte Untergruppe K von G; maximale *zusammenhängende* kompakte Untergruppen sind $SO(n)$ bzw. $U(n)$ selbst. Ist F dagegen nichtarchimedisch mit Bewertungsring $\mathcal{O}$, dann ist $K := GL_n(\mathcal{O})$ eine beliebte maximalkompakte Untergruppe in G. (Bekanntermaßen gibt es in den hier betrachteten Fällen jeweils genau eine Konjugationsklasse maximalkompakter Untergruppen in G, so daß alles im folgenden Gesagte *mutatis mutandis* für beliebiges maximalkompaktes $K \subset G$ gilt.)

Ist $R/_F \subset GL_n/_F$ eine F-parabolische Untergruppe, so gilt $G = R(F) \cdot K$; diese Tatsache bzw. das Bestehen einer (evtl. nicht sehr eindeutigen) Zerlegung $g = r \cdot k$ mit $r \in R(F)$, $k \in K$ für beliebiges $g \in G$ nennt man die Iwasawa-*Zerlegung in* GL_n. [Man kann natürlich noch weiter zerlegen: „$r = m \cdot n$ mit m in einer Leviuntergruppe von $R(F)$ und n im unipotenten Radikal von $R(F)$“ .] Insbesondere für $R = B$, die Borel-Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen, kann also zerlegt werden: $g = a \cdot u \cdot k$ mit $k \in K$, $a = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ im Diagonaltorus und u unipotente obere Dreiecksmatrix; hier ist Eindeutigkeit erreichbar, indem man als Einträge a_j von a nur positive reelle Zahlen (im archimedischen Fall) bzw. Potenzen eines fest gewählten Uniformisierenden $\pi = \pi_F$ (im nichtarchimedischen Fall) zuläßt. (Anders gesagt: bei Iwasawa-Zerlegung bzgl. der „Standard“ -Borel sind die *Absolutbeträge* der Diagonaleinträge eindeutig aus der zu zerlegenden Matrix bestimmt.) -Diese „eindeutig gemachte“ Zerlegung bzgl. der Standard-Borel-Untergruppe und der „Standard“ -maximal kompakten Untergruppe soll im folgenden Abschnitt kurz *die* Iwasawa-Zerlegung heißen.

Die beiden folgenden Bemerkungen verifiziert man durch genaues Hinsehen:

- Ist $g \in SL_n(F)$ und $g = a \cdot u \cdot k$ wie eben, dann haben a und k beide ebenfalls die Determinante 1 (für u gilt das sowieso immer).
- Ist m_σ Permutationsmatrix zu $\sigma \in S_n$, d.h. $(m_\sigma)_{i,j} = \pm\delta_{\sigma(i),j}$, so gilt $m_\sigma \in K$, wie auch immer F beschaffen ist. Somit haben die Iwasawazerlegungen von g und $g \cdot m_\sigma$ „dasselbe a und u“.

Nach der letzten Bemerkung „genügt“ es hier also, die Iwasawazerlegung der Matrizen

$$m^-(\mathbf{x}) := m_{n-1}^{(n)}(-\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & 0 \\ x_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{n-1} & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

für beliebiges $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in F^{n-1}$ zu bestimmen; vgl. Gleichung 13 und die dort folgende Bemerkung.

5.1.1 Der archimedische Fall

Es sei F ein archimedischer lokaler Körper, d.h. $F \cong \mathbb{R}$ oder $F \cong \mathbb{C}$; die Gruppe $GL_n(F)$ wird nun als reelle reduktive LIE-Gruppe betrachtet. –Theoretisch bestimmt man die IWASAWA-Zerlegung einer invertierbaren Matrix $g \in GL_n(F)$ folgendermaßen: das Orthonormalisierungsverfahren von GRAM–SCHMIDT stellt aus den Spalten der Matrix g^{-1} eine Orthonormalbasis, d.h. ein Element $\tilde{k}$ von K her, so daß gilt $g^{-1} = \tilde{k} \cdot \tilde{b}$ mit $\tilde{b} \in B(F)$, man hat also wie gewünscht $g = b \cdot k$ mit $b := \tilde{b}^{-1}$ und $k := \tilde{k}^{-1}$; dann zerlegt man weiter $b = a \cdot u$, wie üblich. Zwei Einträge von a sind nun leicht aus dieser Prozedur bestimmbar, nämlich:

- der oberste Eintrag a_1 wird im Algorithmus als das Inverse der euklidischen Norm der ersten *Spalte* von g^{-1} bestimmt, und
- da k^{-1} orthogonal bzw. unitär ist, stimmen die euklidischen Normen der untersten *Zeilen* von g und b überein, aber: der einzige (nichtverschwindende) Eintrag in der letzten Zeile von b ist a_n!

Im Falle $n = 2$ kann die Iwasawazerlegung einer beliebigen Matrix

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(F)$$

leicht ganz explizit angegeben werden: es sei $\ell := \sqrt{|c|^2 + |d|^2} = \|(c,d)\|$ die euklidische Länge der unteren Zeile von G. Aus dieser gewinnt man die „Drehmatrix“

$$\frac{1}{\ell} \cdot \begin{pmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)\big(\text{ bzw. } SO(2)\big)$$

als den „kompakten Anteil“ der IWASAWA-Zerlegung, d.h.: Rechtsmultiplikation mit ihrer Inversen bringt g auf obere Dreiecksgestalt, wobei der untere Diagonaleintrag schon „richtig“ im Sinne von obiger Bemerkung ist. Man findet dann schnell die vollständige Zerlegung

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|\det g|}{\ell} & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{a\overline{c}+b\overline{d}}{|\det g|} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\det g}{|\det g|} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\overline{d}}{\ell} & -\frac{\overline{c}}{\ell} \\ \frac{c}{\ell} & \frac{d}{\ell} \end{pmatrix},$$

die sich im Falle einer *unteren* Dreiecksmatrix (d.h. $b = 0$) zu

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|ad|}{\ell} & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{a\overline{c}}{|ad|} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{ad}{|ad|} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\overline{d}}{\ell} & -\frac{\overline{c}}{\ell} \\ \frac{c}{\ell} & \frac{d}{\ell} \end{pmatrix} \tag{24}$$

vereinfacht; insbesondere für unipotente untere Dreiecksmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{1+|x|^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \overline{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} & \frac{-\overline{x}}{\sqrt{1+|x|^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{1+|x|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} \end{pmatrix}.$$

Diese „Bestimmung geeigneter Drehmatrizen“ läßt sich nun für „Streifenmatrizen“ $m^-(\mathbf{x})$ (wobei $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in F^{n-1}$) rekursiv explizit hinschreiben:

Zu $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ definiere für $j = 0, \ldots, n-1$:

$$\mathbf{x}^{[j]} := (x_{j+1}, \ldots, x_{n-1}) \in F^{n-1-j}$$

(also $\mathbf{x}^{[0]} = \mathbf{x},\ \mathbf{x}^{[n-1]} = \mathbf{0} \in F^0$), und für $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k) \in F^k$ setze

$$\ell(\mathbf{y}) := \sqrt{1 + |y_1|^2 + \ldots + |y_k|^2} \in \mathbb{R}^{>0}.$$

Zum Herstellen der IWASAWA-Zerlegung von

$$m^-(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ x_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{n-1} & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bildet man die „verallgemeinerten Drehmatrizen“

$$\tilde{k}^{(j)}(\mathbf{x}) := \frac{1}{\ell(\mathbf{x}^{[j-1]})} \cdot \begin{pmatrix} \ell(\mathbf{x}^{[j]}) & -\overline{x_j} \\ x_j & \ell(\mathbf{x}^{[j]}) \end{pmatrix} \ (j = 1, \ldots, n-1),$$

die wegen der offensichtlichen Identität

$$\ell(\mathbf{x}^{[j-1]})^2 = \ell(\mathbf{x}^{[j]})^2 + \underbrace{|x_j|^2}_{=x_j \cdot \overline{x_j}}$$

in $SU(2)$ liegen (bzw. in $SO(2)$, falls $x_j \in \mathbb{R}$).

Nun sei für $j = 2, \ldots, n$ ι_j die Einbettung von $SU(2)$ in $SU(n)$ als „Drehungen“ in der von e_1 und e_j aufgespannten Ebene in $\mathbb{C}^n$, in Matrizenform wie folgt beschrieben:

$$\Big(\iota_j\big((x_{k,l})_{k,l=1,2}\big)\Big)_{s,t} := \begin{cases} \delta_{s,t}, & \text{falls} \quad \{s,t\} \not\subset \{1,j\} \\ x_{1,1}, & \text{falls} \quad (s,t) = (1,1) \\ x_{1,2}, & \text{falls} \quad (s,t) = (1,j) \\ x_{2,1}, & \text{falls} \quad (s,t) = (j,1) \\ x_{2,2}, & \text{falls} \quad (s,t) = (j,j) \end{cases} ;$$

klarerweise gilt hierbei $\iota_j\big(SO(2)\big) \subset SO(n)$. –Setze nun

$$k^{(j)}(\mathbf{x}) := \iota_{j+1}\Big(\tilde{k}^{(j)}(\mathbf{x})\Big)$$

und schließlich

$$\underline{k}(\mathbf{x}) := k^{(1)}(\mathbf{x}) \cdot k^{(2)}(\mathbf{x}) \cdot \ldots \cdot k^{(n-1)}(\mathbf{x}). \tag{25}$$

Dann verifiziert man sofort, daß

$$m^-(\mathbf{x}) \cdot \big(\underline{k}(\mathbf{x})\big)^{-1} = m^-(\mathbf{x}) \cdot \big(k^{(n-1)}(\mathbf{x})\big)^{-1} \cdot \ldots \cdot \big(k^{(2)}(\mathbf{x})\big)^{-1} \cdot \big(k^{(1)}(\mathbf{x})\big)^{-1}$$

eine obere Dreiecksmatrix ist! [In dem „Teilprodukt"

$$m^-(\mathbf{x}) \cdot \left(k^{(n-1)}(\mathbf{x})\right)^{-1} \cdot \ldots \cdot \left(k^{(r)}(\mathbf{x})\right)^{-1}$$

sind die Einträge x_{n-1} bis x_r, die ehemals in $m^-(\mathbf{x})$ unterhalb der Diagonalen standen, schon „weggedreht" worden, siehe die Identität (24)]. Wiederum kann man dann an Identität (24) den i-ten Diagonaleintrag a_i dieser Matrix als $\frac{\ell(\mathbf{x}^{[i-2]})}{\ell(\mathbf{x}^{[i-1]})}\left(\in \mathbb{R}^{>0}\right)$ ablesen (um den Fall $i = 1$ mit abzudecken, wird formal $\mathbf{x}^{[-1]} := 0$ gesetzt, also $\ell(\mathbf{x}^{[-1]}) = 1$); insbesondere hat man

- $a_1 = \frac{1}{\ell(\mathbf{x}^{[0]})} = \left(\sqrt{1 + |x_1|^2 + \ldots + |x_{n-1}|^2}\right)^{-1}$,
- $a_n = \sqrt{1 + |x_{n-1}|^2}$,

wie es sein soll. –D.h.:

Lemma 10 *Zu* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in F^{n-1}$ *gibt es eine (eindeutig bestimmte) unipotente obere Dreiecksmatrix* $\underline{n}(\mathbf{x}) \in U_B(F)$*, so daß mit dem in Gleichung (25) definierten* $\underline{k}(\mathbf{x})$ *durch*

$$m^-(\mathbf{x}) = \operatorname{diag}\left(\ldots, \frac{\ell(\mathbf{x}^{[i-2]})}{\ell(\mathbf{x}^{[i-1]})}, \ldots\right)_{1=1,\ldots,n} \cdot \underline{n}(\mathbf{x}) \cdot \underline{k}(\mathbf{x}) \tag{26}$$

die IWASAWA*-Zerlegung von* $m^-(\mathbf{x})$ *in* $SL_n(F)$ *gegeben ist!*

Zur Illustration der allgemeine GL_3-Fall explizit:

$$m^-\big((a,b)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{diag}\left(\tfrac{1}{\sqrt{1+|a|^2+|b|^2}}, \tfrac{\sqrt{1+|a|^2+|b|^2}}{\sqrt{1+|b|^2}}, \sqrt{1+|b|^2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \bar{a} & \frac{\bar{b}\sqrt{1+|a|^2+|b|^2}}{\sqrt{1+|b|^2}} \\ 0 & 1 & \frac{a\bar{b}}{\sqrt{1+|a|^2+|b|^2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1+|b|^2}}{\sqrt{1+|a|^2+|b|^2}} & \frac{-\bar{a}}{\sqrt{1+|a|^2+|b|^2}} & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{1+|a|^2+|b|^2}} & \frac{\sqrt{1+|b|^2}}{\sqrt{1+|a|^2+|b|^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+|b|^2}} & 0 & \frac{-\bar{b}}{\sqrt{1+|b|^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{b}{\sqrt{1+|b|^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+|b|^2}} \end{pmatrix};$$

das Produkt der beiden Matrizen in der letzten Zeile ist dann $\underline{k}(\mathbf{x}) \in SU(3)$.

5.1.2 Der nichtarchimedische Fall

Es sei F ein *nichtarchimedischer* lokaler Körper mit Bewertungsring $\mathcal{O}$, und $\pi = \pi_F$ sei ein uniformisierendes Element im maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von $\mathcal{O}$. In Analogie zum archimedischen Fall erscheint ein schrittweises Herstellen der IWASAWA-Zerlegung (bzgl. $K = SL_n(\mathcal{O})$ und

$B = B(F) =$ BOREL-Untergruppe der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen) zumindest für Matrizen der Gestalt $m^-(\mathbf{x})$ nicht unpraktisch. Der grundlegende Mechanismus hierfür ist im Fall von 2×2-Matrizen zu sehen, der deswegen hier zuerst studiert wird:

Sei $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(F),\ g \notin B$, d.h. $c \neq 0$ (damit etwas zu tun ist). –Ist $\underline{d = 0}$, so gilt mit dem WEYL-*Element* $w := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O})$, daß

$$g \cdot w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

in B liegt; somit ist die Zerlegung gefunden, und man kann sich dem „harten Fall" $\underline{c \cdot d \neq 0}$ zuwenden; hier kann man wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot g = \begin{pmatrix} \frac{\det g}{d} & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

(mit $\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_B \subset B$) auch gleich $b = 0$ annehmen; also

Man finde die Iwasawazerlegung von $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$!

- Falls $\frac{c}{d} \in \mathcal{O}$, so leistet

$$g = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}}_{\in T \subset B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{d} & 1 \end{pmatrix}}_{\in K}$$

  das Gewünschte;

- im interessanten Fall $\frac{c}{d} \notin \mathcal{O}$, also $\frac{d}{c} \in \pi_F \mathcal{O}$, nimmt man

$$g = \underbrace{\begin{pmatrix} a \cdot \frac{d}{c} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{d}{c} \end{pmatrix}}_{= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{d}{c} & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot w \in K};$$

man dreht also von rechts mit einer ganzzahligen unteren unipotenten Dreiecksmatrix –bzw. mit dem Produkt aus w^{-1} und einer solchen, je nach Teilbarkeit in der unteren Zeile– g nach B hinein. –Dasselbe nun bei beliebiger Matrixgröße– schrittweise. Es soll also für $n \geq 2$ die Matrix

$$g := \begin{pmatrix} x_0 & & & & \\ x_1 & a_1 & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ x_{n-1} & 0 & & a_{n-1} & \\ x_n & & & & a_n \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(F)$$

in ihre IWASAWA-Komponenten zerlegt werden, indem –von unten nach oben fortschreitend– die Unterdiagonaleinträge mittels Rechtsmultiplikation mit geeignet eingebetteten einfachen ganzzahligen unimodularen 2×2-Matrizen beseitigt werden.

Konkret:

- Falls $\frac{x_n}{a_n} \in \mathcal{O}$, setze $b_{(n)} := \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, a_n)(\in B)$ und

$$k_{(n)} := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & \\ \frac{x_n}{a_n} & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} (\in SL_{n+1}(\mathcal{O}) \subset K);$$

  dann hat man

$$g_{(1)} := b_{(n)}^{-1} \cdot g \cdot k_{(n)}^{-1} = \begin{pmatrix} x_0 & & & & \\ x_1 & a_1 & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ x_{n-1} & 0 & & a_{n-1} & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

- falls $\frac{a_n}{x_n} \in \mathcal{O}$, setze

$$b_{(n)} := \begin{pmatrix} \frac{a_n}{x_n} & & & & x_0 \\ & 1 & & 0 & x_1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & x_{n-1} \\ & & & & x_n \end{pmatrix} (\in B)$$

  und

$$k_{(n)} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \frac{a_n}{x_n} \end{pmatrix} (\in SL_{n+1}(\mathcal{O}) \subset K);$$

  so daß

$$g_{(1)} := b_{(n)}^{-1} \cdot g \cdot k_{(n)}^{-1} = \begin{pmatrix} x_0 & & & & \\ x_1 & a_1 & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ x_{n-1} & 0 & & a_{n-1} & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix};$$

in jedem Fall „ist $g_{(1)}$ von derselben Gestalt wie g, aber eine Dimension kleiner“ .

Man findet also mit entsprechenden Fallunterscheidungen Matrizen $b_{(i)} \in B$ und $k_{(i)} \in \iota_{i+1}\big(SL_2(\mathcal{O})\big)$, jeweils für $i = 1, \ldots, n$. Ferner setze $b_{(0)} := \operatorname{diag}(a_0, 1, \ldots, 1)$, dann ist $\underline{b} := b_{(n)} \cdot \ldots \cdot b_{(1)} \cdot b_{(0)} \in B$, es liegt $\underline{k} := k_{(1)} \cdot \ldots \cdot k_{(n)}$ in $SL_{n+1}(\mathcal{O}) \subset K$, und

$$g = \underline{b} \cdot \underline{k}$$

ist die gesuchte Iwasawazerlegung.

Bestimme nun die (nach der Vorbemerkung eindeutig bestimmten) Absolutbeträge der Diagonaleinträge $d_0, \ldots, d_n$ der oberen Dreiecksmatrix $\underline{b}$! –Man hat nach Konstruktion

$$d_n = \begin{cases} a_n, & \text{falls } \frac{x_n}{a_n} \in \mathcal{O} \\ x_n & \text{sonst.} \end{cases}$$

und damit

$$\begin{aligned} v_F(d_n) &= \min\{v_F(a_n), v_F(x_n)\} \\ &= v_F(a_n) + \min\{0, v_F(\frac{x_n}{a_n})\}; \end{aligned}$$

dann weiter

$$v_F(d_{n-1}) = v_F(a_{n-1}) + \min\big\{0, v_F(\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}) - \min\{0, v_F(\frac{x_n}{a_n})\}\big\};$$

allgemein gilt für $i = 0, \ldots, n-1$

$$v_F(d_{n-i}) = v_F(a_{n-i}) + \min\big\{0, v_F(\frac{x_{n-i}}{a_{n-i}}) - \min_{j<i}\{v_F(\frac{x_{n-j}}{a_{n-j}})\}\big\}.$$

Der oberste Diagonaleintrag d_0 schließlich erfüllt

$$v_F(d_0) = v_F(x_0) - \min\{0, v_F(\frac{x_1}{a_1}), \ldots, v_F(\frac{x_n}{a_n})\}.$$

Das ist klar für $n = 1$ (d.h. GL_2) und wird nach der folgenden Betrachtung des einfachsten nichttrivialen Falles für beliebiges $n \geq 2$ durch Induktion ebenso klar. Also: sei $n = 2$ und $g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ x_1 & 1 & \\ x_2 & & 1 \end{pmatrix} \in SL_3(F)$; damit's nicht langweilig wird, sei $x_2 \notin \mathcal{O}$ angenommen, und somit nach den Regeln

$$b_{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2} & & 1 \\ & 1 & x_1 \\ & & x_2 \end{pmatrix} \text{ und } g_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{x_1}{x_2} & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- $v_F(x_2) \leq v_F(x_1)$: dann liegt $g_{(1)}$ schon in $SL_3(\mathcal{O})$, und $d_0(g) = d_0(b_{(2)}) = \frac{1}{x_2}$, wie behauptet;

- $v_F(x_2) > v_F(x_1)$: also $g_{(1)} \notin K$, man braucht

$$b_{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{x_1} & 1 & \\ & \frac{x_1}{x_2} & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

  und damit $d_0(g) = d_0(b_{(2)} \cdot b_{(1)}) = \frac{1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{x_1}$, wie in diesem Fall behauptet.

(Zumindest) für die unipotenten unteren Streifenmatrizen

$$m^-(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ x_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_n & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \big(\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in F^n\big),$$

kann man diesen obersten Diagonaleintrag noch etwas anders interpretieren: es sei $\ll\mathbf{x}\gg$ der von 1 und allen $x_i,\ i = 1, \ldots, n$ erzeugte $\mathcal{O}$-Untermodul in F, ein echt gebrochenes $\mathcal{O}$-Ideal in F (d.h. $\mathcal{O} \subset \ll\mathbf{x}\gg$). Dann gilt

(27) $$< d_0\big(m^-(\mathbf{x})\big) >_{\mathcal{O}} = \ll\mathbf{x}\gg^{-1} = \{f \in F | \forall_{i=1,\ldots,n} : f \cdot x_i \in \mathcal{O}\}.$$

(**Anhang**: Ist man nur an diesem obersten Diagonaleintrag des Borelanteils interessiert, so ist es wohl rationeller, sich des im folgenden beschriebenen (Pseudo-)Algorithmus' zu bedienen, der aus der Quelle [Mœ97] adaptiert wurde: Für $i = 1, \ldots, n$ bezeichne immer $F^i := < e_1, \ldots, e_i >_F$ das F-Erzeugnis der ersten i Basisvektoren; analog $\mathcal{O}^i := < e_1, \ldots, e_i >_{\mathcal{O}}$. –Sei $g \in GL_n(F)$ gegeben. Für $1 \leq i \leq n$ ist $\Lambda_i := F^i \cap g \cdot \mathcal{O}^n$ dann ebenso wie $\mathcal{O}^i$ ein (vollständiges) Gitter in F^i. Deshalb kann ein Vektor $y_i \in F^i$ von der Form

$$y_i = e_i + \sum_{j<i} \alpha_j^i e_j$$

so gewählt werden, daß gilt

$$\Lambda_i = \Lambda_{i-1} \oplus (\Lambda_n \cap < y_i >_F).$$

Man definiert $u_i \in U_B(F)$ durch

$$u_i := \begin{cases} e_j & \mapsto e_j; \quad j \neq i \\ y_i & \mapsto e_i \end{cases}.$$

Ebenso wie $< e_i >_{\mathcal{O}}$ ist dann $u_i(\Lambda_i \cap < y_i >_F)$ ein Gitter in dem eindimensionalen F-Vektorraum $< e_i >_F$, und somit gilt für genau ein $n_i \in \mathbb{Z}$:

$$\pi^{n_i} \cdot u_i(\Lambda_i \cap < y_i >_F) = < e_i >_{\mathcal{O}};$$

setze dann

$$m_i := \begin{cases} e_j & \mapsto e_j; \qquad j \neq i \\ e_i & \mapsto \pi^{-n_i} e_i \end{cases}.$$

Nach Konstruktion liegt dann $k := m_1 u_1 m_2 u_2 \ldots m_n u_n \cdot g$ in K, dem Stabilisator von $\mathcal{O}^n$, und $\tilde{b} := u_n^{-1} m_n^{-1} \ldots u_1^{-1} m_1^{-1}$ stabilisiert die Fahne $\mathcal{F}_{st}$, liegt also in $B(F)$, so daß man $g = \tilde{b} \cdot k$ als die gesuchte Iwasawa-Zerlegung von g erkennt.

Für $g = m^-(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in F^{n-1}$, ist in der Zerlegung $m^-(\mathbf{x}) = \mathrm{diag}(\ldots, d_j(\mathbf{x}), \ldots)_{j=0,\ldots,n-1} \cdot u(\mathbf{x}) \cdot k(\mathbf{x})$ jedenfalls der oberste Eintrag d_0 des Torusanteils leicht zugänglich: offenbar ist $d_0(\mathbf{x})$ das Inverse des obersten Diagonaleintrags von m_1, anders gesagt

$$u_1(\Lambda_1 \cap < y_1 >_F) = (d_0(\mathbf{x})) \cdot < e_1 >_{\mathcal{O}}.$$

Man hat aber nach Konstruktion $y_1 = e_1$ und $u_1 = \mathrm{id}$ (dies gilt immer), und

$$\Lambda_1 \cap < y_1 >_F = \Lambda_1 := F^1 \cap m^-(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{O}^n,$$

d.h. dies Gitter in $F \cdot e_1$ besteht gerade aus denjenigen $\mathcal{O}$-Linearkombinationen der *Spalten* der Matrix

$$m^-(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ x_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{n-1} & 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

deren untere $n-1$ Einträge sämtlich 0 sind. Die e_1-Kordinate einer derartigen $\mathcal{O}$-Linearkombination ist dann aber ein Element des Ideals $\{f \in F | \forall_{i=1,\ldots,n} : f \cdot x_i \in \mathcal{O}\} = \ll\mathbf{x}\gg^{-1}$, das heißt also (wieder) $< d_0(\mathbf{x}) >_{\mathcal{O}} = \ll\mathbf{x}\gg^{-1}$; **Ende des Anhangs**.)

5.2 Verhalten der P-K–Zerlegung bei T-Rechtstranslation

Es sei wieder F ein *archimedischer* lokalkompakter Körper, d.h. $= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und $n \geq 2$. Die mittlerweile üblichen LIE-Gruppen sollen betrachtet werden: sei $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ die numerierte Standardbasis von $V = F^n$, seien $G := GL_F(V) = GL_n(F)$; P der Geraden-Stabilisator $\mathrm{Stab}_G(< e_1 >_F)$, $B :=$ die BOREL-Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen in G und T der maximale Torus der Diagonalmatrizen in G, also $G \supset P \supset B \supset T$. Weietr sei K die „Standard“-maximale zusammenhängend-kompakte Untergruppe, d.h. die unitäre bzw. spezielle orthogonale Gruppe derjenigen $(F : \mathbb{R})$-Sesquilinearform auf V, deren Strukturmatrix bzgl. $\mathcal{B}$ die Einheitsmatrix ist.

Man hat dann die IWASAWA-Zerlegung bezüglich B und K mit gewissen Eindeutigkeiten, wie im ersten Abschnitt dieses Kapitels erläutert, und eine –weit weniger eindeutige– Zerlegung bezüglich P und K: es sei $g = p \cdot k$ eine (!) Zerlegung der invertierbaren Matrix $g \in G$ als Produkt der Matrizen $k \in \mathsf{K}$ (anders gesagt ${}^t\overline{k} \cdot k = \mathbb{1}_n$, d.h. die Zeilen bzw. Spalten von k bilden jeweils eine Orthonormalbasis von F^n) und $p = \begin{pmatrix} a_{1,1} & - & \underline{u} & - \\ 0 & & & \\ | & & \underline{m} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in P$, also $a_{1,1} \overset{!}{\in} \mathbb{R}^{>0} \subset F^*$, $\underline{u} \in F^{n-1}$ und $\underline{m} \in GL_{n-1}(F)$. –Aus der äquivalenten Gleichheit $g^{-1} \cdot p = k^{-1} (= {}^t\overline{k})$ ersieht man, daß unter obigen Vorgaben der obere linke Eintrag $a_{1,1}$ von p und die erste Spalte von K aus G eindeutig bestimmt sind: die erste Spalte der Matrix $g^{-1} \cdot p$ ist eine Spalte der unitären Matrix k^{-1}, also ein Vektor der Länge 1, aber auch das $a_{1,1}$-fache der ersten Spalte β_1 von g^{-1}: damit muß $a_{1,1}$ das Inverse der euklidichen Länge von β_1 sein, und der erste *Zeilen*vektor von k, der ja komplex-konjugiert zum ersten *Spalten*vektor von k^{-1} ist, ist somit komplex-konjugiert zu demjenigen Einheitsvektor, der in die Richtung β_1 zeigt.

Sei nun $g = p \cdot k$ wie eben, und sei $\underline{t} = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) \in T$ (d.h. $t_j \in F^*$); was kann über die (zugänglichen) Komponenten einer P-K-IWASAWA-Zerlegung $g' \overset{!}{=} p' \cdot k'$ ausgesagt werden, wenn $g := g \cdot \underline{t}$ aus g durch Rechtstranslation mit $\underline{t}$ entsteht?

Die erste Spalte β_1' von $(g')^{-1} = \underline{t}^{-1} \cdot g^{-1}$, von der diese ja einzig abhängen, ist $= \begin{pmatrix} \vdots \\ \frac{\beta_{j,1}}{t_j} \\ \vdots \end{pmatrix}$,

wenn $\beta_1 = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} \\ \vdots \\ \beta_{n,1} \end{pmatrix} \in F^n$ der erste Spaltenvektor von g^{-1} ist; ihre euklidische Länge (das Inverse von $a_{1,1}'$!) beträgt also $\sqrt{\sum_{j=1}^n \mid \frac{\beta_{j,1}}{t_j} \mid^2}$. Die erste Zeile von k' erkennt man als $\frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n |\frac{\beta_{j,1}}{t_j}|^2}} \cdot \left(\overline{(\frac{\beta_{1,1}}{t_1})}, \ldots, \overline{(\frac{\beta_{1,1}}{t_1})} \right)$; alle ihre Einträge sind bis auf Wurzelziehen und ggf. komplexe Konjugation *rationale* und *homogene* Funktionen sowohl in den $\beta_{j,1}$ wie auch in den t_j!

Sind die Einträge t_j der Diagonalmatrix $\underline{t}$ sogar *positive reelle* Zahlen (die sich gefahrlos aus Absolutbeträgen herausbewegen lassen), so können die Einträge $\kappa_{1,j}^{(')}$ der ersten Zeilen von k und k' noch genauer verglichen werden: es ist ja $\kappa_{1,k} = \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n |\beta_{j,1}|^2}\right)^{-1} \cdot \overline{\beta_{k,1}}$ und

$$\begin{aligned}
\kappa'_{1,k} &= \left(\sqrt{\sum\nolimits_{j=1}^n |\tfrac{\beta_{j,1}}{t_j}|^2}\right)^{-1} \cdot \frac{\overline{\beta_{k,1}}}{t_k} \\
&= \frac{1}{t_k} \cdot \frac{\overline{\beta_{k,1}}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n |\frac{\beta_{j,1}}{t_j}|^2}} \\
&= \frac{\overline{\beta_{k,1}}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n |\beta_{j,1}|^2}} \cdot \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n |\beta_{j,1}|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (\frac{t_k}{t_j})^2 \cdot |\beta_{j,1}|^2}} \\
&= \kappa_{1,k} \cdot \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n |\beta_{j,1}|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (\frac{t_k}{t_j})^2 \cdot |\beta_{j,1}|^2}}.
\end{aligned}$$

Treten solche Ausdrücke „irgendwann“ als Faktoren im Integranden von Integralen über $\underline{t} \in (\mathbb{R}^{>0})^n$ oder ähnliches auf, so kann man sie durch lineare Substitutionen der $t'_j = \frac{t_j}{\beta_{j,1}}$ auf eine Form „Brüche von Monomen in $\sqrt{\sum_{j=1}^r (\frac{t_k}{t_j})^2}$“ bringen!

5.3 Zur Konvergenz gewisser Eisenstein-Reihen

Es sei F ein Zahlkörper, entweder totalreell oder totalimaginär, und $n \geq 2$; dann sind die algebraischen Gruppen $G_0 := GL_n/F \supset P_0 := \mathrm{Stab}_{G_0}(< e_1 >) \supset B_0 =$ Borel-Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen $\supset T_0 =$ Diagonaltorus definiert, wie schon des öfteren in dieser Arbeit, und $G \supset P \supset B \supset T$ seien die jeweiligen Skalarrestriktionen nach $\mathbb{Q}$. Ein algebraischer Hecke-Charakter $\underline{\varphi}$ auf P sei gegeben; dieser faktorisiert über den maximalen Torus-Quotienten $C_P \cong T_F \times T_F$ von P, wobei $T_F := \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m/F)$ wie im Abschnitt 1.2.2 den quasispaltenden $\mathbb{Q}$-Torus zu F bezeichnet. –Genauer gesagt ist ein solcher Charakter von der Form

$$\underline{\varphi} = (\varphi \circ \omega_1, \widehat{\varphi} \circ \omega_n)$$

mit zwei algebraischen Hecke-Charakteren $\varphi, \widehat{\varphi}$ auf F bzw. T_F; es seien $\gamma, \widehat{\gamma}$ die ∞-Typen dieser Charaktere und $w = \mathrm{wt}(\varphi), \widehat{w}$ ihre Gewichte. Es werde vorausgesetzt, daß φ kritische Stellen hat, und $\mathcal{T}$ sei ein mit φ bzw. γ verträglicher CM-Typ von F.

Die halbe Summe der positiven Wurzeln *in* P_0 ist im Abschnitt 2.2 als $\delta_{P_0} = \frac{1}{2} \cdot (n \cdot \omega_1 - 1 \cdot \omega_n)$ identifiziert worden; es bezeichne $|\delta_P| := \|\cdot\|_{\mathbb{I}_F} \circ \delta_{P_0, \mathbb{A}_F} : P(\mathbb{A}) = P_0(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{R}^*$ den hieraus entstehenden Charakter auf den adelischen Punkten von P: es ist dies der Modulus-Charakter dieser nicht-unimodularen topologischen Gruppe! Für beliebiges $s \in \mathbb{C}$ sei dann $\underline{\varphi}_s := \underline{\varphi} \cdot |\delta_P|^s$ gesetzt; die Einschränkung dieses Charakters auf den Torus $T(\mathbb{A})$ ist also derjenige $\mathbb{C}$-wertige Homomorphismus, der ein Element $\underline{t} = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) \in T(\mathbb{A})$ (d.h. $t_i \in \mathbb{I}_F$ ohne weitere Einschränkungen) auf die komplexe Zahl

$$\underline{\varphi}_s(\underline{t}) = \left(\varphi(t_1) \cdot \|t_1\|_{\mathbb{I}_F}^{\frac{n \cdot s}{2}}\right) \cdot \left(\widehat{\varphi}(\prod_{j=1}^n t_j) \cdot (\prod_{j=1}^n \|t_j\|_{\mathbb{I}_F})^{-\frac{s}{2}}\right)$$

abbildet; für $s \in 2 \cdot \mathbb{Z}$ ist dies wieder ein algebraischer HECKE-Charakter, und in jedem Falle ist dieser Charakter auf den Elementen von $P(\mathbb{Q})$ trivial.

Es sei nun $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}_s} := \mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\underline{\varphi}_s)$ die aus diesem Charakter parabolisch induzierte Darstellung von $G(\mathbb{A})$. Für ein $\underline{x} \in G(\mathbb{A})$ und eine Funktion $\phi_s \in \mathcal{J}_{\underline{\varphi}_s}$ definiert man die <u>EISENSTEIN-Reihe</u> (von ϕ_s in $\underline{x}$) durch

$$\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}_s}(\phi_s)(\underline{x}) := \sum_{[\gamma] \in P(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{Q})} \phi_s(\gamma \cdot \underline{x}),$$

falls diese Reihe (absolut) konvergent ist.

Falls die beiden auftretenden Ausdrücke sinnvoll (d.h. absolut konvergent) sind, gilt für $g \in G(\mathbb{A})$ die Gleichheit

$$\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}_s}(\phi_s)(\underline{g}) = \mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}_s}(\underline{g} \cdot \phi_s)(\mathbb{1}_n)$$

(mit der üblichen Operation von $G(\mathbb{A})$ auf der induzierten Darstellung); für Konvergenzfragen dieser EISENSTEIN-Reihen genügt es also, die Konvergenzeigenschaften der Reihen

$$R_1(\phi_s) := \mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}_s}(\phi_s)(\mathbb{1}_n) = \sum_{[\gamma] \in P(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{Q})} \phi_s(\gamma)$$

für beliebige $\phi_s \in \mathcal{J}_{\underline{\varphi}_s}$ zu untersuchen. –**Wenn** für ein $s_0 \in \mathbb{C}$ die Reihen $R_1(\phi_{s_0})$ alle absolut konvergieren, dann existieren also Funktionen $\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}_s}(\phi_s)(\cdot) : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, die glatt sind (da die ϕ_{s_0} dies waren) und die nach Konstruktion unter Linkstranslation des Arguments mit Elementen von $G(\mathbb{Q})$ invariant sind; man hat also eine lineare Abbildung $\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}_{s_0}} : \mathcal{J}_{\underline{\varphi}_{s_0}} \to \mathsf{C}^\infty\big(G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})\big)$, die dann wegen der oben „formal" konstatierten Äquivarianzeigenschaft ein *Verkettungsoperator*, d.h. ein Homomorphismus von zulässigen $G(\mathbb{A})$-Moduln ist; das Bild dieses EISENSTEIN-Operators $\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}_{s_0}}$ liegt sogar im Teilraum $\mathcal{A}(G)$ der *automorphen Formen* auf $G(\mathbb{A})$ (dies soll hier weder präzisiert noch verifiziert, aber weiter benutzt werden).

Die Funktion ϕ_s wurde ja aus dem Raum $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}_s}$ genommen, was gerade heißt, daß für ein $\underline{g} \in G(\mathbb{A})$, dessen P-K-IWASAWA-Zerlegung $\underline{g} = m_P(\underline{g}) \cdot u_P(\underline{g}) \cdot k(\underline{g})$ lautet, der Wert $\phi_s(\underline{g})$ sich als $\underline{\varphi}_s\big(m_P(\underline{g})\big) \cdot 1 \cdot \phi_s\big(k(\underline{g})\big)$ ausdrückt. (Hierbei liegt also $m_P(\underline{g})$ in der Standard-LEVI-Untergruppe $M_P(\mathbb{A}) \cong \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{A}_F) \times GL_{n-1}(\mathbb{A}_F)$, $u_P(\underline{g})$ in den adelischen Punkten des unipotenten Radikals von P, und $k(\underline{g})$ ist in $\mathsf{K} := K_\infty^{G,\circ} \times GL_n(\widehat{\mathcal{O}_F})$, wobei $K_\infty^{G,\circ} = \prod_{\tau \in \mathbb{V}_{F,\infty}} K_\tau^{G,\circ}$ die Standardwahl einer maximalen zusammenhängend-kompakten Untergruppe in $G(\mathbb{R})$ darstellt, also $K_\tau^{G,\circ} = SO(n)_{(\tau)} \subset GL_n(\mathbb{R})_{(\tau)}$ für reelle und $K_\tau^{G,\circ} = U(n)_{(\tau)} \subset GL_n(\mathbb{C})_{(\tau)}$ für komplexe Stellen τ von F.)

Die Summationsmenge $P(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{Q}) = P_0(F) \backslash GL_n(F)$ ist zum $(n-1)$-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}^{n-1}(F) = (F^n \setminus \{0\})/F^*$ isomorph (vgl. Abschnitt 2.1), und dort ist auch angegeben worden, wie jeder Punkt schon als eine Nebenklasse von $SL_n(F)$ bezüglich ihrer maximalen Standardparabolischen $P_0^{(1)}(F) := SL_n(F) \cap P_0(F)$ erhalten werden kann. Der Determinanten-Anteil $\big(\widehat{\varphi}(\cdot) \cdot \|\cdot\|_{\mathbb{I}_F}^{-\frac{s}{2}}\big) \circ \det$ von $\underline{\varphi}_s$, der auf diesen Vertretern verschwindet, ist also für die Konvergenz der Reihen $R_1(\phi_s)$ irrelevant, wenn man sich auf ein Vertretersystem in $SL_n(F)$ einschränkt; es kommt nur auf den Wert von $\big(\varphi \cdot \|\cdot\|_{\mathbb{I}_F}^{\frac{n \cdot s}{2}}\big) \circ \omega_1$

auf $m_P(\underline{g})$ wirklich an. Der obere linke Eintrag $a_{1,1}(\underline{g}) \in \mathbb{I}_F$ der Matrix $m_P(\underline{g})$ zu einem $\underline{g} \in G(\mathbb{A})$ ist jedenfalls (zu den getroffenen Untergruppen-Wahlen!) aus $\underline{g}$ eindeutig bestimmt, und er ist somit das einzige, was für die Konvergenz der Reihen $R_1(\phi_s)$ untersucht werden muß. Man beachte noch, daß für $\underline{g} \in SL_n(\mathbb{A}_F)$ der Absolutbetrag von $\underline{\varphi}_s\big(m_P(\underline{g})\big)$ sich mittels des Gewichtes w von φ als $|\,\underline{\varphi}_s\big(m_P(\underline{g})\big)\,| = \|a_{1,1}(\underline{g})\|_{\mathbb{I}_F}^{\frac{-w+n\cdot s}{2}}$ ausdrückt.

Die Einschränkung der stetigen Funktion ϕ_s auf die kompakte Untergruppe K ist sicherlich beschränkt –es sei $M \in \mathbb{R}^{>0}$ eine obere Schranke der Absolutbeträge–, und damit wird die Reihe der Absolutbeträge zu $R_1(\phi_s)$ durch $\sum_{[\gamma]\in P_0^{(1)}(F)\backslash SL_n(F)} \|a_{1,1}(\gamma)\|_{\mathbb{I}_F}^{\frac{-w+n\cdot s}{2}} \cdot M$ nach oben abgeschätzt; es liegt also absolute Konvergenz des EISENSTEIN-Operators $\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}_s}$ sicherlich dann vor, wenn die Reihe positiver reeller Zahlen

$$R_2(\underline{\varphi}_s) := \sum_{[\gamma]\in P_0^{(1)}(F)\backslash SL_n(F)} \|a_{1,1}(\gamma)\|_{\mathbb{I}_F}^{\frac{-w+n\cdot s}{2}}$$

konvergiert.

Für Funktionen $\phi_s \in \mathcal{J}_{\underline{\varphi}_s}$, deren Absolutbetrag auf ganz K konstant ist, sind absolute Konvergenz von $R_1(\phi_s)$ und Konvergenz von $R_2(\phi_s)$ offensichtlich gleichwertig; derartige Funktionen existieren aber sicher in $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}_s}$, <u>denn</u>: die induzierte Darstellung $j_{\underline{\varphi}_s} := \mathrm{Ind}_{\mathsf{K}\cap P(\mathbb{A})}^{\mathsf{K}}(\underline{\varphi}_s\big|_{\mathsf{K}\cap P(\mathbb{A})})$ ist zunächst als Raum von Funktionen auf K realisiert, kann aber (wie in den vorigen Kapiteln schon durchgeführt) mit einem Raum von Funktionen auf dem kompakten Nebenklassenraum $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{A}) \stackrel{!}{=} \big(\mathsf{K} \cap P(\mathbb{A})\big)\backslash\mathsf{K}$ identifiziert werden. Bei dieser Identifikation gehen betragskonstante Funktionen auf $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{A})$ in betragskonstante Funktionen auf K über, weil ja $\underline{\varphi}_s\big|_{\mathsf{K}\cap P(\mathbb{A})}$ ein $U(1)$-wertiger Charakter ist. Es läßt sich aber *jedes* Element von $j_{\underline{\varphi}_s}$ zu einer Funktion in $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}_s}$ fortsetzen!

Somit gilt: *Für ein $s \in \mathbb{C}$ existiert der* EISENSTEIN-*Verkettungsoperator*

$$\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}_s} : \mathcal{J}_{\underline{\varphi}_s} \to \mathcal{A}(G)$$

<u>genau dann</u>, wenn die Reihe

$$R_2(\underline{\varphi}_s) = \sum_{[\gamma]\in P_0^{(1)}(F)\backslash SL_n(F)} \|a_{1,1}(\gamma)\|_{\mathbb{I}_F}^{\frac{-w+n\cdot s}{2}}$$

konvergiert!

Es seien nun ganze Ideale $\mathfrak{c}_1 \ldots, \mathfrak{c}_{h^*(F)} \subset \mathcal{O}_F$ fest gewählt, die ein Vertretersystem für $\mathcal{C}\ell^+(F)$, die Idealklassengruppe im engeren Sinne von F, bilden (deren endliche Mächtigkeit ja $h^+(F)$ heißt). Im Abschnitt 2.1 wurden Matrix-Repräsentanten γ der Nebenklassenmenge $P_0^{(1)}(F)\backslash SL_n(F) = \mathbb{P}^{n-1}(F)$ angegeben, nämlich die Produkte aus den unipotenten unteren Streifenmatrizen $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ -y_1 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \\ -y_{n-1} & 0 & & 1 \end{pmatrix}$ und aus einer Permutationsmatrix „$w_{\max}^{(k)}$“, wenn $y_1 = \ldots = y_k = 0$ gilt, wobei diese letzteren Faktoren für den P-Anteil der

IWASAWA-Zerlegung bedeutungslos sind; oBdA sei also

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ x_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{n-1} & 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } v_\gamma := {}^t\!(1, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in F^n.$$

Die Komponente $a_{1,1}(\gamma)_\tau$ des „oberen linken“ IWASAWA-Zerlegungs-Eintrags an einer *archimedischen* Stelle τ von F wurde vorn bestimmt als das Inverse der euklidischen Norm des Vektors $\tau(v_\gamma)$ im euklidischen Vektorraum F_τ^n; die endlich-adelische Komponente $a_{1,1}(\gamma)_f$ desselben Eintrags ist $\ll\mathbf{x}\gg^{-1}$, d.h. das Ideal $\mathcal{ID}\big(a_{1,1}(\gamma)_f\big)$ ist das größte echte Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F$, so daß $\mathfrak{a} \cdot v_\gamma$ im Standardgitter $\mathcal{O}_F^n$ enthalten ist. Es sei $k = k(\gamma)$ so, daß $\mathfrak{c}_k$ dieselbe Idealklasse (im engeren Sinne) wie $\mathcal{ID}\big(a_{1,1}(\gamma)_f\big)^{-1}$ definiert, und sei $\alpha = \alpha_\gamma \in F^*$ ein Element mit $\mathcal{ID}\big(a_{1,1}(\gamma)_f\big)^{-1} \cdot \mathfrak{c}_k = (\alpha)$ –anders gesagt: $\alpha \cdot v_\gamma$ ist ein Vektor mit ganzzahligen Einträgen, die gerade das Ideal $\mathfrak{c}_k$ aufspannen. Nach der Multiplikation mit dem Hauptidele α (die ja an der Idelenorm und an HECKE-Charakter-Werten nichts ändert) ist also das Idele $a_{1,1}(\gamma)$ so beschaffen, daß seine archimedischen Komponenten die jeweiligen lokalen euklidischen Normen des genannten ganzzahligen Vektors sind; seine endlichen Komponenten erzeugen das Ideal $\mathfrak{c}_k$.

Die Reihe $R_2(\underline{\varphi}_s)$ kann also als eine Summe über die (endlich vielen) engeren Idealklassen von F umgruppiert werden; in jedem dieser „äußeren“ Summanden wird dann summiert über die (unendliche) Menge derjenigen Matrizen γ bzw. Gittervektoren $\alpha_\gamma \cdot v_\gamma$, deren Koordinaten das Ideal $\mathfrak{c}_k$ erzeugen. Nachdem der gemeinsame Faktor $N(\mathfrak{c}_k)^{\frac{n\cdot s-w}{2}}$ aller dieser Summanden vorgezogen wurde, verbleibt „innen“ als Summand die $\frac{n\cdot s-w}{2}$-te Potenz des Produkts der lokalen euklidischen „Bewertungen“ (d.h. für komplexe Stellen das *Quadrat* der Norm!) des Gittervektors.

Falls F nur *eine* archimedische Stelle hat (also $= \mathbb{Q}$ oder imaginärquadratisch ist), steht hier also die $[F:\mathbb{Q}] \cdot \frac{n\cdot s-w}{2}$-te Potenz der euklidischen Norm des Vektors $\alpha_\gamma \cdot v_\gamma$ im euklidischen Vektorraum $(F \otimes \mathbb{R})^n \cong \mathbb{R}^{n\cdot[F:\mathbb{Q}]}$. Nun ist bekanntlich die Summe der e-ten Normpotenzen über *alle* Vektoren eines vollständigen Gitters in einem m-dimensionalen euklidischen Vektorraum genau dann konvergent, wenn $\boxed{e < -m}$ gilt; weil hier nicht enmal alle Vektoren „drankommen“, sind die o.g. inneren Summen von $R_2(\underline{\varphi}_s)$ also sicher dann konvergent, wenn gilt $[F:\mathbb{Q}] \cdot (\frac{\pm w - n\cdot s}{2}) \overset{!}{<} -n \cdot [F:\mathbb{Q}]$, was zu $w \overset{!}{<} n \cdot (s-2)$ gleichwertig ist. Es folgt:

Ist $F = \mathbb{Q}$ oder imaginärquadratisch und ist der algebraische HECKE-*Charakter $\underline{\varphi}$ auf P vom ∞-Typ $\Theta_{\mathcal{T}} * \underline{\lambda_d}$ (mit den im Abschnitt 4.2.5 fixierten Bezeichnungen), so daß seine ω_1-Komponente φ also das Gewicht $w = -(n+d)$ mit $d := d_\sigma - d_{\mathfrak{c}\sigma} > 0$ hat, so liegt für $s \overset{!}{>} 1 - \frac{d}{n}$ Konvergenz der Reihe $R_2(\varphi_s)$ und damit absolute Konvergenz aller Reihen $R_1(\phi_s)$ (für $\phi \in \mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$ beliebig) vor; absolute Konvergenz in $s = 0$ liegt also genau für $d > n$ vor. Anders gesagt:*

Der EISENSTEIN-*Verkettungsoperator* $\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}} : \mathcal{J}_{\underline{\varphi}} \to \mathcal{A}(G)$ *existiert im „naiven“ Sinne (d.h. ohne analytische Fortsetzungen) genau für $d > n$!*
Wie immer bei EISENSTEIN-Reihen hat man jedenfalls Konvergenz „weit rechts“ und meromorphe Fortsetzung, wobei ja Pole nur dann auftreten können, wenn der Charakter eine Potenz der Idelenorm ist!

Eine auf Höhen- und Reduktions-Theorie beruhende Heuristik (G. HARDER, persönliche Mitteilung) und Vergleich mit der Funktionenkörper-Situation zeigt, daß auch für *beliebiges* F die EISENSTEIN-Reihe genau für $d > n$ in $s = 0$ absolut konvergent sein sollte. (Eine präzisere Betrachtung dieses Themas würde die EISENSTEIN-Reihen gleich als höhentheoretische Zetafunktionen interpretieren und entsprechend die Standardreferenzen [FMT] und [Sc79] heranziehen.)

6 Adelisch-lokalsymmetrische Räume zu reduktiven Gruppen und ihre Kohomologie

6.1 Zentrum, Cozentrum und derivierte Gruppe einer reduktiven Gruppe

Es sei $L/_{\mathbb{Q}}$ eine über $\mathbb{Q}$ definierte zusammenhängende lineare algebraische Gruppe, die *reduktiv* ist – dies heißt, daß ihr unipotentes Radikal trivial ist und somit ihr Radikal (der maximale auflösbare Normalteiler) ein in L zentraler $\mathbb{Q}$-Torus ist, der mit Z_L bezeichnet werden soll. Die derivierte (oder Kommutator-)Gruppe $L^{(1)}/_{\mathbb{Q}} := [L, L]$ ist dann halbeinfach, und L ist ein fastdirektes Produkt von $L^{(1)}$ und dem Zentrum Z_L. Der maximale abelsche Quotient von L, „L^{ab}" $= L/L^{(1)}$, ist ebenfalls ein $\mathbb{Q}$-Torus, der hier mit C_L bezeichnet und das *Co-Zentrum* von L genannt wird. Die Verkettung der Inklusion von Z_L in L und der Projektion von L auf C_L ist eine *Isogenie* $Z_L \xrightarrow{i_L} C_L$, d.h. eine Surjektion mit endlichem Kern; diesem korrespondiert eine Inklusion der Charaktergitter $X^*(C_L) \subset X^*(Z_L)$ mit endlichem Cokern.

Es sei S_L der maximale $\mathbb{Q}$-Untertorus in Z_L, der über $\mathbb{Q}$ spaltet (auf dem Niveau der rationalen Charaktermoduln korrespondiert er zur Unterdarstellung $Y(Z_L)^0 := Y(Z_L)^{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}} \subset Y(Z_L) := X^*(Z_L) \otimes \mathbb{Q}$, auf der die absolute Galois-Gruppe $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ trivial operiert, cf. 1.2.2), und A_L[19] der maximale $\mathbb{R}$-spaltende Untertorus in $Z_L \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.

Es werde auch noch ein maximaler $\mathbb{Q}$-Torus $T_L \subset L$ fixiert, der einen maximalen $\mathbb{Q}$-spaltenden Torus T_L^s von L enthält; sicherlich gilt $S_L \subset T_L^s$, $Z_L \subset T_L$.

6.2 Adelewertige Punkte und maximalkompakte Untergruppen

Zu reduktivem $L/_{\mathbb{Q}}$ wie eben hat man die *lokalkompakte* Gruppe $L(\mathbb{A})$ der adelewertigen Punkte mit ihrer Zerlegung

$$L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{A}_f)$$

als Produkt der (linearen, reduktiven) $\mathbb{R}$-Lie-Gruppe $L(\mathbb{R}) =: L_\infty$ und der total unzusammenhängenden Gruppe $L(\mathbb{A}_f) = \prod'_{p \in \mathbb{V}_{\mathbb{Q},f}} L(\mathbb{Q}_p)$, die das eingeschränkte Produkt der jeweils p-adischen (linearen, reduktiven) Lie-Gruppen $L(\mathbb{Q}_p) =: L_p$ ist.

In den hier weiterhin betrachteten Beispielen ist L jeweils durch eine natürliche und treue lineare $\mathbb{Q}$-Darstellung gegeben, bzgl. derer $L(\mathbb{A})$ als topologische Gruppe „konstruiert" wird; die Subtilitäten des abstrakten Zugangs in [Co] können also hier vermieden werden.

In der Lie-Gruppe $L(\mathbb{R}) = L_\infty$ (die nur endlich viele Zusammenhangskomponenten hat) existieren Untergruppen, die maximal sind bzgl. der Eigenschaft, kompakte und zusammenhängende Untergruppe zu sein, und diese sind nach dem Fixpunktsatz von Cartan alle in L_∞ konjugiert; es sei $K_\infty^{L,\circ}$ eine von ihnen, also eine kompakte zusammenhängende (automatisch reduktive) Lie-Gruppe. Es existieren maximalkompakte Untergruppen in L_∞, die $K_\infty^{L,\circ}$ normalisieren; es sei K_∞^L eine von diesen. Die Menge der Zusammenhangskomponenten $\pi_0(L_\infty)$ ist isomorph zur Quotientengruppe L_∞/L_∞° (hier von vornherein

[19] vielleicht keine besonders glückliche Bezeichnung?

eine endliche Gruppe); aufgrund des Bestehens der IWASAWA-Zerlegung stimmt diese mit der Quotientengruppe $K_\infty^L/K_\infty^{L,\circ}$ überein, von der sogar bekannt ist, daß sie eine endliche *abelsche* Gruppe vom Exponenten 2 ist. –Es bezeichne in der Regel γ_∞ einen in K_∞^L liegenden Repräsentanten einer Klasse in $\pi_0(L_\infty)$; ein solcher normalisiert also Produkte aus $K_\infty^{L,\circ}$ und Untergruppen des Zentrums, wie das nun zusammenzustellende K^L!

Es sei weiterhin $\mathsf{A} \subset Z_L(\mathbb{R})^\circ$ eine Untergruppe der reellen Zentrums, die als topologische Zusammenhangskomponente des Einselements, $A(\mathbb{R})^\circ$, in den $\mathbb{R}$-wertigen Punkten eines $\mathbb{R}$-Untertorus $A/_{\mathbb{R}} \subset Z_L \times \mathbb{R}$ entsteht, wobei $S_L \times \mathbb{R} \subset A$ gefordert wird; wird A sogar innerhalb A_L gewählt, so ist A diffeo-homomorph zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum. Hiermit sei $\mathsf{K} = \mathsf{K}^L := K_\infty^{L,\circ}{\cdot}\mathsf{A} \subset L_\infty^\circ$ und $X = X^L$ der Quotient L_∞/K^L. Dieser Raum X^L ist nun eine (automatisch reell-analytische) Mannigfaltigkeit mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten, die durch $\pi_0(L_\infty)$ „parametrisiert“ sind; jede der Zusammenhangskomponenten ist ein Produkt aus dem RIEMANNschen symmetrischen Raum $L^{(1)}(\mathbb{R})/\big(\mathsf{K}^L \cap L^{(1)}(\mathbb{R})\big)$ und einen euklidischen Vektorraum (endlicher Dimension)ist, wobei letzterer von Komplementärtori zu A in $A_L(\mathbb{R})$ herkommt.

–Nun wird eine Klasse von offen-kompakten Untergruppen „K_f^L“ in $L(\mathbb{A}_f)$ ausgewählt: zunächst sei $K_f^0 \subset L(\mathbb{A}_f)$ eine maximalkompakte Untergruppe, die *faktorisierbar* ist, d.h. es gelte

$$K_f^0 = \prod_{p \in \mathbb{V}_{\mathbb{Q},f}} K_p^0$$

für gewisse Untergruppen $K_p^0 \subset L(\mathbb{Q}_p)$, die für jedes p maximalkompakt in der jeweiligen p-adischen LIE-Gruppe $L(\mathbb{Q}_p)$ sind. (In den Beispielen, in denen eine natürliche lineare Realisierung $L \subset GL_N/_{\mathbb{Q}}$ vorliegt, nehme man eine Matrixgruppe mit ganzzahligen Koeffizienten $\mathcal{L}/_{\mathbb{Z}} \subset GL_N/_{\mathbb{Z}}$, deren generische Faser $\mathcal{L} \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ gerade L ist und die an „möglichst vielen“ Primstellen p ein *glattes reduktives* Gruppenschema $\mathcal{L} \times \mathbb{Z}_p$ liefert –auch diese Wahl wird meist auf der Hand liegen–, dann ist $\mathcal{L}(\hat{\mathbb{Z}}) = \prod_{p \in \mathbb{V}_{\mathbb{Q},f}} \mathcal{L}(\mathbb{Z}_p) =: K_f^{0,L}$ eine maximalkompakte Untergruppe wie erwünscht.)

Im folgenden mit K_f oder K_f^L bezeichnet werden nun offen-kompakte Untergruppen von $L(\mathbb{A}_f)$, die faktorisierbar sind[20] und die zum fixierten $K_f^{0,L}$ *kommensurabel* sind (d.h.: der Schnitt $K_f^{0,L} \cap K_f$ hat in beiden Schnittpartnern jeweils endlichen Index); zwangsläufig ist dann für fast alle p die Komponente K_p maximalkompakt im jeweiligen $L(\mathbb{Q}_p)$.

Im Falle, daß $L = \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^F(L_0/_F)$ als Skalarrestriktion einer über einem Zahlkörper F definierten Gruppe $L_0/_F$ entsteht, steht noch ein feinerer Faktorisierbarkeitsbegriff zur Verfügung: es ist ja $L(\mathbb{A}) = L_0(\mathbb{A}_F) = \prod'_{v \in \mathbb{V}_F} L_0(F_v)$, und man verfügt dann über offen-kompakte Untergruppen der Form $K_f^L = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{V}_{F,f}} K_{\mathfrak{p}}^{L_0}$, $K_{\mathfrak{p}}^{L_0} \subset L_0(F_{\mathfrak{p}})$ offen-kompakt (und

[20] Der Verf. erfuhr von J. HEINLOTH die folgende Konstruktion von *nicht* faktorisierbaren offen-kompakten Untergruppen: für eine Indexmenge I sei $(K_i)_{i \in I}$ eine Familie von kompakten Gruppen, und es gebe eine endliche Teilmenge $J \subset I$ und eine (kompakte, z.B. endliche) Gruppe G, so daß für jedes $j \in J$ ein surjektiver Homomorphismus $K_j \stackrel{\pi_j}{\twoheadrightarrow} G$ existiert; sei $\{1\} \subsetneq U \subsetneq G$ eine echte Untergruppe von endlichem Index. In der nach TYCHONOV kompakten Gruppe $\underline{K} := \prod_{i \in I} K_i$ sei $\underline{K}'$ die Untergruppe aller $(\ldots, k_i, \ldots)_{i \in I}$, so daß für jedes $j \in J$ gilt $\pi_j(k_j) \in U$; offenbar ist $\underline{K}'$ von endlichem Index in $\underline{K}$, aber *nicht* faktorisierbar, wenn J mindestens zwei Elemente hat! –Im Kontext adelischer Gruppen ist eine solche Konstruktion z.B. dann möglich, wenn zwei Stellen $v_1 \neq v_2$ eines globalen Körpers K denselben endlichen Körper $\mathbb{F}$ als Restklassenkörper haben und somit die lokal maximalkompakten Gruppen $L(\mathcal{O}_{F_{v_i}})$ (für $i = 1, 2$) sich beide auf die endliche Gruppe $G := L(\mathbb{F})$ abbilden, dann z.B. U = Parabolische in G . . . .

maximalkompakt für fast alle $\mathfrak{p}$). Im Zweifelsfalle wird in dieser Arbeit mit diesem feineren Faktorisierbarkeitsbegriff gearbeitet.

6.3 Adelisch-lokalsymmetrische Räume

Zu gegebenem reduktivem $L/_{\mathbb{Q}}$ seien Untergruppen $\mathsf{K}^L \subset L_\infty^\circ$ (maximalkompakt–zusammenhängend bis auf zentralen Torus) und $K_f^L \subset L(\mathbb{A}_f)$ (offen-kompakt, fein faktorisierbar und kommensurabel zur Standard-Maximalkompakten $K_f^{L,0} = \mathcal{L}(\hat{\mathbb{Z}})$) gewählt; dann setze man $\underline{K}^L := \mathsf{K}^L \cdot K_f^L$ und

$$\begin{aligned} X^L_{\underline{K}^L} &:= L(\mathbb{A})/\underline{K}^L \\ &= \big(L_\infty/\mathsf{K}^L\big) \times \big(L(\mathbb{A}_f)/K_f^L\big). \end{aligned}$$

Der *archimedische* Faktor dieses Produktraumes ist also –bis auf Zusammenhangskomponenten und differentialgeometrisch flache Tori– eine RIEMANNsch-symmetrische Mannigfaltigkeit, der *endlich-adelische* Faktor ist eine abzählbare diskrete Menge. –Auf diesem Raum $X^L_{\underline{K}^L}$ operiert nun die in $L(\mathbb{A})$ *diskrete* Gruppe $L(\mathbb{Q})$, und diese Operation ist eigentlich-diskontinuierlich. Der Quotientenraum

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^L_{K_f^L} &:= L(\mathbb{Q})\big\backslash X^L_{\underline{K}^L} \\ &= L(\mathbb{Q})\big\backslash L(\mathbb{A})\big/\mathsf{K}^L K_f^L \end{aligned}$$

wird im folgenden als *adelischer Doppelquotient zum Niveau* K_f^L bezeichnet; seine Struktur soll kurz geschildert werden.

Es sind ja Tori –wie C_L– insbesondere reduktiv, so daß der Ausdruck $\mathcal{S}^{C_L}_{K_f^{C_L}}$ (nach erfolgter Niveau-Wahl) einen guten Sinn hat. Die Projektion $L \twoheadrightarrow C_L$ induziert eine Surjektion $\mathcal{S}^L_{K_f^L} \twoheadrightarrow \mathcal{S}^{C_L}_{K_f^{C_L}}$, die sich sogar als eine *Faserung* herausstellt, wenn als niveaudefinierende Untergruppen $\underline{K}^{C_L}$ bzw. $K_f^{C_L}$ für C_L die Bilder von $\underline{K}^L$ bzw. K_f^L benutzt werden.

Die Menge der Zusammenhangskomponenten des adelischen Doppelquotienten zu einem Torus ist ja nun der Quotient nach der Zusammenhangskomponente der (Restklasse der) 1, und ein derartiger Quotient „ist“ eine verallgemeinerte (evtl. „engere“) Idealklassengruppe, also eine *endliche* abelsche Gruppe (zum jeweils benutzten Niveau), cf. 1.1!

Wird nun zusätzlich vorausgesetzt, daß die Gruppe $L^{(1)}/_{\mathbb{Q}}$ *einfach zusammenhängend* ist, so sind die Gruppe $L^{(1)}(\mathbb{R})$ und damit auch die Fasern der o.g. Faserung *zusammenhängend*, und die Mengen der Zusammenhangskomponenten des Doppelquotienten $\mathcal{S}^L_{K_f^L}$ zu L und des Doppelquotienten $\mathcal{S}^{C_L}_{K_f^{C_L}}$ zum Cozentrum C_L von L (mit den wie oben passenden Niveaus) stimmen überein!

Es seien dann $\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_N$ Urbilder in $L(\mathbb{A})$ der endlich vielen Klassen in der Idealklassengruppe $\pi_0(\mathcal{S}^{C_L}_{K_f^{C_L}}) =: \mathcal{C}\!\ell_{C_L}(K_f^{C_L})$; sie können so gewählt werden, daß ihre Anteile an der unendlichen Stelle im Normalisator von K_∞° liegen. Der Stabilisator in $L(\mathbb{Q})$ der Komponente zu $\underline{g}_j$ ist dann $\Gamma_j^L := L(\mathbb{Q}) \cap L_\infty^\circ \cap g_{j,f} K_f^L g_{j,f}^{-1}$, eine arithmetische Untergruppe (vom Kongruenztyp) in $L(\mathbb{Q})^+$, und die entsprechende Zusammenhangskomponente von

$\mathcal{S}^L_{K^L_f}$ ist $\Gamma^L_j\big\backslash\big(g_{j,\infty}\cdot L^\circ_\infty/K^{L,\circ}_\infty\big)$, ein (klassischer) lokalsymmetrischer Raum, der nach Resultaten von Borel und Harish-Chandra endliches Volumen hat (ebenso wie ganz $\mathcal{S}^L_{K^L_f}$, natürlich). Nach dem Godement-Kriterium der Reduktionstheorie ist (eine der endlich vielen Komponenten bzw.) der adelisch-lokalsymmetrische Raum $\mathcal{S}^L_{K^L_f}$ *kompakt* genau dann, wenn die derivierte Gruppe $L^{(1)}$ $\mathbb{Q}$-anisotrop ist –anders gesagt: wenn der maximale $\mathbb{Q}$-spaltende *zentrale* Torus S_L schon ein maximaler $\mathbb{Q}$-spaltender Torus für ganz L ist. –Wird die Niveau-Untergruppe K^L_f klein genug gewählt (im Sinne gewisser Kongruenz-Bedingungen, siehe das „Lemma von Selberg“), so kann erreicht werden, daß die arithmetischen Gruppen Γ^L_j sämtlich „neat“ sind; insbesondere liegen dann die Stabilisatoren von Punkten in $X^L_{K^L_f}$ alle in den Zentren der „zuständigen“ Γ^L_j, und damit sind die lokalsymmetrischen Räume (nicht nur globale orbifolds, sondern) sogar Mannigfaltigkeiten![21]

Es sei $\gamma_\infty \in K^L_\infty$ Repräsentant einer Zusammenhangskomponente und $g_f \in L(\mathbb{A}_f)$; sei $\underline{g} := (\gamma_\infty, g_f) \in L(\mathbb{A})$. Sind offen-kompakte Untergruppen $K_f, K^1_f \subset L(\mathbb{A}_f)$ gegeben (kommensurabel zu $\mathcal{L}$), so daß gilt

$$K^1_f \cdot g_f \subset g_f \cdot K_f,$$

so induziert die Rechtsmultiplikation mit $\underline{g}$ auf $L(\mathbb{A})$ eine wohldefinierte Abbildung der Doppelquotienten

$$r_{\underline{g}} : \mathcal{S}^L_{K^1_f} \to \mathcal{S}^L_{K_f}, [\underline{x}] \mapsto [\underline{x}\cdot\underline{g}] \text{ (!)}.$$

Für $\underline{g} = 1$ und $K^1_f \subset K_f$ erhält man so endlichblättrige (evtl. verzweigte) Überlagerungen (die natürlichen Projektionen) $\mathcal{S}^L_{K^1_f} \to \mathcal{S}^L_{K_f}$, die für Systeme $K^2_f \subset K^1_f \subset K_f$ offensichtliche Verträglichkeiten erfüllen. Man kann daher den projektiven Limes dieser Räume bzgl. K_f in einem Umgebungssystem der $\mathbb{1}_L$ bilden, $\mathcal{S}^L := \varprojlim_{K_f} \mathcal{S}^L_{K_f}$; es stellt sich heraus, daß dieser Raum zum Doppelquotienten $L(\mathbb{Q})\big\backslash L(\mathbb{A})/\mathsf{K}^L$ in natürlicher Weise homöomorph ist, cf. [Ro96, Prop. 1.9].

Das System der $r_{\underline{g}}$ wie oben zu verschiedenen Niveaus ergibt nun eine Selbstabbildung von $\mathcal{S}^L$, die offensichtlich mit der Rechtsmultiplikation mit $\underline{g}$ auf $L(\mathbb{Q})\big\backslash L(\mathbb{A})/\mathsf{K}^L$ übereinstimmt: man hat somit auf dem Limes-Raum eine Operation von $\underline{L} := \pi_0(L_\infty)\times L(\mathbb{A}_f)$ von rechts, und es gilt $\mathcal{S}^L_{K_f} = \mathcal{S}^L/K_f$ für K_f offen-kompakt wie gehabt.

6.4 Garben zu rationalen Darstellungen und ihre Kohomologie; Operation der adelischen Hecke-Algebra

Eine irreduzible endlichdimensionale Darstellung $\rho_M : L\times_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_{\overline{\mathbb{Q}}}(M)$ der reduktiven Gruppe $L/_{\mathbb{Q}}\times_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}}$ ist isomorph zur Höchstgewichtsdarstellung zu einem ganzen dominanten Gewicht $\lambda\in X^*(T_L)$ (wobei T_L ein maximaler Torus in L ist), d.h. $M\cong\mathcal{M}_L(\lambda)$. Zu einer solchen „rationalen“ Darstellung M hat man auf jedem adelischen Doppelquotienten $\mathcal{S}^L_{K_f}$ eine Garbe von $\overline{\mathbb{Q}}$- (oder $\mathbb{C}$-)Vektorräumen $\widetilde{M}$, deren Raum der Schnitte auf einer offenen Menge $U\subset\mathcal{S}^L_{K_f}$ durch

$$\widetilde{M}(U) = \{f : \pi^{-1}_{K_f}(U)\to M \text{ lokal konstant} \mid \forall\gamma\in L(\mathbb{Q}) : \ f(\gamma u) = \rho_M(\gamma)\cdot f(u)\}$$

[21] Genaueres zur Gruppe der Zusammenhangskomponenten: cf. [DeVS, §2.1]) und [Ha03, 1.2.6].

gegeben ist, wobei $\pi_{K_f} : L(\mathbb{A})/\mathsf{K}^L K_f \to \mathcal{S}^L_{K_f}$ die Quotientenprojektion ist. Diese Garben sind sogar *lokale Koeffizientensysteme*, d.h. assoziiert zu Darstellungen der Fundamentalgruppen der Zusammenhangskomponenten, cf. [Ha06?, IV.3.3.2; IV.8.1].

Zu einer gegebenen Niveau-Untergruppe $K_f = K_f^L$ und einem $\underline{g} = (\gamma_\infty, g_f) \in \pi_0(L_\infty) \times L(\mathbb{A}_f)$ setze man $K_f[g_f] := K_f \cap g_f \cdot K_f \cdot g_f^{-1}$ (eine zu K_f kommensurable Gruppe). Man hat dann das Paar von endlichen Überlagerungsabbildungen $(\rho_{\mathbb{1}}, \rho_{\underline{g}})$ von $\mathcal{S}^L_{K_f[g_f]}$ nach $\mathcal{S}^L_{K_f}$, das man als HECKE-*Korrespondenz zu* $\underline{g}$ *auf* $\mathcal{S}^L_{K_f}$ bezeichnet. Eine solche Korrespondenz induziert Endomorphismen $T_{\underline{g}}$ der eben eingeführten Kohomologiegruppen, die offenbar „in der Variablen g_f“ nur von der Doppelnebenklasse $K_f \cdot g_f \cdot K_f$ abhängen; insgesamt operiert die *adelische* HECKE-*Algebra von L zum Niveau K_f*,

$$\mathcal{H}^L_{K_f} := \mathbb{C}[\pi_0(L_\infty)] \otimes \mathsf{C}^\infty_{c \bmod Z}(L(\mathbb{A}_f)//K_f),$$

auf allen Kohomologiegruppen $H^*\big(\mathcal{S}^L_{K_f}, \widetilde{\mathcal{M}_L(\lambda)}\big)$.

Die Darstellung M definiert (mit „derselben“ Definition) auch eine Garbe (ebenfalls $\widetilde{M}$ genannt) auf dem Limes-Raum $\mathcal{S}^L$; man hat $H^*\big(\mathcal{S}^L, \widetilde{\mathcal{M}_L(\lambda)}\big) = \varinjlim_{K_f} H^*\big(\mathcal{S}^L_{K_f}, \widetilde{\mathcal{M}_L(\lambda)}\big)$, auf diesen Limes-Kohomologiegruppen operiert die Gruppe $\underline{L} = \pi_0(L_\infty) \times L(\mathbb{A}_f)$ (die man auch als Gruppe der Zusammenhangskomponenten der adelewertigen Gruppe, $\pi_0\big(L(\mathbb{A}_F)\big)$, auffassen kann), und die endlichen Niveaus erhält man als Fixpunktmengen der entsprechenden offen-kompakten Untergruppe wieder: $H^*\big(\mathcal{S}^L_{K_f}, \widetilde{\mathcal{M}_L(\lambda)}\big) = \Big(H^*\big(\mathcal{S}^L, \widetilde{\mathcal{M}_L(\lambda)}\big)\Big)^{K_f}$, cf. wiederum [Ro96].

Die Kohomologieräume $H^*\big(\mathcal{S}^L_{K^L_f}, \widetilde{\mathcal{M}_L(\lambda)}\big)$ sind bekanntlich endlichdimensional; sie hängen eng mit der Gruppenkohomologie mit $\mathcal{M}_L(\lambda)$-Koeffizienten der arithmetischen Gruppen Γ^L_j zusammen, vgl. [Ha88, Kap. 3]. Hier interessanter ist die nach Tensorieren mit $\mathbb{C}$ mögliche Interpretation als Kohomologie des DE RHAM-Komplexes zu den $\mathcal{M}_L(\lambda)(\otimes\mathbb{C})$-wertigen Differentialformen und dann (mittels des Isomorphismus „von MATSUSHIMA–MURAKAMI“, cf. [Ha88, 3.7.8.12]) als die $\big(\mathfrak{l}_\mathbb{C}, \mathsf{K}^L; L(\mathbb{A}_f)\big)$-Kohomologiegruppen des Moduls $\mathsf{C}^\infty\big(L(\mathbb{Q})\backslash L(\mathbb{A})\big) \otimes \mathcal{M}_L(\lambda)_\mathbb{C}$! (Nach Sätzen von BOREL bzw. FRANKE kann hierbei der Raum der C^∞-Funktionen auf der Gruppe zunächst durch den der gleichmäßig moderat wachsenden glatten Funktionen und schließlich sogar durch den Raum der *automorphen Formen* $\mathcal{A}(L)$ auf L ersetzt werden.) Nach Arbeiten von VOGAN–ZUCKERMAN und anderen sind die (endlich vielen!) irreduziblen HARISH-CHANDRA–Moduln $\mathcal{N}$ „bekannt“ (d.h. algorithmisch bestimmbar), für die $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}(\lambda)$ nichttriviale $(\mathfrak{l}_\mathbb{C}, \mathsf{K}^L)$-Kohomologie hat, so daß die Bestimmung der Kohomologiegruppen $H^*\big(\mathcal{S}^L_{K^L_f}, \widetilde{\mathcal{M}_L(\lambda)_\mathbb{C}}\big)$ also auf die Bestimmung der Verkettungsoperatoren $\mathcal{N} \to \mathcal{A}(L)^{K^L_f}$ bzw. $\mathcal{N} \to \mathsf{C}^\infty\big(L(\mathbb{Q})\backslash L(\mathbb{A})\big)^{K^L_f}$ von HARISH-CHANDRA–Moduln zurückgeführt ist.

Es gibt nun nur endlich viele automorphe Darstellungen $\underline{\pi} \subset \mathcal{A}(L)$ von L, so daß deren archimedische Komponente π_∞ (d.h. der zugehörige $(\mathfrak{l}_\mathbb{C}, \mathsf{K}^L)$-HARISH-CHANDRA–Modul) einem der oben genannten $\mathcal{N}$ isomorph ist, und jedes dieser $\underline{\pi}$ hat (wie jede automorphe Darstellung) in $\mathcal{A}(L)$ eine endliche Vielfachheit $m_{\underline{\pi}}$. Hat eine solche Darstellung die eingeschränkte-Tensorprodukt-Zerlegung $\underline{\pi} \cong \widehat{\bigoplus}_{v \in \mathbb{V}_\mathbb{Q}} \pi_v$ (oder, falls $L = \mathrm{Res}^F_\mathbb{Q}(L_0/F)$,

$\underline{\pi} \cong \widehat{\bigoplus}_{\mathfrak{v}\in\mathbb{V}_F}\pi_{\mathfrak{v}})$ und ist π_∞ einem der obigen $\mathcal{N}$ isomorph, so ist

$$H^*\big(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}, \mathsf{K}^L; \underline{\pi} \otimes \mathcal{M}_L(\lambda)_{\mathbb{C}}\big) \cong H^*\big(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}, \mathsf{K}^L; \pi_\infty \otimes \mathcal{M}_L(\lambda)_{\mathbb{C}}\big) \otimes \pi_f$$

als $\underline{L}$-Modul. –Für eine derartige automorphe Darstellung $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ von L, deren archimedische Komponente π_∞ „$\cong \mathcal{N}$“ nichttriviale $(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}, \mathsf{K}^L)$-Kohomologie mit $\mathcal{M}_L(\lambda)_{\mathbb{C}}$-Koeffizienten hat, gibt es also einen direkten Summanden

$$\Big(H^*\big(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}, \mathsf{K}^L; \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}_L(\lambda)_{\mathbb{C}}\big) \otimes \pi_f\Big)^{m_{\underline{\pi}}}$$

in $H^*\big(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}, \mathsf{K}^L; \mathcal{A}(L) \otimes \mathcal{M}_L(\lambda)_{\mathbb{C}}\big)$ (wenn $m_\pi \in \mathbb{N}_+$ wie oben ihre Vielfachheit in $\mathcal{A}(L)$ bezeichnet, d.h. der Raum der Homomorphismen von π in den *diskreten* Anteil von $\mathcal{A}(L)$ ist m_π-dimensional); insgesamt gibt es damit eine natürliche Abbildung von

$$\bigoplus_{\mathcal{N}} \bigoplus_{\substack{\underline{\pi}\subset\mathcal{A}(L)_{\mathrm{diskret}}:\\ \pi_\infty\cong\mathcal{N}}} \Big(H^*\big(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}, \mathsf{K}^L; \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}_L(\lambda)_{\mathbb{C}}\big) \otimes \pi_f\Big)^{m_{\underline{\pi}}}$$

in die Limes-Kohomologie $H^*\big(\mathcal{S}^L, \mathcal{M}_L(\lambda)_{\mathbb{C}}\big)$, und ebenso für eine Niveau-Untergruppe K_f^L eine Abbildung von $\bigoplus_{\mathcal{N}} \bigoplus_{\underline{\pi}} \Big(H^*\big(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}, \mathsf{K}^L; \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}_L(\lambda)_{\mathbb{C}}\big) \otimes (\pi_f)^{K_f^L}\Big)^{\dim \mathrm{Hom}\left(\underline{\pi},\, \mathcal{A}(L)^{K_f^L}_{\mathrm{diskret}}\right)}$ in die Kohomologie zu diesem Niveau $H^*\big(\mathcal{S}^L, \mathcal{M}_L(\lambda)_{\mathbb{C}}\big)$; die *Injektivität* dieser Abbildungen muß allerdings für jeden Einzelfall (für jedes $\mathcal{N}$) gesondert untersucht werden.

Man beachte, daß für $L = \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}(GL_n/_F)$ mit beliebigem Zahlkörper F und $n \geq 2$ nach einem Theorem von Jacquet–Shalika alle Vielfachheiten $m_{\underline{\pi}} = 1$ sind!

–Die *nullte* Kohomologiegruppe einer Garbe $\widetilde{M}$, also die Menge ihrer globalen Schnitte auf ganz $\mathcal{S}^L_{K_f}$, kann naturgemäß einigermaßen explizit bestimmt werden: es handelt sich „zusammenhangskomponentenweise“ um die Invarianten des Moduls M unter den arithmetischen Gruppen Γ^L_j. –Präziser: Zu $M = \mathcal{M}_L(\lambda)$ (irreduzibel, OBdA) sei $N := M^{L^{(1)}}$ der Raum der Semi-Invarianten, dies ist also eine irreduzible Darstellung des Cozentrums $L/L^{(1)} = C_L$, d.h. ein algebraischer Charakter $\gamma_M \in X^*(C_L)$ (eventuell trivial!): es ist $N \mathrel{\widehat{=}} \overline{\mathbb{Q}} \cdot \gamma_M$, und man hat

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{S}^L_{K_f^L}, \widetilde{M}_{\overline{\mathbb{Q}}}) &= H^0(\mathcal{S}^{C_L}_{K_f^{C_L}}, \widetilde{N}_{\overline{\mathbb{Q}}}) \\ &= \bigoplus_{\substack{\chi\in\mathrm{aHC}_{C_L}(\gamma_M):\\ \chi|_{K_f^{C_L}}\equiv\mathbf{1}}} \overline{\mathbb{Q}} \cdot \chi, \end{aligned}$$

die Summation erstreckt sich über diejenigen algebraischen Hecke-Charaktere des Torus C_L vom ∞-Typ γ_M (cf. Abschnitt 1.3), die auf der Niveau-Untergruppe $K_f^{C_L}$ (:= Bild von K_f^L) trivial sind. (Siehe hierfür [Ha03, 1.2.6.]; die *gesamte* Kohomologie von adelischen Doppelquotienten zu Tori bzw. Paaren von Tori ist in [Ha87, 2.5] in Termen von H^0 und den „relativen Einheitengruppen“ vollständig bestimmt worden.)

6.5 Randstrata der Borel–Serre-Kompaktifizierung und ihre Kohomologie

Es sei nun $L/_{\mathbb{Q}}$ vorsichtshalber als quasispaltend vorausgesetzt, $B_L \subset L$ sei eine $\mathbb{Q}$-Borel-Untergruppe, die den vorn gewählten maximalen Torus T_L enthält, und $\Phi \supset$

$\Phi^+ \supset \Delta = \Delta(B_L, T_L^s)$ seien das $\mathbb{Q}$-relative Wurzelsystem, die B_L-positiven Wurzeln und die Basis der einfachen positiven Wurzeln.

Es sei $R \subset L$ eine $\mathbb{Q}$-Standard-Parabolische, und zwar $R = R_\Xi$ für eine Teilmenge $\Xi \subset \Delta$, vgl. Abschnitt 2.1. Das heißt: zerlegt man $R = M_R \ltimes U_R$ in Standard-Levi- und unipotente Untergruppe und weiter die Untergruppe $M_R = Z_R \cdot M_R^{(1)}$ in ein fastdirektes Produkt eines in M_R zentralen Torus Z_R [der konsequenterweise Z_{M_R} heißen müßte, da er eben *nicht* in ganz R zentral ist] und der halbeinfachen derivierten Gruppe $M_R^{(1)}$, so kann Z_R als $Z_L \cdot T_\Xi$ weiter zerlegt werden, mit dem Zentrum Z_L von L und dem $\mathbb{Q}$-Torus T_Ξ, der als Schnitt der Zusammenhangskomponenten der Kerne aller einfachen positiven Wurzeln in der Menge Ξ entsteht. –Die im unipotenten Radikal U_R auftretenden rationalen Wurzeln α von T_L sind dann gerade diejenigen, bei deren Darstellung $\alpha = \sum_{\beta\in\Delta} a_\beta \cdot \beta$ als Element des $\mathbb{N}_0$-Kegels über Δ für mindestens ein $\beta \notin \Xi$ gilt $a_\beta > 0$, so daß die Einschränkung von α auf T_Ξ nichttrivial ist.

Mit den vorn fixierten „im wesentlichen maximalkompakten" Gruppen $\mathsf{K}^L = K_\infty^{L,\circ} \cdot \mathsf{A} \subset L_\infty^\circ$ und $K_f^{L,0} \mathrel{\hat{=}} \mathcal{L}(\hat{\mathbb{Z}})$ setze man $\widetilde{K} := \mathsf{K}^L \cdot K_f^{L,0}$. Es besteht dann die Iwasawa-Zerlegung

$$L(\mathbb{A}) = R(\mathbb{A}) \cdot \widetilde{K},$$

also

$$\begin{aligned} X^L_{K_f^{L,0}} &:= L(\mathbb{A})/\widetilde{K} \\ &\stackrel{!}{=} R(\mathbb{A})/\big(\widetilde{K} \cap R(\mathbb{A})\big) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} L(\mathbb{A})/\mathsf{K}^L &= R(\mathbb{A})/\big(\mathsf{K}^L \cap R(\mathbb{R})\big) \\ &= \big(R_\infty/R_\infty \cap \mathsf{K}^L\big) \times R(\mathbb{A}_f). \end{aligned}$$

Die unipotente Gruppe $U_R(\mathbb{R})$ hat (als iterierte Erweiterung von euklidischen Vektorräumen) keine kompakten und keine Torus-Untergruppen, also gilt

$$R_\infty \cap \mathsf{K}^L \stackrel{!}{=} M_R(\mathbb{R}) \cap \mathsf{K}^L = \underbrace{\big(Z_R(\mathbb{R}) \cap \mathsf{A}\big) \cdot \big(M_R^{(1)}(\mathbb{R}) \cap K_\infty^{L,\circ}\big)}_{=:\mathsf{A}_R \cdot K_\infty^{M_R}}.$$

Der „symmetrische Raum" L_∞/K^L kann daher auch als ein (lokaltriviales) *Faserbündel* mit Faser $U_R(\mathbb{R})$ und mit Basis $\big(M_R^{(1)}/K_\infty^{M_R}\big) \cdot \big(Z_R(\mathbb{R})/\mathsf{A}_R\big)$ aufgefaßt werden! Diesen Basisraum kann man sich weiter aufschlüsseln in den halbeinfachen symmetrischen Raum $M_R^{(1)}/K_\infty^{M_R}$ (bis auf Zusammenhangskomponenten) und den Faktor $Z_R(\mathbb{R})/\mathsf{A}_R = T_\Xi(\mathbb{R}) \cdot \big(Z_L(\mathbb{R})/\mathsf{A}_R\big)$; in letzterem wiederum ist (nach der Wahl von $\mathsf{A} \supset S_L(\mathbb{R})^\circ$) der Anteil $Z_L(\mathbb{R})/\mathsf{A}_R$ ein Faktor, der modulo *jeder* arithmetischem Untergruppe kompakt ist, dagegen liefern die Wurzeln in $\Delta(B_L, T_L) \setminus \Xi$ Koordinaten für denjenigen Anteil von $T_\Xi(\mathbb{R})$, in dem jede arithmetische Untergruppe nur endlich viele Punkte haben kann –anders gesagt: der auch in arithmetischen Quotienten immer einen euklidischen Vektorraum der Dimension $\#(\Delta \setminus \Xi)$ als Beitrag liefert!

Es kann nun L_∞/K^L (bzw. sein adelisches Pendant $X^L_{K_f^{L,0}}$) als Prinzipalbündel für $T_\Xi(\mathbb{R})$ $\big($bzw. $T_\Xi(\mathbb{A})\big)$aufgefaßt werden: in der für die Basis „zuständigen" Gruppe M_R ist dieser

Torus sowieso zentral, und beim Verschieben am unipotenten Radikal U_R/an der Faser vorbei operiert er auf diesem gerade durch Verschieben mit dem Wert der genannten Wurzeln in $\Delta \setminus \Xi$ auf dessen Wurzelraum-Koordinaten; dies ist die "geodesic action" aus [BS73]!

Das Nachschalten der Idele-Norm an die $\mathbb{Q}$-rationalen Charaktere in $\Delta \setminus \Xi$ ergibt also eine Abbildung von $T_\Xi(\mathbb{A})$ nach $(\mathbb{R}^{>0})^{\Delta\setminus\Xi}$, die man auch als eine (ggf. vektorwertige) *Randdistanz*-Funktion auf dem „parabolisch-arithmetischen" Quotienten

$$R(\mathbb{Q})\backslash L(\mathbb{A})/\mathsf{K}^L K_f^L$$

auffassen kann (vgl. [Ha87, 2.1]); die diskrete Gruppe $R(\mathbb{Q})$ operiert nach dem Gesagten und der Produktformel Randdistanz-erhaltend!

Ein solcher parabolisch-arithmetischer Quotient „ist" also ein Hauptfaserbündel über dem zusammenziehbaren Raum $(\mathbb{R}^{>0})^{\Delta\setminus\Xi} \cong T_\Xi(\mathbb{R})^\circ$ (dem Werteraum der Randdistanz-Koordinaten) mit einer Faser, die selbst wieder als lokaltriviales Faserbündel angesehen werden kann, nämlich mit der kompakten Nilmannigfaltigkeit

$$U_R(\mathbb{Q})\backslash U_R(\mathbb{A})/\big(U_R(\mathbb{A}_f) \cap K_f^L\big) \cong \Gamma_{U_R,K_f^L}\backslash U_R(\mathbb{A})$$

als Faser [diese ist zusammenhängend, und die ausdividierte Gruppe $\Gamma_{U_R,K_f^L} := U_R(\mathbb{Q}) \cap K_f^L$ ist arithmetisch, d.h. kommensurabel zu $\Gamma_{U_R} = U_R(\mathbb{Q}) \cap \mathcal{L}(\mathbb{Z})$] und mit einer Basis von der Form $\mathcal{S}^{M_R^{(1)}}_{K_f^{M_R^{(1)}}}$ (für geeignete bestimmte Niveau-Untergruppe); die Bündelprojektion heiße originellerweise pr_R.

Dies letztgenannte Faserbündel, d.h. der Raum

$$R(\mathbb{Q})\backslash\Big(\big(R_\infty/(T_\Xi(\mathbb{R})^\circ \mathsf{A}_R \mathsf{K}^{M_R^{(1)}})\big) \times \big(R(\mathbb{A}_f)/(R(\mathbb{A}_f) \cap K_f^L)\big)\Big),$$

werde mit dem Namen ${}_R\mathcal{S}^L_{K_f^L}$ belegt. In seiner Realisierung als [genügend reguläre] Niveaumenge der Randdistanz-Abbildung tritt dieser Raum auch als die R-Randkomponente $\partial_R \mathcal{S}^L_{K_f^L}$ in der Borel–Serre-Kompaktifizierung von $\mathcal{S}^L_{K_f^L}$ auf! (Für die Beschreibung dieser Kompaktifizierung muß dann noch das Schnittverhalten/Zusammentreffen der Randkomponenten zu verschiedenen Standardparabolischen untersucht werden; dies ist außerordentlich subtil[22] und wird zum Glück in dieser Arbeit weiterhin *nicht* benötigt.)

Aus dieser Beschreibung der Randkomponente als Faserbündel folgt, daß die Garbenkohomologie $H^*({}_R\mathcal{S}^L_{K_f}, \widetilde{M})$ der Limes einer Spektralsequenz mit dem $E_2^{p,q}$-Term

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{S}^{M_R}_{K_f^{M_R}}, R^q(\mathrm{pr}_R)_* \widetilde{M})$$

ist; nun ist ja die hier eingehende Garbe gerade die Garbifizierung der faserweisen Komologie: $R^*(\mathrm{pr}_R)_* \widetilde{M} \cong H^*(\widetilde{\Gamma_{U_R,K_f}\backslash U_R(\mathbb{R})}, M)$. (Cf. [Ha06?, Thm. 4.4.7].)

[22] vgl. die Zucker–Schwermer–Franke–Kewenig–Rieband-Kontroverse zu Geisterklassen für $Sp_4/_\mathbb{Q}$; siehe [HZ01], dessen frühe preprint-versionen den Untertitel „the nightmare continues" trugen.

Für die Kohomologie der Faser andererseits weiß man

$$H^*\big(\Gamma_{U_R,K_f^L}\backslash U_R(\mathbb{R}),\widetilde{M}\big)\cong\underbrace{H^*(\Gamma_{U_R,K_f},M)}_{\text{Gruppenkohomologie !}}$$

–das ist „Kohomologie arithmetischer Gruppen" wie in [Ha88, Kap. III]–; nach dem VAN EST-Theorem [[GHM94, §24]] ist nun die Gruppenkohomologie unipotenter arithmetischer Gruppen gleich der Kohomologie der „umgebenden" LIE-Algebra:

$$H^*(\Gamma_{U_R,K_f},M)\cong H^*(\mathfrak{u}_R,M),$$

und hierdurch erhält man eine natürliche Struktur der Kohomologie der Faser als Darstellung von M_R! Diese M_R-Modul-Struktur der Kohomologie des unipotenten Radikals ist aber gemäß der KOSTANT-Zerlegung (Gleichung 23) bekannt: es ist $H^q(\mathfrak{u}_R,M)$ der halbeinfache, sogar multiplizitätenfreie) M_R-Modul $\bigoplus_{w\in W_L^R:\ell(w)=q}\mathcal{M}_{M_R}(w*\lambda)$, wenn M als Höchstgewichtsdarstellung $\mathcal{M}_L(\lambda)$ von L realisiert werden kann. Da die Differentiale der Spektralsequenz die M_R-Modulstruktur respektieren, folgt, daß die genannte Spektralsequenz auf den E_2-Termen degeneriert, man hat folglich

$$\begin{aligned}H^j\big({}_R\mathcal{S}^L_{K_f^L},\widetilde{\mathcal{M}_L(\lambda)}\big)&\cong\bigoplus_{p+q=j}H^p\Big(\mathcal{S}^{M_R}_{K_f^{M_R}},H^q\big(\widetilde{\mathfrak{u}_R,\mathcal{M}_L(\lambda)}\big)\Big)\\&=\bigoplus_{0\le p\le j}\ \bigoplus_{\substack{w\in W_L^R:\\ \ell(w)=j-p}}H^p\big(\mathcal{S}^{M_R}_{K_f^{M_R}},\widetilde{\mathcal{M}_{M_R}(w*\lambda)}\big).\end{aligned}$$

(Da der Rang von M_R ja nun echt kleiner ist als der von L, kann man diese Kohomologie der Randkomponenten als „nach Induktion über den Rang gut verstanden" ansehen ... .)

Nach den im vorigen Abschnitt erläuterten Prinzipien hat man auf $H^*({}_R\mathcal{S}^L_{K_f^L},\widetilde{M})$ eine Operation von $\pi_0\big(R(\mathbb{R})\big)\times\mathcal{H}\big(R(\mathbb{A}_f)//(R(\mathbb{A}_f)\cap K_f)\big)$ mittels HECKE-Korrespondenzen und damit auf dem direkten Limes $H^*({}_R\mathcal{S}^L,\widetilde{M})$ eine (stetige!) Operation der Gruppe $\underline{R}:=\pi_0\big(R(\mathbb{R})\big)\times R(\mathbb{A}_f)$. Da aber die Randkomponente $\partial_R\mathcal{S}^L_{K_f^L}$ als diskreter Links-Quotient von $L(\mathbb{A})/K_f^L$ (bis auf Kontraktion eines euklidischen Raumes) konstruiert wurde, operiert sogar $\pi_0(L_\infty)\times\mathcal{H}\big(L(\mathbb{A}_f)//K_f\big)$ auf deren Kohomologie, und die Gruppe $\underline{L}$ operiert auf den Limes-Kohomologiegruppen $H^*(\partial_R\mathcal{S}^L,\widetilde{M})$. Es ergibt sich die folgende Strukturaussage für die Kohomologie der Randkomponente zu einer Standardparabolischen $R\subset L$:

$$H^*(\partial_R\mathcal{S}^L,\widetilde{M})\cong\operatorname{Ind}_{\underline{R}}^{\underline{L}}\Big(H^*\big(\mathcal{S}^{M_R},H^*\widetilde{(\mathfrak{u}_R,M)}\big)\Big),$$

präziser also

$$H^j\big(\partial_R\mathcal{S}^L,\widetilde{\mathcal{M}_L(\lambda)}\big)\cong\bigoplus_{0\le p\le j}\ \bigoplus_{\substack{w\in W_L^R:\\ \ell(w)=j-p}}\operatorname{Ind}_{\underline{R}}^{\underline{L}}\Big(H^p\big(\mathcal{S}^{M_R},\widetilde{\mathcal{M}_{M_R}(w*\lambda)}\big)\Big),$$

siehe [Ha92, p.88].

6.6 Homologie und Poincaré-Paarung

Außer der bisher angesprochenen *Kohomologie* $H^*(\mathcal{S}^L_{K^L_f}, \widetilde{M})$ von Garben $\widetilde{M}$ zu Darstellungen $M = \mathcal{M}_L(\lambda)$ auf den adelischen Doppelquotienten einer reduktiven Grupe $L/_{\mathbb{Q}}$, die die Gruppenkohomologien $H^*(L(\mathbb{Q}) \cap K^L_f, M)$ „ausdehnt" (und entsprechende Funktorialitäten für Abbildungen $L \to_{/\mathbb{Q}} L'$ der zugrundeliegenden Gruppen hat, bei passenden Niveaus), kann man auch *Kohomologiegruppen mit kompakten Trägern* mit Werten in derartigen Garben, $H^*_c(\mathcal{S}^L_{K^L_f}, \widetilde{M})$ definieren; siehe [Ha88, Kap. E.1] und [Ha06?, Ⅳ.8.3.4], dort im allgemeinen Kontext lokaler Koeffizientensysteme auf Mannigfaltigkeiten. –Dies geschieht entweder als Kohomologie des Komplexes der (glatten) M-wertigen Differentialformen mit kompakten Trägern oder als Kohomologie der Garbe $i_!(\widetilde{M})$, wobei i eine Einbettung des betrachteten Raumes in eine Kompaktifizierung mit guten Eigenschaften ist; die schon genannte Borel–Serre-Kompaktifizierung der Räume $\mathcal{S}^L_{K^L_f}$ ist hier „qualifiziert"!

Ist X eine *zusammenhängende* Mannigfaltigkeit mit hinreichend freundlicher Geometrie und mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(X) = \Gamma$, so erweist sich die Höchstgrad-Kohomologie-mit-kompaktem-Träger eines lokalen Systems $\widetilde{V}$ zu einer Darstellung V von Γ als der Modul der Co-Invarianten/die nullte V-wertige Gruppenhomologie von Γ; insbesondere gilt $H^{\dim X}_c(X, \underline{\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}$, wobei der Isomorphismus der Wahl einer Orientierung von X entspricht; analog für andere Ringe mit trivialer Γ-Operation als Koeffizienten. –Es läßt sich hieraus folgern, daß $H^{\dim - *}_c(\bullet, \widetilde{M})$ in demselben Sinne die Gruppen*homologie* „fortsetzt", wie $H^*(\bullet, \widetilde{M})$ die Gruppenkohomologie im nichtzusammenhängenden Kontext fortsetzt, siehe oben.

Man verfügt ferner über eine *singuläre* (oder auch simpliziale) *Homologie* $H_*(X, \underset{\sim}{V})$ von X mit Werten in Co-Garben $\underset{\sim}{V}$, die lokalen Systemen $\widetilde{V}$ bzw. ihren Γ-Darstellungen zugeordnet sind, vgl. [Ha88, Kap. E.2] und [Ha06?, Ⅳ.8.4.1]. Diese erfüllt dann

$$H_q(X, \underset{\sim}{V}) \cong H^{\dim X - q}_c(X, \widetilde{V})!$$

(Derselbe Funktor kann auch als Borel–Moore-Homologie eingeführt werden.) Als Homologietheorie ist diese zunächst „in den Räumen" covariant, aber bezüglich *eigentlicher* Abbildungen ist sie (nach Konstruktion!) auch contravariant; für die hier interessierenden Räume $\mathcal{S}^L_{K^L_f}$ und das System der endlichen Überlagerungen zwischen ihnen kann also auch eine Limes-Kohomologie-mit-kompaktem Träger $H^*_c(\mathcal{S}^L, \widetilde{M})$ gebildet werden.

–Der tiefere Sinn dieser homologischen Funktoren besteht nun darin, den Garbenkohomologiegruppen $H^*(\mathcal{S}^L_{K^L_f}, \widetilde{M})$ als Partner in einer Poincare-Dualität zur Verfügung zu stehen: man hat eine natürliche Paarung

$$H^*(\mathcal{S}^L_{K^L_f}, \widetilde{M}) \times H^{d-*}_c(\mathcal{S}^L_{K^L_f}, \widetilde{M^\vee}) \to H^d_c(\mathcal{S}^L_{K^L_f}, \widetilde{M \otimes M^\vee}) \xrightarrow{\mathrm{tr}} H^d_c(\mathcal{S}^L_{K^L_f}, \widetilde{\overline{\mathbb{Q}}}) \cong \overline{\mathbb{Q}},$$

unter der dann die Kohomologie der Darstellung M und die kompakt getragene Kohomologie der contragredienten Darstellung $M^\vee$ im komplementären Grade in Dualität stehen! (Hier bezeichnet d die Dimension der Mannigfaltigkeit [oder orbifold] $\mathcal{S}^L_{K^L_f}$, und tr ist die

Spurpaarung $M \otimes M^\vee \cong \mathrm{End}(M) \xrightarrow{\mathrm{tr}} \overline{\mathbb{Q}}$ bzw. die hiervon auf der Kohomologie induzierte Abbildung.) Nach Tensorieren der Koeffizientensysteme mit $\mathbb{C}$ (so daß die Kohomologie aus den DE RHAM-Komplexen berechnet werden kann) ist diese (nun $\mathbb{C}$-wertige) Paarung gerade das $\cup$-Produkt, d.h. sie entsteht aus dem äußeren Produkt der Differentialformen, die die respektiven Kohomologieklassen repräsentieren; da (mindestens) eine von ihnen mit kompaktem Träger gewählt werden kann, ist die entstehende Höchstgrad-Form ebenfalls kompakt getragen und kann somit über den gesamten Raum $\mathcal{S}^L_{K^L_f}$ integriert werden. Mittels geeigneter Normalisierungen der Volumina kann die Paarung so skaliert werden, daß sie vom gewählten Niveau K^L_f unabhängig ist, so daß man auch eine Dualität der entsprechenden Limes-Kohomologien erhält, siehe [Ha87, 5.3.5].

Ist die Gruppe L/S_L *anisotrop* über $\mathbb{Q}$, d.h. sind ihre adelischen Doppelquotienten $\mathcal{S}^L_{K^L_f}$ kompakt, so gibt es natürlich keinen Unterschied zwischen H^* und H^*_c (außer, daß dies der Kohomologie eine zusätzliche „homologische“ Funktorialität gibt!). Man hat also in diesem kompakten Falle (mit $d := \dim \mathcal{S}^L_{K^L_f}$):

$$H^j(\mathcal{S}^L_{K^L_f}, \widetilde{M}) \cong H^{d-j}_{(c)}(\mathcal{S}^L_{K^L_f}, \widetilde{M^\vee})^\vee$$

für alle $0 \leq j \leq d$ und alle Darstellungen $L \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}} \to GL_{\overline{\mathbb{Q}}}(M)$, insbesondere

$$H^0(\mathcal{S}^L_{K^L_f}, \widetilde{M^\vee}) \cong H^d(\mathcal{S}^L_{K^L_f}, \widetilde{M})^\vee.$$

Man kann prüfen, daß die HECKE-Operatoren (d.h. die Operatoren auf der Kohomologie mit oder ohne Trägerbedingung, die von den HECKE-Korrespondenzen herrühren) die (erhoffte) Selbstadjungiertheits-Eigenschaft bzgl. der $\cup$-Produkt-Paarung haben; insbesondere sind die genannten Dualitäten auch Dualitäten von Moduln unter der HECKE-Algebra!

6.7 Die Beispiele

Es sei F ein Zahlkörper und V ein Vektorraum der Dimension $n \geq 2$ über F. Aus gewissen später zu erläuternden Gründen interessieren hier nur die beiden folgenden Fälle:

A) F ist totalreell,

B) F ist totalimaginär.

In jedem der beiden Fälle sei $f_0 := \#\mathbb{V}_{F,\infty}$ die Anzahl der archimedischen Stellen des Grundkörpers F, also sein Grad über $\mathbb{Q}$ im ersten bzw. sein halber Grad im zweiten Falle.

6.7.1 Beispiel 1: $L = G := \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}(GL_n)$

Es sei $G_0 := GL_F(E) \cong GL_n/F$ und $G := \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}(G_0)$. Es bezeichne B_0 bzw. T_0 die zu einer Wahl einer numerierten F-Vektorraum-Basis $\mathcal{B}$ von V gehörige BOREL-Untergruppe

„der oberen Dreiecksmatrizen“ bzw. den „Diagonaltorus“ (siehe Abschnitte 2.1), und $T \subset B \subset G$ seien deren Skalarrestriktionen nach $\mathbb{Q}$; diese statten das hier zu besprechende *erste Beispiel* $L = G$ also mit der Struktur einer $\mathbb{Q}$-quasispaltenden reduktiven Gruppe und mit einem relativen Wurzelsystem etc. aus; siehe Abschnitt 2.5. –Die halbeinfache derivierte Gruppe $G^{(1)}$ ist natürlich die Skalarrestriktion der entsprechenden SL; sie ist vom Typ $\left({}^1A_{n-1}\right)^{[F:\mathbb{Q}]}$, hat den $\mathbb{Q}$-Rang $n-1$ und den absoluten Rang $[F:\mathbb{Q}]\cdot(n-1)$. [Wegen $n \geq 2$ ist G also isotrop, und die zugehörigen adelischen Doppelquotienten sind *nicht* kompakt.] –Das Zentrum Z_G ist die Gruppe der F^*-Homothetien von E (die F^*-Vielfachen der Einheitsmatrix), also eine Kopie von $T_F = \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_\mathrm{m})$; es enthält als maximalen $\mathbb{Q}$-spaltenden Untertorus S_G die $\mathbb{Q}^*$-Homothetien, also eine Kopie von $\mathbb{G}_\mathrm{m}/_{\mathbb{Q}}$, und ein maximaler $\mathbb{R}$-spaltender Torus $A_G/_{\mathbb{R}} \subset Z_G \times \mathbb{R}$ ist in jedem Falle isomorph zu $(\mathbb{G}_\mathrm{m}/_{\mathbb{R}})^{f_0}$. Der Einfachheit halber werde $\mathsf{A} = A_G(\mathbb{R})^\circ$ gewählt, so daß dann $\mathsf{K}^G := \mathsf{A}_G \cdot K^{G,\circ}_\infty \overset{!}{=} Z_G(\mathbb{R})^\circ \cdot K^{G,\circ}_\infty$ ist. –Auch das Cozentrum C_G von G ist eine Kopie von T_F; die Projektion von G auf C_G ist die Determinante, und die kanonische Isogenie von Z_G auf C_G „ist“ einfach das Potenzieren mit n auf T_F.

Zur Definition der Standard-Kommensurabilitätsklasse von offen-kompakten Untergruppen in $G(\mathbb{A}_f)$ werde $\mathcal{G}_0 := GL_n/_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)}$ bzw. die zugehörige maximalkompakte Gruppe $K^{G,0}_f := GL_n(\widehat{\mathcal{O}}_F)$ benutzt. Der Faktor von G_∞ an einer archimedischen Stelle von F ist im Falle A) isomorph zu $GL_n(\mathbb{R})$ mit maximaler kompakt-zusammenhängender Untergruppe $SO(n)$; im Falle B) dagegen isomorph zu $GL_n(\mathbb{C})$ mit maximalkompakter Untergruppe $U(n)$ (die zusammenhändend ist). Die sich aus der Wahl von A ergebende Untergruppe $\mathsf{A} \cdot K^\circ_\infty = Z_G(\mathbb{R})^\circ \cdot K^{G,\circ}_\infty$ kann als Zusammenhangskomponente in der Gruppe der Ähnlichkeiten eines hermiteschen bzw. euklidischen Skalarprodukts auf $V \otimes \mathbb{R}$ gedeutet werden, und der zugehörige symmetrische Raum ist der Raum der Isomorphieklassen der Gitter in $V \otimes \mathbb{R}$ mit $\mathcal{O}_F$-Struktur bis auf Skalierung; der Quotient $G_\infty/\mathsf{A} \cdot K^\circ_\infty = X^G$ ist zusammenhängend im Falle B) und hat 2^{f_0} Zusammenhangskomponenten im Falle A); seine Dimension (und damit auch die der zugehörigen adelischen Doppelquotienten) ist $f_0 \cdot \frac{(n-1)(n+2)}{2}$ im „totalreellen“ Fall A); im „totalimaginären“ Fall B) ist sie $= f_0 \cdot (n^2-1)$.

Die Lie-Algebra von G heiße $\mathfrak{g}$; ihre Komplexifizierung $\mathfrak{g}_\mathbb{C} := \mathfrak{g} \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C}$ ist also isomorph zur direkten Summe von $[F:\mathbb{Q}]$ Kopien von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

6.7.2 Beispiel 2: $L = M_P$, wo P = Geraden-Stabilisator in G

Zu e_1, dem ersten der in der Basis $\mathcal{B}$ ausgewählten F-Basisvektoren für V, sei wieder $P_0 \subset G_0$ diejenige Standardparabolische, die die Gerade durch e_1 stabilisiert. Im Sinne von Abschnitt 2.1 gehört P_0 zu $\Xi_0 = \Delta_0 \setminus \{\alpha_1\} = \{\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}\}$. Sie enthält (siehe 2.1) als Standard-Levi-Untergruppe die Gruppe M_{P_0}, nach G_0 eingebettet als Block-Diagonalmatrizen mit Blöcken der Größe 1 und $n-1$, die also als Zentrum einen *zwei*-dimensionalen F-spaltenden Torus enthält, der zum Beispiel als Gruppe der Diagonalmatrizen der Gestalt $\{\mathrm{diag}(a \cdot b, b, \ldots, b) \mid a, b \in \mathbb{G}_\mathrm{m}/_F\}$ parametrisiert werden kann; auf dem unipotenten Radikal $U_{P_0} \cong \mathbb{G}_\mathrm{a}^{n-1}$ operiert der genannte Torus dann durch Multiplikation (Homothetie) mit dem Parameter a!

Wie üblich seien die Gruppen $M_P \subset P (\subset G)$ „ohne unteren Index 0“ als die Skalarrestriktionen nach $\mathbb{Q}$ der entsprechenden Gruppen über F „mit unterem Index 0“ definiert. Als *zweites Beispiel* wird $L = M_P$ studiert, wobei $\mathsf{A}_{M_P} = \mathsf{A}_G$ gewählt wird, worin der maximale $\mathbb{Q}$-spaltende Untertorus S_{M_P} *nicht* vollständig enthalten ist, so daß hier eine (gewissermaßen erwünschte) Situation nicht endlichen Volumens auftritt! –Da $P \supset M_P$ als Untergruppen von G definiert wurden, ist es sinnvoll, als Niveau-Untergruppen $K_\infty^{M_P,\circ} \subset M_P(\mathbb{R})^\circ \subset G(\mathbb{R})$ bzw. $K_f^{M_P} \subset M_P(\mathbb{A}_f)^\circ \subset G(\mathbb{A}_f)$ jeweils den Schnitt der jeweiligen Punktegruppen von M_P mit der zu G gewählten Niveau-Untergruppe an der respektiven Stellenmenge zu nehmen; ebenso soll die Standard-ganzzahlige Struktur/die Standard-Kommensurabilitätsklasse offen-kompakter Untergruppen in $M_P(\mathbb{A}_f)$ durch den „Schnitt mit $\mathcal{G}$“ festgelegt sein.

–Im Prinzip ist über M_P natürlich schon alles gesagt: diese Gruppe ist –bis auf die „Dekoration“ durch einen zentralen Torus, die man als gut beherrschbar ansehen sollte– „dasselbe“ wie die Gruppe G, nur eben mit um 1 kleinerem relativem Rang! Es sollen nun aber der Raum ${}_P\mathcal{S}^G_{K_f^G}$ bzw. sein Quotient nach der geodätischen Operation der $\mathbb{R}$-Punkte des in M_P zentralen Torus Z_P, das P-Randstratum $\partial_P\mathcal{S}^G_{K_f^G}$ der Borel–Serre-Kompaktifizierung von $\mathcal{S}^G_{K_f^G}$, untersucht werden, sowie der mit diesen eng verbundene (nämlich als Basis einer Faserbündel-Struktur dienende) Raum $\mathcal{S}^{M_P}_{K_f^{M_P}}$ (zu jeweils geeignet gewählten Niveaus), wie im Abschnitt 6.5. Dort wurde aus der Faserbündel-Struktur die folgende Aussage über die Kohomologie in ihrer $\underline{G}$-Modul-Struktur gefolgert:

$$\begin{aligned} H^j\big({}_P\mathcal{S}^G, \widetilde{\mathcal{M}_G(\lambda)}\big) &\cong H^j\big(\partial_P\mathcal{S}^G, \widetilde{\mathcal{M}_G(\lambda)}\big) \\ &\cong \bigoplus_{0\le k\le j} \bigoplus_{\substack{w\in W_G^P:\\ \ell(w)=k}} \mathrm{Ind}_{\underline{P}}^{\underline{G}}\Big(H^{j-k}\big(\mathcal{S}^{M_P}, \widetilde{\mathcal{M}_{M_P}(w*\lambda)}\big)\Big) \end{aligned}$$

für beliebige irreduzible algebraische Darstellungen $\mathcal{M}_G(\lambda)$ der Guppe $G\times\overline{\mathbb{Q}}$; entsprechendes gilt für die Kohomologien der Räume zu (passenden) endlichen Niveaus als Moduln unter der entsprechenden Hecke-Algebren.

Im Falle B) eines totalimaginären Grundkörpers F seien nun (wie im Abschnitt 4.2.5) ein $d \in \mathbb{N}$, ein CM-Typ $\mathcal{T}$ von F und zu jedem $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ eine Zahl $d_\sigma \in \mathbb{N}_0$ gegeben, so daß gilt: $\forall\sigma \in \mathcal{T}: \ d_\sigma - d_{\mathsf{c}\sigma} = d$. Dem Element $\underline{d} := (d_\sigma)_\sigma \in \mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}_\mathbb{Q}(F,\mathbb{C})}$ wird nun –wie a.a.O.– das dominante ganze Gewicht

$$\underline{\lambda} = \underline{\lambda}_{\underline{d}} := \big(\dots, d_\sigma\cdot(\omega_{n-1,\sigma}-\omega_{n,\sigma}), d_{\mathsf{c}\sigma}\cdot\omega_{1,\mathsf{c}\sigma},\dots\big)_{\sigma\in\mathcal{T}} \in X^*(T)$$

mit zugehöriger Höchstgewichtsdarstellung

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}} &:= \mathcal{M}_G(\underline{\lambda}_{\underline{d}}) \\ &\cong \bigotimes_{\sigma\in\mathcal{T}} \mathrm{Sym}^{d_\sigma}(V_\sigma^\vee)\otimes\mathrm{Sym}^{d_{\mathsf{c}\sigma}}(V_{\mathsf{c}\sigma}) \end{aligned}$$

zugeordnet. Dort wurde eingesehen, daß (für $d > 0$) die einzige *eindimensionale* Darstellung unter den $\mathcal{M}_{M_P}(w*\underline{\lambda}_{\underline{d}})$ zu dem Kostant-Vertreter $\Theta_\mathcal{T}$ zu W^P (von der Länge $(n-1)\cdot f_0$) gehört, der durch $(\Theta_\mathcal{T})_\tau = \begin{cases} s^{\{n-1\}} & \text{für } \tau\in\mathcal{T}, \\ \mathrm{id} & \text{für } \tau\notin\mathcal{T}, \end{cases}$ gegeben ist; der Charakter

$$\Theta_\mathcal{T} * \underline{\lambda}_{\underline{d}} = \Big(\dots, \big(-(n+d_\sigma)\cdot\omega_{1,\sigma}+\omega_{n,\sigma},\ d_{\mathsf{c}\sigma}\cdot\omega_{1,\mathsf{c}\sigma}\big),\dots\Big)_{\sigma\in\mathcal{T}}$$

von $M_P \times \overline{\mathbb{Q}}$ ist dann so beschaffen, daß er der ∞-Typ von algebraischen HECKE-Charakteren auf P (bzw. M_P bzw. dem Cozentrum C_{M_P}) vom Gewicht $\mathrm{wt}(\Theta_{\mathcal{T}} * \underline{\lambda_{\underline{d}}}) = -(n+d)\cdot\omega_1 + \omega_n$ ist! Folglich gilt

$$H^0\big(\mathcal{S}^{M_P}, H^{(n-1)\cdot f_0}(\mathfrak{u}_P, \underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}})\big) = \bigoplus_{\varphi\in\mathrm{aHC}_{M_P}(\Theta_{\mathcal{T}} * \underline{\lambda_{\underline{d}}})} \overline{\mathbb{Q}}\cdot\varphi, \text{ also}$$

$$H^{(n-1)\cdot f_0}(\partial_P\mathcal{S}^G, \widetilde{\underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}}) = \bigoplus_{\varphi\in\mathrm{aHC}_{M_P}(\Theta_{\mathcal{T}} * \underline{\lambda_{\underline{d}}})} \mathrm{Ind}_{\underline{P}}^{\underline{G}}(\varphi).$$

Es sei nun $\underline{\varphi} = (\varphi_\infty, \varphi_f)$ ein hierbei vorkommender algebraischer HECKE-Charakter vom ∞-Typ $\Theta_{\mathcal{T}} * \underline{\lambda_{\underline{d}}}$ auf P (bzw. auf C_{M_P}) und

$$\mathcal{J}_{\underline{\varphi}} := \mathrm{Ind}_P^G(\underline{\varphi}) = \mathcal{J}_{\varphi_\infty} \otimes \mathcal{J}_{\varphi_f}$$

der aus ihm „von P nach G“ induzierte $(\mathfrak{g}, \mathsf{K}^G)\times G(\mathbb{A}_f)$-Modul. (Der HARISH-CHANDRA–Modul $\mathcal{J}_{\varphi_\infty}$ ist erst mit $\mathbb{C}$ als Wertekörper der Funktionen sinnvoll, die parabolisch induzierte Darstellung $\mathcal{J}_{\varphi_f}$ von $G(\mathbb{A}_f)$ kann schon über dem Zahlkörper (!) $\mathbb{Q}(\varphi_f)$, der von allen Werten von φ_f erzeugt wird, definiert werden; über diesem Zahlkörper ist auch das Tensorprodukt zu nehmen.)

Dann ist $\underline{\varphi}$ trivial auf den Elementen von $P(\mathbb{Q})$, es ist also $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}$ ein Raum von (glatten) Funktionen auf $P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$, sogar (was hier weder präzisiert noch verifiziert wird) ein Teilraum der *automorphen Formen* $\mathcal{A}_P(G)$ auf diesem diskreten Quotienten von $G(\mathbb{A})$ (dessen Volumen *nicht* endlich ist!). Daher ist $H^*(\mathfrak{g}, \mathsf{K}^G; \mathcal{J}_{\underline{\varphi}} \otimes \underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}) \cong H^*(\mathfrak{g}, \mathsf{K}^G; \mathcal{J}_{\varphi_\infty} \otimes \underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}) \otimes \mathcal{J}_{\varphi_f}$ ein Teilraum von $H^*(\mathfrak{g}, \mathsf{K}^G; \mathcal{A}_P(G) \otimes \underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}) \cong H^*(\partial_P\mathcal{S}^G, \widetilde{\underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}})$, und zwar ein rational definierter Unterraum! (Vgl. auch [Ha92, Thm. I].)

In der Proposition aus Abschnitt 4.2.4 wurde nun gezeigt, daß die relative LIE-Algebra-Kohomologie des Tensorprodukts aus $\widetilde{\underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}}$ und $\mathcal{J}_{\varphi_\infty}$ in allen Graden unterhalb $(n-1)\cdot f_0$ trivial ist und daß der Raum $H^{(n-1)\cdot f_0}(\mathfrak{g}, \mathsf{K}^G; \mathcal{J}_{\varphi_\infty} \otimes \underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}})$ eindimensional ist. Der dort angegebene Erzeuger $\iota_{\underline{\mathcal{T}}^\uparrow}$ des letzgenannten Raumes kann nun wie folgt durch geschlossene Differentialformen $\omega_{\underline{d}}$ des Grades $(n-1)\cdot f_0$ auf den Mannigfaltigkeiten $\partial_P\mathcal{S}^G_{K_f^G}$ repräsentiert werden: solch ein $\omega_{\underline{d}}$ ist das Produkt aus einer (in $\mathcal{J}_{\varphi_\infty}$ liegenden, gleich weiter zu spezifizierenden) Funktion $\phi_{\underline{d}}$ auf $G(\mathbb{R})$ und aus der Differentialform auf $U_P(\mathbb{R})$, deren Komponente an einer komplexen Stelle $|\,\sigma\,|$ von F durch die linksinvariante Form (*ohne* Komponenten an der bzgl. $\mathcal{T}$ antiholomorphen Einbettung $\mathsf{c}\sigma$!) $\mathrm{d}u_{1,2;\sigma} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u_{1,n;\sigma} \in \Omega^{n-1}(U_{P,|\sigma|}) \cong \bigwedge^{n-1}\mathfrak{u}_{P,|\sigma|}$ gegeben ist, und der „Modul-Belegung“ mit dem passenden Tensorprodukt lokaler Gewichtsvektoren: $Z_{1,\sigma}^{d_\sigma}\otimes\overline{e}_{1,\mathsf{c}\sigma}^{d_{\mathsf{c}\sigma}}$. [Diese Differentialform entsteht natürlich aus einer Differentialform $\widetilde{\omega}_P$ auf $P(\mathbb{A})$, die folgendermaßen charakterisiert werden kann: sie ordnet einem einem $(n-1)\cdot f_0$-tupel von Elementen der LIE-Algebra $\mathfrak{p}$ (diesen in alternierend-multilinearer Weise) und einem $\underline{p} \in P(\mathbb{A})$ den Wert $\underline{\varphi}(\underline{p})$ zu, wenn die Elemente der LIE-Algebra eine Basis von $\mathfrak{u}_P$ in der richtigen Orientierungs-Reihenfolge bilden, und den Wert 0 sonst.]

Die Funktion $\phi_{\underline{d}}$ liegt ja in $\mathcal{J}_{\varphi_\infty}$, so daß sie ihren Wert unter Linkstranslation des Arguments mit einem Element von $P(\mathbb{R})$ gerade um Multiplikation mit dem Wert von φ_∞ auf dem betreffenden Element ändert; wegen des Bestehens der $P-\mathsf{K}$-IWASAWA-Zerlegung muß sie damit nur noch als Funktion auf der „maximalkompakten“ Untergruppe K^G $\big($bis auf Zentrumsanteile von G_∞ ein Produkt von Kopien von $SU(n)\big)$beschrieben werden. Hierzu ist nun aber bekannt, daß sie dem Höchstgewichtsraum im „niedrigsten K-Typ“ von $\mathcal{J}_{\varphi_\infty}$ angehören muß, und dieser K-Typ ist an jeder Stelle $|\,\sigma\,|$ der „$b=0$“-Summand in der $SU(n)$-Typen-Zerlegung von $\mathcal{J}_{\varphi_{|\sigma|}}$ (vgl. Lemma 8 auf Seite 87!), d.h. es handelt sich um die $K_\infty^{G,\circ}$-Darstellung zum Höchstgewicht $(\ldots,(n+d_\sigma+d_{\mathsf{c}\sigma})\cdot\tau_{1,|\sigma|}-1\cdot\tau_{n,|\sigma|},\ldots)_{|\sigma|}$. –Ein „System rationaler Erzeugender“ erhält man nun durch geeignete Spezifikation der Werte der beteiligten $\phi_{\underline{d}}$ im Einselement; dies soll hier nicht geleistet werden.

6.7.3 Beispiel 3 : $L = H := \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^F\big(\mathrm{Res}_F^E(\mathbb{G}_m)\big)$

Nun sei E eine étale Algebra vom Grad $n\geq 2$ über F (Hauptbeispiel: eine Körpererweiterung), die so beschaffen ist, daß insgesamt einer der folgenden beiden Fälle vorliegt:

A) E (und damit automatisch auch F) ist totalreell, d.h. jeder Körper-Summand von E ist ein totalreeller Zahlkörper, vgl. 1.2.1.

B) F (und damit automatisch auch E) ist totalimaginär.

Das *dritte Beispiel* ist nun $L := H := \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^E(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/_E)$, also ein (quasispaltender) $\mathbb{Q}$-Torus. Natürlich gilt $H^{(1)}=\{1\}$ und $H=Z_H=C_H$; der maximale $\mathbb{Q}$-spaltende Untertorus ist die von $\mathbb{Q}\subset F\subset E$ kommende Kopie von $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/_{\mathbb{Q}}$, also vom Rang 1.

Wegen der Transitivität des Restringierens der Skalare kann H auch als Skalarrestriktion nach $\mathbb{Q}$ des F-Torus $H_0 := \mathrm{Res}_F^E(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/_E)$ aufgefaßt werden. Für jede Wahl eines Isomorphimus $E\cong V$ von F-Vektorräumen wird dann H_0 als ein maximaler Torus in G_0 eingebettet (und ebenso ist H in G maximaler Torus); all diese Einbettungen sind unter $G_0(F)=G(\mathbb{Q})$ konjugiert. –Als $\mathbb{R}$-spaltender Anteil A_H soll nun das oben gewählte A_G genommen werden — da es zentral ist, kann es mittels einer *beliebigen* solchen Einbettung nach G als Untergruppe von $H(\mathbb{R})$ realisiert werden.

Da H abelsch ist –bzw. da es, wie klassischerweise bekannt, in E nur *eine* Maximalordnung gibt, nämlich den Ganzzahlring $\mathcal{O}_E$–, gibt es genau eine Kommensurabilitätsklasse von offen-kompakten Untergruppen in $H(\mathbb{A}_f)=\mathbb{I}_{E,f}$, nämlich die zum ganzzahligen Modell $\mathcal{H}_0=\mathcal{O}_E^*/\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_F$ (oder zu $H\cap\mathcal{G}$); die eindeutige maximalkompakte Untergruppe in $H(\mathbb{A}_f)$ ist die pro-endliche Komplettierung der Einheitengrupe, $\widehat{\mathcal{O}}_E^*\cong\prod_{\mathfrak{P}\in\mathrm{Specmax}(\mathcal{O}_E)}\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{P}}}^*$.

Die Gruppe $H(\mathbb{R})=(E\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^*$ der reellwertigen Punkte ist im „totalreellen“ Falle A) zu $(\mathbb{R}^*)^{n\cdot f_0}$ isomorph; hierin ist maximalkompakt die diskrete Gruppe $(\{\pm1\})^{n\cdot f_0}$, deren Zusammenhangskomponente $K_\infty^{H,\circ}$ trivial ist, so daß sich $\mathsf{K}^H := \mathsf{A}_H\cdot K_\infty^{H,\circ}\overset{(!)}{=}\mathsf{A}_G=(F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^*\cong(\mathbb{R}^*)^{f_0}$ ergibt; die Doppelquotienten $\mathcal{S}^H_{K_f^H}$ sind also Quotienten von disjunkten Vereinigungen von euklidischen Räumen der Dimension $(n-1)\cdot f_0$, differentialgeometrisch gesehen „flache Tori“.

Im „totalimaginären“ Falle B) ergibt sich dieselbe „Sorte“ von Quotienten: es ist $H(\mathbb{R})\cong(\mathbb{C}^*)^{n\cdot f_0}$ (dies ist zusammenhängend!), eine maximale zusammenhängend-kompakte Untergruppe $K_\infty^{H,\circ}$ ist zu $(\mathsf{S}^1)^{n\cdot f_0}$ isomorph; als Untergruppe $\mathsf{K}^H := \mathsf{A}_H\cdot K_\infty^{H,\circ}$ ergibt sich hier

$(\mathsf{S}^1)^{n \cdot f_0} \cdot (\mathbb{R}^{>0})^{f_0}$ und damit als „symmetrischer Raum“ $X^H = H(\mathbb{R})/\mathsf{K}^H$ die Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^{>0})^{(n-1)\cdot f_0}$ (mit flacher Metrik).

Die Einschränkung einer beliebigen algebraischen Darstellung $\mathcal{M}$ von G auf den Torus H (bezüglich einer beliebigen Einbettung) zerfällt in Eigenräume zu Charakteren, den *Gewichten* von H auf der Darstellung: $\mathcal{M}\big|_H \cong \bigoplus_{\mu \in X^*(H)} \mathcal{M}[\mu]$. Für die Darstellungen $\underline{\mathcal{M}_{d}} = \mathcal{M}_G(\underline{\lambda_d})$ von G „auf Polynom-Räumen“, die (aus dort genannten guten Gründen!) auch schon in Abschnitt 4.2.5 betrachtet und im vorigen Beispiel betrachtet wurden, sind diese Eigenräume für den maximalen Torus $H \subset G$ alle eindimensional –vgl. die Bemerkung im Abschnitt 2.5!

Bezeichnet man zu einem derartigen dominanten ganzen Gewicht $\lambda := \underline{\lambda_d}$ von G mit $X^*(H)_\lambda$ die Menge aller algebraischen Charaktere μ von H, so daß $\mathcal{M}_G(\lambda)\big|_H$ einen eindimensionalen (d.h. nichttrivialen) μ-Eigenraum enthält, und mit $X^*(H)_\lambda^{\mathrm{aHC}}$ die Teilmenge derjenigen μ, die ∞-Typen von algebraischen HECKE-Charakteren von E bzw. $H = T_E$ sind, so gilt also

$$\begin{aligned} H^*\big(\mathcal{S}^H, \widetilde{\mathcal{M}_G(\lambda)}\big) &= \bigoplus_{\mu \in X^*(H)_\lambda} H^*\big(\mathcal{S}^H, \widetilde{\mathcal{M}_G(\lambda)[\mu]}\big) \\ &\cong \bigoplus_{\mu \in X^*(H)_\lambda^{\mathrm{aHC}}} \bigoplus_{\eta \in \mathrm{aHC}(\mu)} \overline{\mathbb{Q}} \cdot \eta \otimes \bigwedge^* \big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_E^*/\mathcal{O}_F^*, \mathbb{Q})\big), \end{aligned}$$

siehe [Ha87, 2.6.1.]; insbesondere

$$H^0\big(\mathcal{S}^H, \widetilde{\mathcal{M}_G(\lambda)}\big) \cong \bigoplus_{\mu \in X^*(H)_\lambda^{\mathrm{aHC}}} \bigoplus_{\eta \in \mathrm{aHC}(\mu)} \overline{\mathbb{Q}} \cdot \eta.$$

Die hier auftretenden Summanden sind nach (loc.cit.) wiederum „rational definiert“; es seien (zu gegebenem λ) mit $m_\eta = m(\lambda, \mu)_\eta$ Erzeugende dieser Räume bezeichnet, die Bestandteile eines „Systems rationaler Erzeugender“ (zu diesen Räumen, und dies zu sämtlichen GALOIS-Konjugierten des Gewichts λ) bilden. Nach Definition ist ein solches $m_\eta \in H^0\big(\mathcal{S}^H_{K_f^H}, \widetilde{\mathcal{M}_G(\lambda)[\mu]}\big)$ eine lokalkonstante Funktion (z.B. $\mathbb{C}$- oder $\overline{\mathbb{Q}}$-wertig; genauer genommen: mit Werten in dem eindimensionalen Gewichtsraum!) auf dem adelischen Doppelquotienten $\mathcal{S}^H_{K_f^H}$, die sich von links unter den Elementen von $H(\mathbb{Q}) = E^*$ gemäß dem Charakter μ transformiert: $m_\eta(\varepsilon \cdot \underline{h} \cdot \underline{k}) = \mu(\varepsilon) \cdot m_\eta(\underline{h})$ für alle $\varepsilon \in E^*$, $\underline{h} \in H(\mathbb{A})$ und $\underline{k} \in K_f^H$. (Damit zu einem gegebenen Niveau K_f^H ein nichtverschwindendes m_η existiert, muß natürlich der algebraische HECKE-Charakter η auf dieser Niveau-Untergruppe $K_f^H \subset \widehat{\mathcal{O}}_E^*$ trivial sein.)

Da im Falle B) die Gruppe $H(\mathbb{R})$ zusammenhängend ist, kann hier eine derartige Funktion folgendermaßen definiert werden: man wählt ein nichtverschwindendes Element des Gewichtsraumes $m_\mu^0 \in \mathcal{M}_G(\lambda)[\mu] \setminus \{0\}$ (das über einem möglichst kleinen Körper, z.B. einem Zerfällungskörper von H/ einer GALOIS-Hülle $\widetilde{E}$ von E über $\mathbb{Q}$, definiert ist) und setzt

$$m_\eta(\underline{h}) := \eta_f(\underline{h}_f) \cdot m_\mu^0;$$

nach den Eigenschaften des ∞-Typs leistet diese Funktion das Erwünschte! (Im totalreellen Fall A) muß auch der von η herkommende Charakter ϵ_η auf der Gruppe der Zusammenhangskomponenten $\pi_0(H_\infty)$ berücksichtigt werden; dies geschieht wie in [Ha87, 2.5.4.] geschildert.)

Die hier besprochenen adelischen Doppelquotienten $\mathcal{S}^H_{K^H_f}$ zur Einheitengruppe H_0 einer étalen Algebra E über F –mit dem wie oben gewälten A_H bzw. K^H– sind *kompakt* genau dann, wenn E ein Körper ist! (Diese Aussage ist äquivalent zur Verbindung aus „Endlichkeit der Klassenzahl“ einerseits und andererseits dem GODEMENT-Kriterium bzw. dem Einheitensatz von DIRICHLET!) –Diese Situation soll im folgenden betrachtet werden. Man erinnere sich, daß die Spur- (bzw. $\cup$-Produkt-)Paarung den POINCARÉ-Isomorphismus $H^0\big(\mathcal{S}^H_{K^H_f}, \widetilde{\mathcal{M}_G(\lambda)}\big) = H_c^{(n-1)\cdot f_0}\big(\mathcal{S}^H_{K^H_f}, \widetilde{\mathcal{M}_G(\lambda)^\vee}\big)^\vee$ stiftet, wobei ja im hier betrachteten Körper- bzw. kompakten Fall der Subskript $_c$ wegfallen kann.

Zerfällt die Darstellung $\mathcal{M}_G(\lambda)\big|_H$ in die H-Gewichtsräume $\mathcal{M}_G(\lambda)[\mu]$, $\mu \in X^*(H)_\lambda$, so ist natürlich die Zerlegung von $\big(\mathcal{M}_G(\lambda)^\vee\big)\big|_H$ durch

$$\big(\mathcal{M}_G(\lambda)^\vee\big)\big|_H \cong \bigoplus_{\mu\in X^*(H)_\lambda} \big(\mathcal{M}_G(\lambda)^\vee\big)[\mu^{-1}]$$

gegeben; die Gewichte auf der contragredienten Darstellung sind die contragredienten (d.h. die inversen) Gewichte! Es ergibt sich die folgende Zerlegung der nullten Kohomologie:

$$H^0\big(\mathcal{S}^H, \widetilde{\mathcal{M}_G(\lambda)^\vee}\big) \cong \bigoplus_{\mu\in X^*(H)_\lambda^{\mathrm{aHC}}} \bigoplus_{\eta\in \mathrm{aHC}(\mu)} \overline{\mathbb{Q}} \cdot m^\vee_{\eta^{-1}};$$

die globalen Schnitte $m^\vee_{\eta^{-1}} := m(\lambda^\vee, \mu^{-1})_{\eta^{-1}}$ der Garbe $\widetilde{\mathcal{M}_G(\lambda)}^\vee$ erzeugen jeweils eindimensionale (kohomologische) automorphe Darstellungen von $H(\mathbb{A})$ zu den algebraischen HECKE-Charakteren η^{-1}. Das $\cup$-Produkt/die POINCARÉ-Paarung einer Klasse $[\xi] \in H^{(n-1)\cdot f_0}\big(\mathcal{S}^H_{K^H_f}, \widetilde{\mathcal{M}_G(\lambda)}\big)$ mit einem solchen $m^\vee_{\eta^{-1}}$ zu demselben Niveau K^H_f, d.h. das Integral über ganz $\mathcal{S}^H_{K^H_f}$ der halmweisen Dualitätspaarungen von ξ mit $m^\vee_{\eta^{-1}}$, bewirkt somit die Projektion von $[\xi]$ auf die (eindimensionale) Komponente zum Charakter η in dieser höchstgradigen Kohomologie, vgl. [Ha87, 5.3.3 und 5.3.6.1]!

Bemerkung: Ist η ein algebraischer HECKE-Charakter vom ∞-Typ $\gamma \mathrel{\widehat{=}} (n_\sigma)_{\sigma:E\hookrightarrow\mathbb{C}}$, für den 0 ein rechtskritischer Wert ist, so gilt also mit dem (einzigen!) mit η verträglichen CM-Typ $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\gamma$ von E:

- $\forall\sigma \in \mathcal{T}:\ n_\sigma < 0 \le n_{\mathsf{c}\sigma}$, da 0 kritisch, und
- $\mathrm{wt}(\eta) = n_\sigma + n_{\mathsf{c}\sigma}$ (ist unabhängig von σ und) < 0.

(wie weiter vorn gesehen).

Setzt man im Falle A) nun $d := \frac{\mathrm{wt}(\eta)}{2} = -n_\rho$ für jedes $\rho : E \hookrightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, so kommt sicher η in der nullten Kohomologie von $\mathcal{S}^H$ mit Koeffizienten in der Darstellung $\mathrm{Sym}^d(V^\vee)\otimes\mathbb{C} = \mathcal{M}_G\big(\sum_\rho d\cdot(\omega_{n-1,\rho} - \omega_{n,\rho})\big)$ vor, und zwar als Beitrag eines extremalen Gewichts.

Im totalimaginären Fall B) sei $\underline{d} \in \mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{C})}$ durch

$$\forall\sigma \in \mathcal{T}:\ d_\sigma := -n_\sigma,\ d_{\mathsf{c}\sigma} := n_{\mathsf{c}\sigma}$$

definiert; dann kommt sicher η in $H^0\big(\mathcal{S}^H, \underline{\mathcal{M}_{\underline{d}}}\big)$ vor (Definition der Koeffizienten-Darstellung wie in 4.2.5), wiederum zu einem extremalen Gewicht. –Es sind aber sicherlich viele weitere Möglichkeiten vorhanden, ein Koeffizientensystem so zu wählen, daß ein gegebener Charakter im zugehörigen H^0 auftritt!

7 Die Integrale

7.0 Exkurs: Einige Integrale vom EULERschen Typ

Zwischen der Gammafunktion (dem EULERschen Integral zweiter Gattung)

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^x e^{-t}\frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \Big(= \int_{\mathbb{R}} |s|^{2x-1}e^{-s^2}\mathrm{d}s\Big)(\text{ für } \operatorname{Re}(x) > 0)$$

[mit dem speziellen Wert $\Gamma(1) = 1$ und der *Funktionalgleichung* $x\cdot\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$] und der Betafunktion (dem EULERschen Integral erster Gattung, das genau für $\operatorname{Re}(p), \operatorname{Re}(q) > 0$ konvergiert)

$$B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t\big(= B(q,p)\big)$$

besteht bekanntlich die Beziehung

$$\Gamma(p+q)\cdot B(p,q) = \Gamma(p)\cdot\Gamma(q),$$

wie man durch Ausmultiplizieren der rechten Seite (mit den Integralen in der *zweiten* oben angegebenen Form) zu $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}|x|^{2p-1}|y|^{2q-1}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, Substitution zu Polarkoordinaten $x = r\cos(\varphi), y = r\sin(\varphi)$ und Substitution $t = \cos^2(\varphi)$ klassischerweise einsieht.

Die Substitution $u := \frac{1}{1+x^2}$ [mit $x = \sqrt{\frac{1-u}{u}}$, und folglich $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{-1}{(1+x^2)^2}\cdot 2x = -2u^2\cdot\sqrt{\frac{1-u}{u}}$, d.h. $\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot(1-u)^{-\frac{1}{2}}u^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}u$] begründet die Gleichheit von Integralen

$$\begin{aligned}
2\cdot\int_0^\infty x^a(1+x^2)^b\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^*}|x|^{a+1}(1+x^2)^b\frac{\mathrm{d}x}{|x|}\\
&= \frac{-2}{2}\int_0^1 u^{-b-\frac{3}{2}}\Big(\frac{1-u}{u}\Big)^{\frac{a}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u\\
&= \int_0^1 u^{-b-\frac{a+1}{2}-1}(1-u)^{\frac{a+1}{2}-1}\mathrm{d}u\\
&= B\big(\tfrac{a+1}{2}, -b-\tfrac{a+1}{2}\big);
\end{aligned}$$

das Integral konvergiert also genau für $-\operatorname{Re}(b) > \operatorname{Re}(\frac{a+1}{2}) > 0$.

Als Spezialfall ($a = 0$) hierin enthalten ist die wohl schon bei EULER zu findende Formel

$$\int_{\mathbb{R}}(1+x^2)^{-(\frac{1}{2}+t)}\mathrm{d}x = B(\tfrac{1}{2}, t) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(t)}{\Gamma(\frac{1}{2}+t)}$$

für $\operatorname{Re}(t) > 0$; deren weitere Spezialisierung auf $t = \frac{1}{2}$ ergibt wegen

$$\pi = \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \Gamma(\tfrac{1}{2})^2$$

für die positiv-reelle Zahl $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ (das „Fehlerintegral“) den Wert $\sqrt{\pi}$, wobei das Wurzelzeichen hier immer die *nichtnegative* Quadratwurzel einer nichtnegativen reellen Zahl bezeichnen soll.

Führt man den „reellen Eulerfaktor“ $\Gamma_{\mathbb{R}}$ wie bei TATE durch

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\tfrac{s}{2})$$

ein, so gilt also für $\mathrm{Re}(\lambda) > \frac{1}{2}$:

$$\int_{\mathbb{R}} (1+x^2)^{-\lambda}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(2\lambda-1)}{\Gamma_{\mathbb{R}}(2\lambda)}.$$

Eine für das Folgende angenehmere „Normalgestalt“ dieses Integrals ist

$$I_1^{\mathbb{R}}(a;b) := \int_{\mathbb{R}} |x|^{2a-1}(1+x^2)^{-(a+b)}\mathrm{d}x = 2\int_{\mathbb{R}^{>0}} x^{2a}(1+x^2)^{-(a+b)}\frac{\mathrm{d}x}{x} = B(a,b);$$

es ist also genau dann konvergent, wenn die Realteile von a und b beide positiv sind.

–In der Darstellungstheorie treten „geschachtelte“ Integrale von verwandter Form auf wie z.B.

$$\int_{\mathbb{R}^n} t_1^{\alpha_1}\cdot(1+t_1^2)^{\beta_1}\cdot t_2^{\alpha_2}\cdot(1+t_1^2+t_2^2)^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot t_n^{\alpha_n}\cdot(1+\sum_{j=1}^n t_j^2)^{\beta_n}\mathrm{d}t_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}t_n;$$

diese sollen nun (auf Konvergenz untersucht und) in Termen von Γ berechnet werden. Man setze in vorausschauend gewählter Normierung der Parameter

$$\begin{aligned} I_n^{\mathbb{R}}(a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_n) &:= \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^n |x_j|^{2a_j-1}\cdot\prod_{j=1}^n(1+\sum_{k=1}^j x_k^2)^{-(a_j+b_j)}\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_n \\ &= 2^n\int_{(\mathbb{R}^{>0})^n}\prod_{j=1}^n(x_j^2)^{a_j}\prod_{j=1}^n(1+\sum_{k=1}^j x_k^2)^{-(a_j+b_j)}\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}x_n}{x_n}. \end{aligned}$$

Die Identitäten $1+c^2+d^2 = (1+c^2)\cdot(1+(\frac{d}{\sqrt{1+c^2}})^2)$ und (daraus folgend)

$$\begin{aligned} &(x_n^2)^{\alpha_n}\cdot(1+\sum_{j=1}^{n-1}x_j^2)^{\beta_{n-1}}\cdot(1+\sum_{j=1}^n x_j^2)^{\beta_n} = \\ &= \Big((\frac{x_n}{\sqrt{1+\sum_{j=1}^{n-1}x_j^2}})^2\Big)^{\alpha_n}(1+\sum_{j=1}^{n-1}x_j^2)^{\beta_{n-1}+\alpha_n}\Big((1+\sum_{j=1}^{n-1}x_j^2)\big(1+(\frac{x_n}{\sqrt{1+\sum_{j=1}^{n-1}x_j^2}})^2\big)\Big)^{\beta_n} \\ &= \Big((\frac{x_n}{\sqrt{1+\sum_{j=1}^{n-1}x_j^2}})^2\Big)^{\alpha_n}(1+\sum_{j=1}^{n-1}x_j^2)^{\beta_{n-1}+\beta_n+\alpha_n}\Big(1+(\frac{x_n}{\sqrt{1+\sum_{j=1}^{n-1}x_j^2}})^2\Big)^{\beta_n} \end{aligned}$$

zeigen mittels der Substitution

$$\xi := \frac{x_n}{\sqrt{1+\sum_{j=1}^{n-1}x_j^2}} \quad\text{mit}\quad \frac{\mathrm{d}\xi}{|\xi|} = \frac{\mathrm{d}x_n}{|x_n|}$$

die Identität

$$I_n^{\mathbb{R}}(a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_n) = I_{n-1}^{\mathbb{R}}(a_1,\ldots,a_{n-1};b_1,\ldots,b_{n-2},b_{n-1}+b_n)\cdot I_1^{\mathbb{R}}(a_n;b_n);$$

und hieraus erhält man mittels Induktion und unter Benutzung der oben etablierten Beta-Identitäten für $I_1^{\mathbb{R}}$:

Lemma 11 *Für $n \in \mathbb{N}_+$ und komplexe Zahlen a_j, b_j konvergiert das Integral*

$$I_n^{\mathbb{R}}(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n) := \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n |x_j|^{2a_j-1} \cdot \prod_{j=1}^n (1 + \sum_{k=1}^j x_k^2)^{-(a_j+b_j)} \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$$

genau dann, wenn für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt: $\mathrm{Re}(a_j) > 0$ <u>*und*</u> $\mathrm{Re}(\sum_{k=j}^n b_k) > 0$*; in diesem Falle hat man*

$$I_n^{\mathbb{R}}(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n) = \prod_{j=1}^n B(a_j, \sum_{k=j}^n b_k).$$

Das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \sum_{j=1}^n x_j^2)^{-\lambda} \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ beispielsweise ordnet sich in diesen Kontext ein mittels folgender Parameterwerte: $\forall j = 1, \ldots, n: \ 0 = 2 \cdot a_j - 1$, d.h. $a_j = \frac{1}{2} (> 0)$, $\forall j = 1, \ldots, n: \ 0 = -(a_j + b_j) = -\frac{1}{2} - b_j$, d.h. $b_1 = \ldots = b_{n-1} = -\frac{1}{2}$, und $-\lambda = -a_n - b_n$, d.h. $b_n = \lambda - \frac{1}{2}$. Die Bedingungen $0 \overset{!}{<} \mathrm{Re}(\sum_{k=j}^n b_k) = \mathrm{Re}(\lambda) - (n - j + 1) \cdot \frac{1}{2}$ sind somit genau dann alle erfüllt, wenn $\mathrm{Re}(\lambda) > \frac{n}{2}$, also:

Corollar 2 *Das Integral*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \sum_{j=1}^n x_j^2)^{-\lambda} \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n = I_n^{\mathbb{R}}(\tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{2}; -\tfrac{1}{2}, \ldots, -\tfrac{1}{2}, \lambda - \tfrac{1}{2})$$

existiert genau für $\mathrm{Re}(\lambda) > \frac{n}{2}$ *und hat in diesem Falle den Wert*

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n B(\tfrac{1}{2}, \lambda - \tfrac{n+1-j}{2}) &= \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda - \frac{n+1-j}{2})}{\Gamma(\lambda - \frac{n+1-j}{2} + \frac{1}{2})} \\ &= \Gamma(\tfrac{1}{2})^n \cdot \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\lambda - \frac{n}{2} + \frac{j-1}{2})}{\Gamma(\lambda - \frac{n}{2} + \frac{j}{2})} \\ &= \pi^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\lambda - \frac{n}{2})}{\Gamma(\lambda)} \\ &= \frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(2\lambda - n)}{\Gamma_{\mathbb{R}}(2\lambda)}. \end{aligned}$$

–Analoge Parameter-Integrale sollen nun auch über komplexe Vektorräume erstreckt werden, d.h. es sollen Integrale der Gestalt

$$\int_{\mathbb{C}^n} \prod_{j=1}^n (z_j^{\alpha_j'} \overline{z}_j^{\alpha_j''}) \cdot \prod_{j=1}^n (1 + \sum_{k=1}^j z_k \overline{z}_k)^{\beta_j} |\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n \wedge \mathrm{d}\overline{z}_n|$$

betrachtet werden.

Hierbei wird –wie üblich– von den „holomorphen Koordinaten“ $z_j, \overline{z}_j \in \mathbb{C}$ vermittels $z_j = x_j + iy_j = r_j e^{i\varphi_j}$ in die „euklidischen Koordinaten“ $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ und in die „partiellen Polarkoordinaten“ $r_j \in \mathbb{R}^{>0}, \varphi_j \in [0, 2\pi)$ (bzw. $\in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) gewechselt; die zugehörigen naheliegenden Volumenformen stehen bekanntlich in den Verhältnissen

$$\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}y_j = \frac{1}{2} \cdot |\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j| = -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{Im}(\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j) = r_j \mathrm{d}r_j \wedge \mathrm{d}\varphi_j,$$

und für die jeweils zugeordneten HAARschen Maße auf der Gruppe $\mathbb{C}^*$ (an j-ter Koordinate) gilt dementsprechend

$$\frac{\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}y_j}{x_j^2 + y_j^2} = \tfrac{1}{2} \cdot |\frac{\mathrm{d}z_j}{z_j} \wedge \frac{\mathrm{d}\overline{z}_j}{\overline{z}_j}| = \frac{\mathrm{d}r_j}{r_j} \wedge \mathrm{d}\varphi_j.$$

Beachtet man die Identität $z^{\alpha'} \cdot \overline{z}^{\alpha''} = (z \cdot \overline{z})^{\frac{\alpha'+\alpha''}{2}} \cdot (\frac{z}{\overline{z}})^{\frac{\alpha'-\alpha''}{2}} = r^{\alpha'+\alpha''} \cdot e^{i\cdot(\alpha'-\alpha'')\cdot\varphi}$ für $z = r \cdot e^{i\cdot\varphi}$, so sieht man, daß ein Integral der oben angegebenen Gestalt sich in partiellen Polarkoordinaten darstellt als ein Produkt aus einem Integral über die r_j-Koordinaten mit dem Produkt über j der Integrale $\int_0^{2\pi} e^{i\cdot(\alpha_j'-\alpha_j'')\cdot\varphi_j}\mathrm{d}\varphi_j$, aber diese Letztgenannten haben, wenn man sich auf Exponenten mit *ganzzahligen* Differenzen $\alpha_j' - \alpha_j'' \in \mathbb{Z}$ einschränkt, den Wert $2\pi \cdot \delta_{\alpha_j', \alpha_j''}$, so daß unter dieser Vorgabe tatsächlich nur Integrale der Gestalt

$$\int_{\mathbb{C}^n} \prod_{j=1}^n (z_j \cdot \overline{z}_j)^{\alpha_j} \cdot \prod_{j=1}^n (1 + \sum_{k=1}^j z_k\overline{z}_k)^{\beta_j} |\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n \wedge \mathrm{d}\overline{z}_n|$$

interessant sind.[23]

In hoffentlich geschickter Normierung der Parameter findet man genau wie oben:

Lemma 12 *Für $n \in \mathbb{N}_+$ und $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ gilt: das Integral*

$$\begin{aligned} & I_n^{\mathbb{C}}(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n) := \\ = & \int_{(\mathbb{C}^*)^n} \prod_{j=1}^n (z_j \cdot \overline{z}_j)^{a_j} \cdot \prod_{j=1}^n (1 + \sum_{k=1}^j z_k \cdot \overline{z}_k)^{-(a_j+b_j)} |\frac{\mathrm{d}z_1}{z_1} \wedge \frac{\mathrm{d}\overline{z}_1}{\overline{z}_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}z_n}{z_n} \wedge \frac{\mathrm{d}\overline{z}_n}{\overline{z}_n}| \\ = & \Big(\prod_{j=1}^n \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_j\Big) \cdot \int_{\mathbb{R}^{>0}} \prod_{j=1}^n r_j^{2a_j} \cdot \prod_{j=1}^n (1 + \sum_{k=1}^j r_k^2)^{-(a_j+b_j)} \bigwedge_{j=1}^n 2\frac{\mathrm{d}r_j}{r_j} \\ = & (2\pi)^n \cdot I_n^{\mathbb{R}}(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n) \end{aligned}$$

ist konvergent genau dann, wenn

$$\forall j = 1, \ldots, n: \ \mathrm{Re}(a_j) > 0 \ \underline{\text{und}} \ \mathrm{Re}(\sum_{k=j}^n b_k) > 0;$$

in diesem Falle gilt

$$I_n^{\mathbb{C}}(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n) = \prod_{j=1}^n (2\pi) \cdot B(a_j, \sum_{k=j}^n b_k).$$

Das nächstliegende Bespiel hierzu ist $\int_{\mathbb{C}^n} (1 + \sum_{j=1}^n z_j \cdot \overline{z}_j)^{-\lambda} |\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n \wedge \mathrm{d}\overline{z}_n| = I_n^{\mathbb{C}}(1, \ldots, 1; -1, \ldots, -1, \lambda - 1)$, d.h. die $a_j = 1$ sind alle positiv, und die $\sum_{k=j}^n b_k = \lambda - (n + 1 - j)$ haben genau für $\mathrm{Re}(\lambda) > n$ alle einen positiven Realteil, also:

[23] Integrale wie $\int_{\mathbb{C}^n} \prod_{j=1}^n (x_j^{\gamma_j} y_j^{\delta_j}) \cdot \prod_{j=1}^n (1 + \sum_{k=1}^j z_k\overline{z}_k)^{\epsilon_j} |\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n \wedge \mathrm{d}\overline{z}_n|$, die die euklidischen Koordinaten direkt enthalten, werden wohl einfacher in der Form $I_{2n}^{\mathbb{R}}(\ldots;\ldots)$ erfaßt.

Corollar 3 *Für* $\mathrm{Re}(\lambda) > n$ *gilt*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}^n} (1 + \sum_{j=1}^{n} z_j \cdot \overline{z}_j)^{-\lambda} |\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n \wedge \mathrm{d}\overline{z}_n| = \\
&= \prod_{j=1}^{n} (2\pi) B(1, \lambda - (n+1-j)) \\
&= \big(2\pi\Gamma(1)\big)^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(\lambda - k)}{\Gamma(\lambda - k + 1)} \\
&= (2\pi)^n \cdot \frac{\Gamma(\lambda - n)}{\Gamma(\lambda)} \\
&= \frac{\Gamma_{\mathbb{C}}(\lambda - n)}{\Gamma_{\mathbb{C}}(\lambda)}.
\end{aligned}$$

Hierzu ist der *komplexe Eulerfaktor* $\Gamma_{\mathbb{C}}$ durch

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2 \cdot (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma(s)$$

definiert worden.[24]

Bemerkungen: 1.) Eine Auswertung von entsprechenden Parameterintegralen über quaternionische Variablen in Termen von Γ-Brüchen sollte ebenso leicht fallen, wird hier aber nicht unternommen. Die Frage nach der adäquaten Definition eines quaternionischen Eulerfaktors $\Gamma_{\mathbb{H}}$ durch Konstanten, Potenzfunktionen und Γ-Faktoren bleibt hier ebenso offen; sie sollte aber so getroffen werden, daß –wie es für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ der Fall ist(!)– die kanonischen Volumina der kompakten Mannigfaltigkeiten $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (die ja auch als Quotienten von Sphären erhalten werden können) gleich den speziellen Werten $\Gamma_{\mathbb{K}}(n)$ sind! (Gibt es „oktavische“ und nichtarchimedische Analoga?)

2.) Die hier aufgeführten Integrale sind wahrscheinlich klassisch und den Spezialisten wohlbekannt; die „Idee“ der Substitution (die nun auch nicht besonders originell ist) hat der Autor bei [Kn03] und [Os03] gefunden.

Ende des Exkurses

---

[24] Dies ist die Konvention bei Tate, Lang, Neukirch, ...; bei Weil ([We73]) fehlt demgegenüber der Vorfaktor 2.

Es wird nun wieder die globale Situation [Fall B)] aus dem *Beispiele*-Abschnitt 6.7 betrachtet: Es sei F ein totalimaginärer Zahlkörper, f_0 die Anzahl seiner archimedischen Stellen, E ein Erweiterungskörper von F vom Grade $[E:F] =: n \geq 2$ (er ist automatisch totalimaginär). Die algebraische Gruppe $G = \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\big(GL_F(E)\big) \cong \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}(GL_n/_F)$, ihre Untergruppen P, M_P und $H \mathrel{\widehat{=}} \mathrm{Res}^E_{\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}/_E)$ sowie die aus ihnen abgeleiteten Gruppen und Räume seien wie in den genannten Beispielen zu diesen Vorgaben definiert; man beachte, daß der Quotiententorus H/S_H von H nach der Untergruppe $S_H = S_G \cong \mathbb{G}_{\mathrm{m}}/_{\mathbb{Q}}$ dann über $\mathbb{Q}$ anisotrop ist, so daß „seine" adelisch-lokalsymmetrischen Doppelquotienten $\mathcal{S}^H_{K^H_f}$ kompakt sind; außerdem gilt $P \cap H = Z_G$. –Es wird später noch der Torus $\overline{H}/_{\mathbb{Q}} := H/Z_G \cong T_E/T_F$ benötigt; er ist ebenfalls $\mathbb{Q}$-anisotrop, und für seine Punkte-Gruppe über einem Erweiterungskörper A von $\mathbb{Q}$ hat man $\overline{H}(A) = (E\otimes A)^*/(F\otimes A)^*$, also insbesondere $\overline{H}(\mathbb{Q}) = E^*/F^* = \mathbb{P}_F(E) \cong \mathbb{P}^{n-1}(F)$.

7.1 Die Eisenstein-Kohomologieklasse

Im Abschnitt 6.7.2 (zu M_P) wurde hergeleitet, daß man zu einem algebraischen Hecke-Charakter $\underline{\varphi}$ auf P vom ∞-Typ $\Theta_{\mathcal{T}} * \underline{\lambda_{\underline{d}}}$ bei sorgfältiger Auswahl eines Erzeugers $\omega_{\underline{d}}$ einen „rationalen" direkten Summanden $\mathbb{C}\cdot\omega_{\underline{d}} \otimes_{\mathbb{Q}(\underline{\varphi}_f)} \mathcal{J}_{\underline{\varphi}_f} =: H^{(n-1)\cdot f_0}(\partial_P\mathcal{S}^G, \widetilde{\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}})[\underline{\varphi}]$ in der Darstellung $H^{(n-1)\cdot f_0}(\partial_P\mathcal{S}^G, \widetilde{\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}})$ von $G(\mathbb{A})$ hat; wie dort sei mit $\phi_{\underline{d}} \in \mathcal{J}_{\underline{\varphi}_\infty}$ die Koeffizientenfunktion auf G_∞ von $\omega_{\underline{d}}$ bezeichnet. –Im Abschnitt 5.3 wurde skizziert, daß bei genügend großem d für beliebiges $\phi_f \in \mathcal{J}_{\underline{\varphi}_f}$ die P-Eisenstein-Reihe $\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}}(\phi_{\underline{d}}\otimes\phi_f)$ absolut zu einer automorphen Form auf G konvergiert, d.h. daß man über einen Eisenstein-Verkettungsoperator $\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}} = \mathrm{Eis}^G_{P,\underline{\varphi}} : \mathcal{J}_{\underline{\varphi}} \to \mathcal{A}(G)$ verfügt. Dieser induziert dann eine Eisenstein-Schnitt genannte Abbildung

$$\begin{aligned}[\mathrm{Eis}^G_{P,\underline{\varphi}}] \quad : \quad & H^{(n-1)\cdot f_0}(\partial_P\mathcal{S}^G, \widetilde{\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}})[\underline{\varphi}] \cong H^{(n-1)\cdot f_0}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathsf{K}^G; \mathcal{J}_{\underline{\varphi}} \otimes \underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}) \\ \to \quad & H^{(n-1)\cdot f_0}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathsf{K}^G; \mathcal{A}(G)\otimes\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}) \to H^{(n-1)\cdot f_0}(\mathcal{S}^G, \widetilde{\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}})\end{aligned}$$

(und desgleichen auf endlichem Niveau K^G_f), die auf diesem $\underline{\varphi}$-Anteil der Kohomologie des P-Randstratums der Borel–Serre-Kompaktifizierung von $\mathcal{S}^G_{K^G_f}$ tatsächlich einen Schnitt der Restriktionsabbildung

$$r_P := r^{(n-1)\cdot f_0}_{\partial_P} : H^{(n-1)\cdot f_0}(\mathcal{S}^G_{K^G_f}, \widetilde{\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}}) \to H^{(n-1)\cdot f_0}(\partial_P\mathcal{S}^G_{K^G_f}, \widetilde{\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}})$$

darstellt.

Es definiert ja $\underline{\varphi}$ auch einen Charakter auf der Borel-Untergruppe $B \subset P \subset G$, und es sei $\mathcal{I}_{\underline{\varphi}} := \mathrm{Ind}^{G(\mathbb{A})}_{B(\mathbb{A})}(\underline{\varphi}|_{B(\mathbb{A})})$ die hieraus parabolisch induzierte zulässige Darstellung „von $G(\mathbb{A})$"; es ist dann natürlich $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}} \subset \mathcal{I}_{\underline{\varphi}}$ eine Unterdarstellung. –Als ein Hauptresultat der Arbeit [Ha92], nämlich als Theorem *II* [Seite 125 in (loc.cit.)], bewies G. Harder, daß ein entsprechender Eisenstein-Schnitt auch vom $\underline{\varphi}$-Anteil der entsprechenden Kohomologie des B-Randstratums aus existiert:

$$[\mathrm{Eis}^G_{B,\underline{\varphi}}] : H^{(n-1)\cdot f_0}(\partial_B\mathcal{S}^G, \widetilde{\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}})[\underline{\varphi}] \to H^{(n-1)\cdot f_0}(\mathcal{S}^G, \widetilde{\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}});$$

–dieser muß, da die Einschränkung von $\underline{\varphi}$ auf B „sehr ausgeartet" ist, als ein $(n-2)\cdot f_0$-faches Residuum sehr sorgfältig konstruiert werden–, <u>und</u> daß dieser Schnitt ein *rational* *definierter* Operator ist zwischen dem rationalen (!) maximalen $\underline{\varphi}$-Anteil der Kohomologie des BOREL-Stratums und seinem Bild in der „globalen“ Kohomologie, das ebenfalls ein rational definierter Unterraum ist.

Es ist dem Verfasser nicht klar, ob der Beweis dieser Rationalitäts-Eigenschaften unter der hier gewählten Voraussetzung der absoluten Konvergenz der EISENSTEIN-Reihe nicht deutlich einfacher ist: nach der Bemerkung am Ende von 4.1.2 ist das Koeffizientensystem $\underline{\mathcal{M}_d}$ *nicht* hermitesch-selbstdual, und damit kann nach dem in [Ha88, 3.7.14.9] formulierten Kriterium keine *innere* Kohomologie mit diesen Koeffizienten auftreten –das „Hindernis gegen Rationalität“, das prinzipiell durch Kongruenzen der hier betrachteten EISENSTEIN-Kohomologieklasse zu inneren (d.h. hier wohl: cuspidalen) Klassen auftreten könnte, kann unter dieser Voraussetzung nicht vorhanden sein. Vgl. hierzu auch die in [Ha99] geführte Diskussion im totalreellen Kontext [$\widehat{=}$ Fall A)], wo aus denselben Gründen, daß nämlich für $n > 2$ keines der zu betrachtenden Koeffizientensysteme hermitesch-selbstdual sein kann, auf Rationalität analoger Klassen geschlossen wird! –Der Zusammenhang von Vorzeichen-Voraussetzungen an die Kennzahl d mit der Diskussion des “balanced case“ ist dem Verfasser leider ebenfalls verschlossen geblieben.

Man hat nun „natürlich“ auch Restriktionsabbildungen zwischen den Kohomologien der Randstrata zu ineinander enthaltenen Parabolischen von G, insbesondere eine Abbildung $r_B^P : H^*(\partial_P\mathcal{S}^G, \widetilde{\underline{\mathcal{M}_d}}) \to H^*(\partial_B\mathcal{S}^G, \widetilde{\underline{\mathcal{M}_d}})$, die zusammen mit den Restriktionen r_B, r_P das „zu erwartende“ kommutative Dreieck bildet; auch hier untersucht man, ob durch EISENSTEIN-Summationen Schnitte, insbesondere rationale Schnitte auf gewissen rational definierten Unterräumen konstruiert werden können, etc. . In diesem Sinne sollte sich die eindimensionale automorphe Darstellung $\underline{\varphi}$ von M_P als ein $(n-2)\cdot f_0$-faches Residuum einer EISENSTEIN-Reihe zu einem sehr ausgearteten (nämlich über die Determinante faktorisierenden) Charakter von der $\mathbb{Q}$-BOREL-Untergruppe $B \cap M_P$ in M_P darstellen lassen –bzw. es sollte einen rationalen EISENSTEIN-Schnitt

$$[\mathrm{Eis}_{B,\underline{\varphi}}^P] : H^{(n-1)\cdot f_0}(\partial_B\mathcal{S}^G, \widetilde{\underline{\mathcal{M}_d}})[\underline{\varphi}] \to H^{(n-1)\cdot f_0}(\partial_P\mathcal{S}^G, \widetilde{\underline{\mathcal{M}_d}})_{[\underline{\varphi}]}$$

geben, so daß gilt $[\mathrm{Eis}_{B,\underline{\varphi}}^G] = [\mathrm{Eis}_{P,\underline{\varphi}}^G] \circ [\mathrm{Eis}_{B,\underline{\varphi}}^P]$. (Hierfür ist sorgfältig zu klären, welche –hoffentlich „elementaren“– Faktoren sich durch einen solchen residuellen EISENSTEIN-Verkettungsoperator $\mathrm{Res}^{(n-2)\cdot f_0}\,\mathrm{Eis}_{B\cap M_P,\underline{\varphi}}^{M_P}(\bullet)$ einschleichen können; auch dies wird in der hiermit vorgelegten Arbeit leider nicht geleistet.)

Wäre hierzu ein erfreuliches Rationalitäts-Resultat erzielt, so wäre insgesamt gezeigt, daß „$[\mathrm{Eis}_{P,\underline{\varphi}}^G]$ eine rationale Abbildung und somit das Bild von $[\mathrm{Eis}_{P,\underline{\varphi}}^G]$ in $H^{(n-1)\cdot f_0}(\mathcal{S}^G, \widetilde{\underline{\mathcal{M}_d}})$ ein rational definierter Unterraum ist“, genauer muß hier wie üblich das System derAbbildungen und ihrer Bilder zum vollen GALOIS-Orbit des Charakters $\underline{\varphi}$ betrachtet werden, aber die Äquivarianz unter GALOIS-Automorphismen scheint hier –wie schon in [Ha87]– eine eher formale Konsequenz anderer Überlegungen zu sein. –Im folgenden werde diese „Rationalitätseigenschaft“ angenommen, um der noch folgenden Diskussion einen rechtfertigenden Hintergrund zu geben.

7.2 Angepaßte Einbettungen von $\mathcal{S}^H$ und Verkettungsoperatoren

Es sei irgendeine über $\mathbb{Q}$ definierte Einbettung $H \subset G$ des Torus $H = T_E$ in die Gruppe G gegeben; sie entspricht der Wahl einer F-Basis im F-Vektorraum E, wie schon mehrfach erwähnt. Ein Element $y_\infty \in G(\mathbb{R})$ soll *angepaßt an* H (und K^G) genannt werden, wenn die Konjugierte $y_\infty^{-1} \cdot \mathsf{K}^H \cdot y_\infty$ der bis auf G-Zentrumsanteile maximal kompakt-zusammenhängenden Untergruppe $\mathsf{K}^H \subset H(\mathbb{R})$ in der entsprechenden Untergruppe $\mathsf{K}^G \subset G(\mathbb{R})$ enthalten ist; mit y_∞ sind offenbar alle Elemente aus $H(\mathbb{R}) \cdot y_\infty$ angepaßt an H. –Für angepaßtes y_∞ ist also insbesondere die maximal zusammenhängend-kompakte Untergruppe $K_\infty^{H,\circ}$ in der in $G(\mathbb{R})$ maximal zusammenhängend-kompakten Untergruppe $y_\infty \cdot K_\infty^{G,\circ} \cdot y_\infty^{-1}$ enthalten!

Derartige angepaßte Elemente existieren natürlich immer; sie können „z.B." wie folgt gefunden werden: nach der Voraussetzung Fall A) oder B) sind die Untertori $H \times \mathbb{R}$ und $T \times \mathbb{R}$ von $G \times \mathbb{R}$ isomorph [im Falle A) ist H (wie T sowieso) $\mathbb{R}$-spaltend, und im Falle B) sind sie beide das Produkt von n Kopien des Torus $\mathrm{Res}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(\mathbb{G}_m/\mathbb{C})$], also sind sie unter einem $x_\infty \in G(\mathbb{R})$ konjugiert, so daß insbesondere $x_\infty^{-1} \cdot H(\mathbb{R}) \cdot x_\infty = T(\mathbb{R})$ gilt. Die maximalkompakte Untergruppe K_∞^T von $T(\mathbb{R})$ ist aber [im Falle B), der hier vordringlich interessiert] der kompakte Diagonal-Torus $\prod_{\tau \in \mathbb{V}_{F,\infty}} \mathrm{diag}\big(U(1), \dots, U(1)\big)$ von $K_\infty^G = \prod_\tau U(n)_{(\tau)}$, also ist ein solches x_∞ angepaßt!

Exkurs zum expliziten Auffinden angepaßter Elemente: Man realisiere die Körpererweiterung E von F als einfache Erweiterung $E \cong F[X]/(f_E)$ mit dem Minimalpolynom f_E eines primitiven Elements dieser Erweiterung, das man ObdA als ganz über $\mathcal{O}_F$ wählen kann: $f_E(X) = X^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot X^j \in \mathcal{O}_F[X]$. Das normierte Polynom f_E hat dann in einer GALOIS-Hülle $\widetilde{E} \supset E \supset F$ lauter getrennte Nullstellen. Es sei $m_E := \begin{pmatrix} 0 & \dots & & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & & & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in GL_n(F)$ die *Begleitmatrix* (in unterer Konvention) des Polynoms f_E: das charakteristische Polynom von m_E ist gerade f_E! Dann ist E in $M_{n\times n}(F)$ eingebettet als die F-Algebra der Polynome in m_E, und es ist H nach $GL_n/_F$ eingebettet als der Zentralisator des halbeinfach-regulären elliptischen Elements m_E. Es seien nun $p_1, \dots, p_n \in \widetilde{E}$ die sämtlichen Nullstellen von f_E (in irgendeiner gewählten Abzählung), so daß die Koeffizienten a_j von f_E sich also als die elementarsymmetrischen Funktionen in den p_k ausdrücken lassen: $a_j = (-1)^j \cdot \sigma_j^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$. Ist dann d_E die Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(p_1, \dots, p_n)$, so ist dies ein halbeinfach-reguläres Element des Diagonaltorus T, so daß dieser Torus als der Zentralisator in GL_n von d_E angesehen werden kann (nach Basiswechsel zu $\widetilde{E}$). Über $\widetilde{E}$ sind dann natürlich m_E und d_E konjugiert, so daß eine invertierbare Matrix $c_E \in GL_n(\widetilde{E})$ mit $c_E \cdot m_E = d_E \cdot c_E$ existieren muß; und dann ist c_E^{-1} (*sic!*) ein (an H) angepaßtes Element, wenn man jetzt noch geeignet mit archimedischen Stellen von F hantiert, um es nach $G(\mathbb{R})$ einzubetten. Derartige c_E können aber leicht angegeben werden: die VANDERMONDE-Matrix $c_E^0 := \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_1^2 & \dots & p_1^{n-1} \\ 1 & p_2 & p_2^2 & \dots & p_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & p_n & p_n^2 & \dots & p_n^{n-1} \end{pmatrix}$ leistet das Gewünschte! –Da die p_j Nullstellen von f_E sind, gilt die Relation, und da n.Vor. die p_j paarweise verschieden sind, ist c_E^0 invertierbar: die Determinante ist (wie man nach einer unumgänglichen Übungsaufgabe zur Linearen Algebra weiß) $= \prod_{1 \le j < k \le n}(p_k - p_j)$. Das Quadrat dieser Zahl ist gerade die Diskriminante von f_E (nicht unbedingt die von E, wegen der möglichen außerwesentlichen Diskriminantenteiler)!

Für jede Diagonalmatrix $\underline{t} = \mathrm{diag}(t_1, \dots t_n) \in T$ leistet das Element $c_E' := \underline{t} \cdot c_E^0$ dieselbe Konjugation von m_E in d_E wie c_E^0, und die j-te Zeile von c_E' entsteht aus der j-ten Zeile $(1, p_j, \dots, p_j^{n-1})$ von c_E^0 durch Multiplikation mit t_j. Wählt man also z.B. $t_j^0 = \big(\prod_{1 \le k < j}(p_j - p_k)\big)^{-1}$, so gilt

$$c_E := \underline{t}^0 \cdot c_E^0 = \Big(\frac{p_j^{k-1}}{\prod_{1 \le i < j}(p_j - p_i)}\Big)_{1 \le j,k \le n} \in SL_n(\widetilde{E}),$$

und diese Matrix c_E leistet $c_E \cdot m_E = d_E \cdot c_E$, das Bild y^0_∞ ihres Inversen in $G(\mathbb{R})$ ist also angepaßt an H, und die „erste Spalte“ von $(y^0_\infty)^{-1}$ ist wohlbekannt, was in Bezug auf deren IWASAWA-Zerlegung noch nützlich sein mag! –Eine abstraktere Bemerkung zu angepaßten Elementen, die in Diskussionen mit G. HARDER entwickelt wurde: angepaßte Elemente y_∞ können sicher mit algebraischen Einträgen gewählt werden; ein Beispiel wurde ja gerade konstruiert. Dann operiert die absolute GALOIS-Gruppe $\mathcal{G}_\mathbb{Q}$ auf diesen angepaßten Elementen, und da die Tori H und T beide über $\mathbb{Q}$ definiert sind, liegt für $\sigma \in \mathcal{G}_\mathbb{Q}$ das Produkt $y^\sigma_\infty \cdot y^{-1}_\infty$ im Normalisator von T in G; hieraus erhält man wegen „HILBERT 90“ ein wohldefiniertes Element der ersten GALOIS-Kohomologie $H^1\big(\mathbb{Q}, W(G,T)\big)$ mit Koeffizienten in der WEYL-Gruppe $W(G,T) \cong (S_n)^{\mathbb{V}_{F,\infty}}$, das natürlich mit der Permutation der (vorn p_j genannten) Wurzeln durch die GALOIS-Gruppe zu tun hat. Das Bild dieses Elementes unter „dem Vektor der sgn-Abbildungen zu den archimedischen Stellen“ ist ein Element in $H^1\big(\mathbb{Q}, (\{\pm 1\})^{\mathbb{V}_{F,\infty}}\big)$, das wohl die Vorzeichen für die oben als VANDERMONDE-Determinanten auftretenden „signierten Quadratwurzeln aus Diskriminanten“ beschreibt – man vergleiche die Konstruktion in [Ha87, 2.4.1]!

–Ein Element der Adele-wertigen Gruppe $\underline{g} = (g_\infty, g_f) \in G(\mathbb{A})$ heißt *angepaßt* (an H), wenn g_∞ angepaßt in obigem Sinne ist (an den endliche Stellen werden also *keine* Bedingungen gestellt). Für ein solcherart angepaßtes $\underline{g}$ hat man dann die „angepaßte Einbettung“

$$\begin{aligned} j_{\underline{g}} : \mathcal{S}^H\big(= H(\mathbb{Q})\big\backslash H(\mathbb{A})\big/\mathsf{K}^H\big) &\longrightarrow \mathcal{S}^G\big(= G(\mathbb{Q})\big\backslash G(\mathbb{A})\big/\mathsf{K}^G\big) \\ [\underline{h}]_H = H(\mathbb{Q}) \cdot \underline{h} \cdot \mathsf{K}^H &\longmapsto [\underline{h} \cdot \underline{g}]_G = G(\mathbb{Q}) \cdot (h_\infty \cdot g_\infty, h_f \cdot g_f) \cdot \mathsf{K}^G, \end{aligned}$$

die genau wegen der Angepaßtheits-Bedingung $\mathsf{K}^H \cdot g_\infty \subset g_\infty \cdot \mathsf{K}^G$ wohldefiniert ist!

Auf endlichem Niveau gibt es gleichermaßen die Abbildungen

$$j_{\underline{g}, K^G_f} : \mathcal{S}^H_{K^H_f(g_f)} \to \mathcal{S}^G_{K^G_f},$$

wenn zu der gegebenen Niveau-Untergruppe $K^G_f \subset G(\mathbb{A}_f)$ (offen-kompakt) das Niveau $K^H_f(g_f) := H(\mathbb{A}_f) \cap g_f \cdot K^G_f \cdot g_f^{-1}$ (*sic!*) für H genommen wird; diese Abbildungen sind jeweils endlichblättrige Überlagerungen ihrer Bildmenge, insbesondere eigentlich.

Diese angepaßten Einbettungen induzieren natürlich Abbildungen der Kohomologiegruppen

$$j^*_{\underline{g}} : H^*(\mathcal{S}^G_{(K^G_f)}, \widetilde{\mathcal{M}}) \to H^*(\mathcal{S}^H_{\left(K^H_f(g_f)\right)}, \widetilde{\mathcal{M}\big|_H})$$

(die man vielleicht als „angepaßt-verschobene Zurückziehung“ beschreiben könnte) für jedes Koeffizientensystem zu einer algebraischen Darstellung $\mathcal{M}$ von $G \times \overline{\mathbb{Q}}$. –Wird hierbei $\mathcal{M} = \underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}} = \mathcal{M}_G(\underline{\lambda}_{\underline{d}})$ gewählt und ist $\underline{\varphi}$ ein algebraischer HECKE-Charakter von P vom ∞-Typ $\Theta_\mathcal{T} * \underline{\lambda}_{\underline{d}}$, so hat man für jedes $\phi_f \in \mathcal{J}_{\underline{\varphi}_f}$ ein Element

$$[\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}}(\omega_{\underline{d}} \times \phi_f)] \in H^{(n-1)\cdot f_0}(\mathcal{S}^G, \widetilde{\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}})$$

und für jedes angepaßte $\underline{g}$ dessen Zurückziehung

$$j^{(n-1)\cdot f_0}_{\underline{g}}\big([\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}}(\omega_{\underline{d}} \times \phi_f)]\big) \in H^{(n-1)\cdot f_0}(\mathcal{S}^H, \widetilde{\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}}).$$

Ist weiterhin η ein algebraischer HECKE-Charakter auf E bzw. auf $H = T_E$, dessen ∞-Typ μ ein Gewicht von H in der Darstellung $\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}\big|_H$ ist (und der bei Betrachtung endlicher Niveaus auf der entsprechenden Niveau-Untergruppe $K^H_f(g_f)$ trivial ist), so gehört hierzu ja, wie im Abschnitt 6.7.3 erläutert, ein Element $[m^\vee_{\eta^{-1}}] \in H^0(\mathcal{S}^H, \widetilde{\underline{\mathcal{M}}^\vee_{\underline{d}}[\mu^{-1}]}) \subset H^0(\mathcal{S}^H, \widetilde{\underline{\mathcal{M}}^\vee_{\underline{d}}})$, das so beschaffen ist, daß das Bilden der Poincaré-Paarung mit ihm[25] (geschrieben $< \bullet, [m^\vee_{\eta^{-1}}] >$) gerade als die Projektion auf den (eindimensionalen!) η-isotypischen Summanden in $H^{(n-1)\cdot f_0}(\mathcal{S}^H, \widetilde{\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}})$ wirkt. Wie in [Ha87, 5.2.2-3] sieht man nun ein, daß für jedes angepaßte $\underline{g} \in G(\mathbb{A})$ und jedes $\underline{h} \in H(\mathbb{A})$ gilt:

$$< j^{(n-1)\cdot f_0}_{\underline{h}\cdot\underline{g}}\big([\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}}(\omega_{\underline{d}} \times \phi_f)]\big), [m^\vee_{\eta^{-1}}] >= \eta(\underline{h})\cdot < j^{(n-1)\cdot f_0}_{\underline{g}}\big([\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}}(\omega_{\underline{d}} \times \phi_f)]\big), [m^\vee_{\eta^{-1}}] >;$$

für ein ab jetzt festes, angepaßtes y_∞ [das im Falle A) in der Eins-Zusammenhangs-Komponente $G(\mathbb{R})^\circ$ gewählt werden kann und soll] ist also die Funktion

$$G(\mathbb{A}_f) \ni g_f \mapsto < j^{(n-1)\cdot f_0}_{(y_\infty, g_f)}\big([\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}}(\omega_{\underline{d}} \times \phi_f)]\big), [m^\vee_{\eta^{-1}}] >$$

ein Element der $H(\mathbb{A}_f)$-induzierten Darstellung $\mathcal{K}_{\eta_f} := \mathrm{Ind}^{G(\mathbb{A}_f)}_{H(\mathbb{A}_f)}(\eta_f)$. Das heißt nun wiederum: die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{T}^{\mathrm{geom}}_f : \mathcal{J}_{\underline{\varphi}_f} & \to & \mathcal{K}_{\eta_f} \\ \phi_f & \mapsto & < j^{(n-1)\cdot f_0}_{(y_\infty, \bullet)}\big([\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}}(\omega_{\underline{d}} \times \phi_f)]\big), m^\vee_{\eta^{-1}} > \end{array}$$

ist ein Verkettungsoperator von $G(\mathbb{A}_f)$-Darstellungen von der im Abschnitt 3.6 untersuchten Form! (Die Charaktere $\underline{\varphi}$ und η stimmen sicherlich auf $Z_G(\mathbb{A}_f) = \mathbb{I}_{F,f}$ überein, da sie „aus demselben Modul $\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}}$ herstammen"; die Nichttrivialitätsbedingung ist noch zu untersuchen). –Dieser durch Integration über einen Doppelquotienten zu H gegebene Verkettungsoperator $\mathsf{T}^{\mathrm{geom}}_f : \mathcal{J}_{\underline{\varphi}_f} \to \mathcal{K}_{\eta_f}$ soll nun mit anderen Verkettungsoperatoren zwischen diesen Darstellungen in Verbindung gebracht werden, wobei der Raum aller dieser Operatoren wieder eindimensional sein sollte; da $\mathsf{T}^{\mathrm{geom}}_f$ nach allem vorher über rationale Abbildungen und rational definierte Unterräume Gesagten ein *rationaler* Operator ist, kann ein Proportionalitätsfaktor zu einem anderen rational definierten Operator damit als algebraische Zahl mit „geeigneten" Galois-Äquivarianz-Eigenschaften nachgewiesen werden; cf. wieder [Ha87].

7.3 Rankin-Entfaltung und adelisches Integral

(Dieser und der folgende Abschnitt profitieren nicht unwesentlich von den Ausführungen in den neuesten Versionen von [Ha05]; die dort benutzten Konventionen gehen allerdings aus den hier benutzten durch Übergang zum Contragredienten auseinander hervor!)

Es werde mit $\rho : G \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}} \to GL_{\overline{\mathbb{Q}}}(\underline{\mathcal{M}}_{\underline{d}})$ die Operation von G auf dem ausgewählten Modul bezeichnet, und es sei $Y_H \in \bigwedge^{(n-1)\cdot f_0} T_{[\mathsf{K}^H]}(X^H)$ ein (rational wählbarer) Erzeuger dieser höchsten äußeren Potenz des Tangentialraums im gewählten „Ursprung" $[\mathsf{K}^H]$ des „symmetrischen Raums" $X^H := H(\mathbb{R})/\mathsf{K}^H$ zu H –dieser Tangentialraum kann natürlich mit einem Quotienten von Lie-Algebren $\mathfrak{h}(\mathbb{R})/\underline{\mathfrak{k}}^H$ identifiziert werden.

[25]anders ausgedrückt: Integration über ganz $\mathcal{S}^H_{K^H_f(g_f)}$ der halmweisen Dualitätspaarung mit seinen Keimen

Zunächst hat man folgende Ausdrücke für den Wert der Paarung zwischen angepaßt-zurückgeholter EISENSTEIN-Klasse und η-Projektor, wobei K_f^H eine „hinreichend klein" zu wählende Niveau-Untergruppe bezeichnet:

$$< j_{(y_\infty,g_f)}^{(n-1)\cdot f_0}\big([\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}}(\omega_{\underline{d}}\times\phi_f)]\big),[m_{\eta^{-1}}^\vee]>=$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{S}^H_{K_f^H}} < \big(\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}}(\omega_{\underline{d}}\times\phi_f)\big)(\mathrm{d}_{j_{(y_\infty,g_f)}}Y_H)\big(\underline{h}\cdot(y_\infty,g_f)\big),m_{\eta^{-1}}^\vee > \mathrm{d}\underline{h}\\
&= \int_{H(\mathbb{Q})\backslash H(\mathbb{A})/\mathsf{K}^H\cdot K_f^H} \eta_f^{-1}(h_f)\cdot < \big(\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}}(\omega_{\underline{d}}\times\phi_f)\big)(\mathrm{d}_{j_{(y_\infty,g_f)}}Y_H)\big(\underline{h}\cdot(y_\infty,g_f)\big),m_{\mu^{-1}}^{0,\vee} > \mathrm{d}\underline{h}\\
&= \int_{\overline{H}(\mathbb{Q})\backslash\overline{H}(\mathbb{A})/K_\infty^{\overline{H}}\cdot K_f^{\overline{H}}} \eta_f^{-1}(h_f)\cdot < \big(\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}}(\omega_{\underline{d}}\times\phi_f)\big)(\mathrm{d}_{j_{(y_\infty,g_f)}}Y_H)\big(\underline{h}\cdot(y_\infty,g_f)\big),m_{\mu^{-1}}^{0,\vee} > \mathrm{d}\overline{\underline{h}};
\end{aligned}$$

für die letzte Gleichheit wurde benutzt, daß der Wert des Integranden sich bei einer Verschiebung des $\underline{h}$-Arguments um ein Element $\underline{z}\in Z_G(\mathbb{A})\cong\mathbb{I}_F$ nicht ändert, da die Einschränkungen der Charaktere $\underline{\varphi}$ auf P und η auf H auf ihre gemeinsame Untergruppe Z_G übereinstimmen; das Integral in der letzten Zeile muß , um Gleichheit zur vorletzten Zeile herzustellen, noch mit dem Volumen der (kompakten) Norm-1-Ideleklassengruppe $\mathbb{I}_F^0/F^*\cong Z_G(\mathbb{Q})\big\backslash Z_G(\mathbb{A})\big/S_G(\mathbb{R})^\circ$ multipliziert werden –aber dieses Volumen kann arithmetisch vernünftig zu 1 normiert werden. Das Integral existiert jedenfalls zweifellos, da es sich um das Integral der durch die konvergente EISENSTEIN-Reihe dargestellten stetigen Funktion über den kompakten Raum $\mathcal{S}^H_{K_f^H}$ handelt!

–Es ist in obigem natürlich $K_\bullet^{\overline{H}}$ das Bild von $K_\bullet^H$ in $\overline{H}(\mathbb{A})=\mathbb{I}_E\big/\mathbb{I}_F$, für $\bullet\in\{\infty,f\}$; „hinreichend klein" zu sein bedeutet für eine Niveau-Untergruppe K_f^H, daß der Charakter η_f auf ihr trivial ist, und unter dieser Maßgabe spielt die Auswahl der Niveau-Untergruppe keine Rolle für den Wert des Integrals, da stillschweigend die Niveauwechsel-invariante Normalisierung der (tr-)Paarung benutzt wird, wie nach [Ha87, 5.3.5.1] in 6.6 gesagt.

Aus diesem Grunde ist das Integral auch dasselbe wie

$$\begin{aligned}
&\int_{\overline{H}(\mathbb{Q})\backslash\overline{H}(\mathbb{A})/K_\infty^{\overline{H}}} \eta_f^{-1}(h_f)\cdot < \big(\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}}(\omega_{\underline{d}}\times\phi_f)\big)(\mathrm{d}_{j_{(y_\infty,g_f)}}Y_H)\big(\underline{h}\cdot(y_\infty,g_f)\big),m_{\mu^{-1}}^{0,\vee} > \mathrm{d}(\overline{h}_\infty,\overline{h}_f)\\
&\overset{(1)}{=} \int\limits_{\overline{H}(\mathbb{Q})\backslash\overline{H}(\mathbb{A})/K_\infty^{\overline{H}}} \eta_f^{-1}(h_f)\cdot < \mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}}\widetilde{(\omega_{\underline{d}}\times\phi_f)}(\mathrm{d}_{j_{(y_\infty,g_f)}}Y_H)\big(\underline{h}\cdot(y_\infty,g_f)\big),m_{\mu^{-1}}^{0,\vee} > \mathrm{d}(\overline{h}_\infty,\overline{h}_f)\\
&\overset{(2)}{=} \int\limits_{\overline{H}(\mathbb{Q})\backslash\overline{H}(\mathbb{A})/K_\infty^{\overline{H}}} \eta_f^{-1}(h_f)\cdot < \rho\big(\underline{h}\cdot(y_\infty,g_f)\big)\cdot\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}}\widetilde{(\omega_{\underline{d}}\times\phi_f)}(Y_H)\big(\underline{h}\cdot(y_\infty,g_f)\big),m_{\mu^{-1}}^{0,\vee} > \mathrm{d}(\overline{h}_\infty,\overline{h}_f)\\
&\overset{(3)}{=} \int\limits_{\overline{H}(\mathbb{Q})\backslash\overline{H}(\mathbb{A})/K_\infty^{\overline{H}}} \eta^{-1}(\underline{h})\cdot < \rho(y_\infty,g_f)\cdot\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}}\widetilde{(\omega_{\underline{d}}\times\phi_f)}(Y_H)\big(\underline{h}\cdot(y_\infty,g_f)\big),m_{\mu^{-1}}^{0,\vee} > \mathrm{d}(\overline{h}_\infty,\overline{h}_f).
\end{aligned}$$

Für die Gleichheit bei (1) wird der Übersetzungsmechanismus $\widetilde{\omega}\,\widehat{=}\,\omega$ zwischen den Räumen $\mathrm{Hom}_{K_\infty^G}\Big(\bigwedge^*(\mathfrak{g}_\mathbb{C}/\mathfrak{k}_\mathbb{C}),\mathsf{C}^\infty\big(G(\mathbb{Q})\big\backslash G(\mathbb{A})\big)\otimes\mathcal{M}\Big)$ und $\Omega^*(\mathcal{S}^G_{(K_f^G)},\widetilde{\mathcal{M}}_\mathbb{C})$ benutzt, wie er in [Ha88, 3.7.8] und in [Ha05, §1] zu finden ist; bei (2) benötigt man die nach Konstruktion bestehenden Invarianz-Eigenschaften eines solchen K_∞^G-Homomorphismus' $\widetilde{\omega}$, und bei (3) wandert nach Anwendung der Paarung mit dem Gewicht-μ^{-1}-Projektor $m^{0,\vee}_{\mu^{-1}}$ auf die ρ-Operation von $\underline{h}$ auf dem Eis-Modulelement gerade ein Faktor $\mu^{-1}(h_\infty^{-1}) = \mu(h_\infty) \overset{(!)}{=} \eta_\infty^{-1}(h_\infty)$ heraus, der den Vorfaktor $\eta_f^{-1}(h_f)$ zum „vollständigen" $\eta^{-1}(\underline{h})$ ergänzt.

Nun nutzt man die vorausgesetzte *absolute* Konvergenz der betrachteten EISENSTEIN-Reihe

$$\mathrm{Eis}_{\underline{\varphi}}\widetilde{(\omega_{\underline{d}} \times \phi_f)}(Y_H)(\bullet) = \sum_{[\gamma]\in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})=\mathbb{P}_F(E)} \widetilde{(\omega_{\underline{d}} \times \phi_f)}(Y_H)(\gamma\cdot\bullet),$$

um durch die (somit legale) Vertauschung von Integration und Summation den oben letztgenannten Integral-Ausdruck in die folgende Form zu bringen:

$$\sum_{[\gamma]} \int\limits_{\overline{H}(\mathbb{Q})\backslash\overline{H}(\mathbb{A})/K_\infty^{\overline{H}}} \eta^{-1}(\underline{h})\cdot < \rho(y_\infty, g_f)\cdot \widetilde{(\omega_{\underline{d}} \times \phi_f)}(Y_H)\big(\gamma\cdot\underline{h}\cdot(y_\infty, g_f)\big), m^{0,\vee}_{\mu^{-1}} > \mathrm{d}(\overline{h}_\infty, \overline{h}_f).$$

Da ja $\overline{H}(\mathbb{Q}) = E^*/F^* = (E\setminus\{0\})/F^* = \mathbb{P}_F(E) \cong P(\mathbb{Q})\big\backslash G(\mathbb{Q})$ hier sowohl als die Summationsmenge der EISENSTEIN-Reihe wie auch als die links ausdividierte diskrete Untergruppe von $\overline{H}(\mathbb{A})$ (bzw. von dessen Quotienten nach $K_\infty^{\overline{H}}$) auftritt, ist der letztgenannte Ausdruck schließlich (nach FUBINI) gleich dem „adelischen Integral"

$$\int\limits_{\overline{H}(\mathbb{A})/K_\infty^{\overline{H}}} \eta^{-1}(\underline{h})\cdot < \rho(y_\infty, g_f)\cdot \widetilde{(\omega_{\underline{d}} \times \phi_f)}(Y_H)\big(\underline{h}\cdot(y_\infty, g_f)\big), m^{0,\vee}_{\mu^{-1}} > \mathrm{d}(\overline{h}_\infty, \overline{h}_f)$$

–diese Umformung des Integrals einer EISENSTEIN-Reihe über einen adelischen Doppelquotienten in ein Integral der „eisensteinisierten" Form über eine volle Gruppe adelewertiger Punkte nennt man die RANKIN-Entfaltung.

Weil natürlich auch das Maß $\mathrm{d}\underline{\overline{h}} = \mathrm{d}(\overline{h}_\infty, \overline{h}_f) = \prod_{v\in\mathbb{V}_\mathbb{Q}} \mathrm{d}\overline{h}_v = \prod_{\mathfrak{v}\in\mathbb{V}_F} \mathrm{d}\overline{h}_\mathfrak{v}$ ein Produktmaß ist [z.B. das TAMAGAWA-Maß auf dem eingeschränkten direkten Produkt $\overline{H}(\mathbb{A}) = \prod'_{\mathfrak{v}\in\mathbb{V}_F} \overline{H}_0(F_\mathfrak{v})$], kann ein solches Integral (im Falle eines faktorisierbaren Integranden, der oBdA vorliegt) als das Produkt über alle Stellen der lokalen Integrale berechnet werden, oder (hier) besser: die Integrale an allen nichtarchimedischen Stellen werden zu einem Integral $\int_{\overline{H}(\mathbb{A}_f)} \eta_f^{-1}(h_f)\cdot\phi_f(h_f\cdot g_f)\mathrm{d}\overline{h}_f = \big(\mathsf{T}^{\mathrm{int}}_{f;\,\underline{\varphi}_f,\eta_f}(\phi_f)\big)(g_f)$ zusammengefaßt, das nun mit den Ergebnissen von Abschnitt 3.6 in Verbindung gebracht werden kann (wozu noch eine Analyse des Verhältnisses der Charaktere $\underline{\varphi}$ und η zueinander nötig ist), um schließlich $\mathsf{T}^{\mathrm{int}}_f$ als ein L-Quotienten-Vielfaches eines weiteren Verkettungsoperators zu erhalten.

Es verbleibt für den folgenden Abschnitt die Auswertung des Integrals an den archimedischen Stellen von F, das sich einer ähnlichen Deutung als Verkettungsoperator entzieht: die Auswahl einer maximalkompakten Untergruppe K_∞^G hat hier eine Symmetrie gebrochen! Wenn sich hierbei eine handhabbare Zahl ergibt (z.B. ein Bruch in verkneteten Γ-Funktionen), so erlaubt dies zunächst Rückschlüsse auf die Proportionalitätsfaktoren zwischen $\mathsf{T}^{\mathrm{geom}}_f$ und den anderen schon genannten Verkettungsoperatoren $\mathsf{T}^{\mathrm{int}}_f, \mathsf{T}^{\mathrm{loc}}_f$ in $\mathrm{Hom}_{G(\mathbb{A}_f)}(\mathcal{J}_{\underline{\varphi}_f}, \mathcal{K}_{\eta_f})$ und dann durch Einsatz der bekannten bzw. noch nachzutragenden Rationalitätseigenschaften letztendlich einen Beweis des *Theorems 1* von HARDER!

7.4 Zum Integral an einer komplexen Stelle

Es sei $\tau = |\sigma|$ eine der komplexen Stellen von F; das Integral, das als Faktor an dieser Stelle des im vorigen Abschnitt mühevoll entfalteten Integrals auftritt, hat dann die folgende Gestalt:

$$\int_{\overline{H}(F_\tau)/K_\tau^{\overline{H}}} \eta_\tau^{-1}(h_\tau) \cdot < \rho(y_\tau) \cdot \widetilde{\omega_{d_\sigma, d_{c\sigma}}}(Y_{H,\tau})(h_\tau \cdot y_\tau), (m_{\mu^{-1}}^{0,\vee})_\tau > \mathrm{d}\overline{h}_\tau.$$

Es wird nun F_τ mit $\mathbb{C}$ identifiziert, so daß alle Subskripte τ verschwinden, was zunächst die Lesbarkeit erhöht; dann wird jetzt skrupellos $\overline{H}$ für die Gruppe $\overline{H}_0(F_\tau) \cong (\mathbb{C}^*)^{n-1}$ geschrieben, desgleichen für andere Gruppen wie den Diagonaltorus T; die maximalkompakten Untergruppen seien dann einfach als K^H und K^T geschrieben; und es sei $\overline{T} := T/Z_G$. Dann nutzt man die Eigenschaft von y, angepaßt an H zu sein, so daß also $H \cdot y = y \cdot T$ gilt, um das nun betrachtete (lokale) Integral als ein Integral über $\overline{T}/K^{\overline{T}}$ umzuschreiben, wobei diese Quotientengruppe von T als die Untergruppe der Diagonalmatrizen mit positiv-reellen Einträgen realisiert wird:

$$\overline{T}/K^{\overline{T}} \mathrel{\widehat{=}} \mathsf{A}_T^{(1)} := \{\underline{t} = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) \mid t_j \in \mathbb{R}^{>0}, \prod_{j=1}^{n} t_j = 1\} \cong (\mathbb{R}^{>0})^{n-1}!$$

Das lokale Integral an der archimedischen Stelle τ ist also

$$= \int_{\mathsf{A}_T^{(1)}} \mu(\underline{t}) \cdot < \rho(y) \cdot \widetilde{\omega_{d',d''}}(Y_H)(y \cdot \underline{t}), m_{\mu^{-1}}^{0,\vee} > \mathrm{d}\underline{t}\ !$$

. . . .

Eine weitere Bearbeitung dieses Integrals ist in Abschnitt §3.3 von [Ha05] skizziert: Im obigen Integranden hat man als *ersten* Faktor den Charakterwert $\eta^{-1}(h) \mathrel{\widehat{=}} \mu(\underline{t})$. Aus dem $< \cdot, \cdot >$-Ausdruck kann als *zweiter* Faktor der Wert von φ_τ auf dem $a_{1,1}$-Eintrag des P-Anteils der Iwasawa-Zerlegung von $y \cdot \underline{t}$ herausgezogen werden, dies ist also eine Potenz der euklidischen Norm der ersten Spalte dieser Matrix. Der verbleibende *dritte* Faktor sollte sich dann gemäß (loc.cit.) als ein Monom in den Einträgen der ersten Spalte des $K \mathrel{\widehat{=}} SU(n)$-Anteils der genannten Iwasawa-Zerlegung schreiben lassen, da die „kohomologietragende“ Darstellung $\mathrm{Sym}^{n+d'+d''}(\mathbb{C}^n)$ (der minimale K-Typ in $\mathcal{J}_{\underline{\varphi}_\infty}$) eine natürliche Realisierung als ein Raum von Polynomfunktionen in den Koordinaten des ersten Spaltenvektors der Matrizen hat. –Die Exponenten des genannten Monoms sollten gerade durch den ∞-Typ μ gegeben sein. (Der Verfasser ist derzeit nicht in der Lage, diese "easy verification" korrekt nachzuvollziehen; sie erfordert genaue Kontrolle der involvierten Identifikationen, Projektionen, Höchstgewichts-Modulelemente, Höchstgrad-Differentialformen und -Tangentialvektoren.)

Die Einträge der ersten Spalte des K-Iwasawa-Anteils von $y \cdot \underline{t} = c_E^{-1} \cdot \underline{t}$ sind nun einigermaßen zugänglich: es wurde (ein geeignetes) c_E^{-1} auf der Seite 135 in Termen der komplexen Wurzeln eines Minimalpolynoms der Erweiterung $E \supset F$ bestimmt, und der Abschnitt 5.2 stellt dann die gewünschte erste Spalte zur Verfügung. Eine *lineare* Substitution der Integrationsvariablen t_i mit den Einträgen der ersten Spalte von c_E^{-1} (oder ihren Beträgen?) bringt dann den Integranden auf die Form eines Quotienten von Monomen in den t_i und in Ausdrücken der Form $\sqrt{1 + t_1^2 + \ldots + t_k^2}$, wobei die Exponenten aus den ∞-Typen der beteiligten Charaktere und Gewichte ablesbar sein sollten. Ein derartiges Integral ist dann hoffentlich von einer Gestalt, die mit den Methoden des Exkurses über Integrale vom EULER-Typ ausgewertet werden kann[26]; jedenfalls sollte sofort klar sein, daß sein Wert von 0 verschieden ist (wodurch dann u.a. die Nichttrivialität der EISENSTEIN-Kohomologieklassen bestätigt wird, falls daran noch Zweifel bestanden). Außerdem sollte dieser Wert „universell“ für alle Erweiterungen E von festem Grad über F sein und nur von den Exponenten aus den beteiligten Gewichten und ∞-Typen abhängen! –Das Produkt der Faktoren aus den Substitutionen sorgt dann wieder für die „Individualität“ bezüglich E und η; es ist wohl im wesentlichen eine signierte Quadratwurzel aus der Diskriminante von E über F, und dies wird ja für die GALOIS-Äquivarianz der Zahlen $L^*(\eta)$ gerade benötigt. –Schließlich muß man noch klären, *welches* Gewicht μ in *welcher* Darstellung $\underline{\mathcal{M}_d}$ man denn nun braucht, um für einen gegebenen (in 0 rechtskritischen) algebraischen HECKE-Charakter η den geeigneten Quotienten $L^*(\eta)$ von L-Werten mittels obiger Paarung und Integral-Auswertung als Proportionalitätsfaktor von $\mathsf{T}_f^{\text{geom}}$ und $\mathsf{T}_f^{\text{loc}}$ zu präparieren.

[26]und zwar zu einer rationalen Zahl?!

Literatur

[Co79] Automorphic Forms, Representations, and L-Functions (A. Borel, W. Casselman, eds.); Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XXXIII, AMS, Princeton 1979

[AT84] Arbeitstagung Bonn 1984 (F. Hirzebruch, J. Schwermer, S. Suter, eds.); Springer LNM 1111, Berlin Heidelberg New York 1985

[Lu92] Cohomology of Arithmetic Groups and Automorphic Forms (J.-P. Labesse, J. Schwermer, eds.); Springer LMN 1447, Berlin Heidelberg New York 1993

[Ed97] Representation Theory and Automorphic Forms (T.N. Bailey, A.W. Knapp, eds.); Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 61, AMS, Providence 1997

[Bl86] Don Blasius: On the critical values of Hecke L-Values; Annals of Math. 124 (1986), pp. 23–63

[Bl97] Don Blasius: Period relations and critical values of L-Values; Pacific J. Math. 181 (1997), pp. 53–83

[BS73] Armand Borel, Jean-Pierre Serre: Corners and Arithmetic Groups; Comm. math. helv. 48 (1973), pp. 436–491

[BW00] Armand Borel, Nolan R. Wallach: Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups (Second Ed.); Math. Surveys and Monographs 67, AMS, Providence 2000

[Ch51] Claude Chevalley: Deux théorèmes d'arithmétique; J. Math. Soc. Japan 3 (1951), pp. 36–44

[Co] Brian Conrad: Finiteness of class numbers for algebraic groups; preprint, vor 2004, `http://www.math.lsa.umich.edu/~bdconrad/papers/cosetfinite.ps`

[DeVP] Pierre Deligne: Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales; pp. 313–346 in [Co79], vol. II

[DeVS] Pierre Deligne: Variétés de Shimura: Interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques; pp. 247–290 in [Co79], vol. II

[Fl81] Daniel Flath: A comparison of the automorphic representations of $GL(3)$ and its twisted forms, Pacific J. of Math. 97 (1981), pp. 373–402

[FMT] Jens Franke, Yuri I. Manin, Yuri Tschinkel: Rational points of bounded height on Fano varieties; inv. math. 95 (1989), pp. 421–435

[FH91] William Fulton, Joe Harris: Representation Theory; Springer, Berlin Heidelberg New York 1991

[GHM94] Mark Goresky, Günter Harder, Robert MacPherson: Weighted cohomology; inv. math. 116 (1994), pp. 139–213

[Gr01] Loïc GRENIÉ: Special values of automorphic L-functions for $GL(r) \times GL(r)$; preprint MPI 2001 - 10, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn 2001; erschienen als: Critical values of automorphic L-functions for $\mathrm{GL}(r) \times \mathrm{GL}(r)$; Manuscripta Math. 110 (2003), pp. 283–311.

[HZ01] Michael HARRIS, Steven ZUCKER: Boundary cohomology of Shimura varieties, III: Coherent cohomology of higher-rank boundary strata and applications to Hodge theory; Mém. Soc. Math. France (N.S.) 85 (2001)

[Ha81] Günter HARDER: Period integrals of Eisenstein cohomology classes and special values of some L-functions; pp. 103–142 in: Number theory related to FERMAT's last theorem (Cambridge, Mass., 1981), N. KOBLITZ, ed.; Birkhäuser, Boston 1982

[HaAA] Günter HARDER: Eisensteinkohomologie arithmetischer Gruppen: Allgemeine Aspekte; preprint (1986?)

[HaR1] Günter HARDER: Der Rang-1-Beitrag zur Eisensteinkohomologie; Manuskript (ca. 1988?)

[Ha87] Günter HARDER: Eisenstein cohomology of arithmetic groups. The case GL_2; inv. math. 89 (1987), pp. 37–118

[Ha88] Günter HARDER: Kohomologie arithmetischer Gruppen: Versuch eines Lehrbuchs; Skriptum zu Vorlesungen an der Universität Bonn im akademischen Jahr 1987/88

[Ha92] Günter HARDER: Some results on the Eisenstein cohomology of arithmetic subgroups of GL_n; pp. 85–153 in [Lu92]

[Ha99] Günter HARDER: Letter to A. Gončarov, 9/99 (persönliche Mitteilung)

[Ha05] Günter HARDER: Notes on "anisotropic" modular symbols and maximally residual Eisenstein cohomology for GL_n over totally imaginary number fields, diverse Versionen seit 11/2002 (persönliche Mitteilung)

[Ha03] Günter HARDER: Modular symbols and Special values of automorphic L-functions, preprint 2003, `http://www.math.uni-bonn.de/people/harder/Eisenstein/Modsym.dvi`

[Ha06?] Günter HARDER: Lectures on Algebraic Geometry I, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 2006 (?), Vorversion auf `http://www.math.uni-bonn.de/people/harder/buch/Algeom.pdf`

[HaSc] Günter HARDER, Norbert SCHAPPACHER: Special Values of Hecke L-Functions and Abelian Integrals; pp. 17–49 in [AT84]

[HaSt] Günter HARDER, Ulrich STUHLER: Reduction theory; preprint 1999 (erhältlich als `ftp.math.uni-bonn.de/people/harder/trieste/redm17.ps`)

[Ka95] David KAZHDAN: "Forms" of the Principal Series for $\underline{GL_n}$; pp. 153–171 in: Functional analysis on the eve of the 21st century, S. GINDIKIN (ed.), Progress in Mathematics 131, Birkhäuser, Boston 1995

[KV95] Anthony W. KNAPP, David A. VOGAN: Cohomological Induction and Unitary Representations; Princeton University Press, Princeton 1995

[Kn03] Anthony W. KNAPP: The Gindikin-Karpelevič formula and intertwining operators, pp. 145–159 in: Lie groups and symmetric spaces, AMS Transl. Ser. 2, 210, AMS, Providence 2003

[Ma79] Ian G. MACDONALD: Symmetric Functions and Hall Polynomials; Oxford University Press, Oxford 1979

[Mœ97] Colette MŒGLIN: Representations of $GL(n, F)$ in the nonarchimedean case; pp. 303–319 in [Ed97]

[Os03] Toshio OSHIMA: A calculation of c-functions for semisimple symmetric spaces, pp. 307–330 in: Lie groups and symmetric spaces, AMS Transl. Ser. 2, 210, AMS, Providence 2003

[Pi95] Christian PIERRE: Endomorphism from Galois antiautomorphism, Bull. Belg. Math. Soc. 2 (1995), pp. 435-445

[PR91] Vladimir Petrovič PLATONOV, Andreĭ S. RAPINČUK: Algebraičeskie Gruppy i Teoria Čisel'; Izd. Nauka, Moskva, 1991; engl. Übers. : Algebraic Groups and Number Theory; Academic Press, San Diego, 1994

[Ro96] Jürgen ROHLFS: Projective limits of locally symmetric spaces and cohomology; J. Reine Angew. Math. 479 (1996), pp. 149–182.

[Sc79] Stephen Hoel SCHANUEL: Heights in number fields; Bull. Soc. math. France 107 (1979), pp. 433–449

[Schap] Norbert SCHAPPACHER: Periods of Hecke Characters; Lecture Notes in Mathematics 1301, Springer, Berlin Heidelberg New York 1988

[JS96] Johannes SCHLIPPE: Vergleich von Spurformeln zu inneren Formen von $GL(2)$ über totalreellen Zahlkörpern: topologische Beiträge; Diplomarbeit am Mathematischen Institut der Universität Bonn, 1996 (unveröffentlicht)

[Schm] Claus-Günther SCHMIDT: Arithmetik Abelscher Varietäten mit komplexer Multiplikation; Lecture Notes in Mathematics 1082, Springer, Berlin Heidelberg New York 1984

[Se64] Jean-Pierre SERRE: Sur les groupes de congruence des variétés abéliennes; Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 28 (1964), pp. 3–18

[Se68] Jean-Pierre SERRE: Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves; W. A. Benjamin, New York–Amsterdam 1968

[Si69] Carl Ludwig SIEGEL: Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen; Nachr. Ak. Wiss. Göttingen 1969, pp. 87–102

[Si70] Carl Ludwig SIEGEL: Über die FOURIERschen Koeffizienten von Modulformen; Nachr. Ak. Wiss. Göttingen 1970, pp. 15–56

[Vo98] Valentin Evgen'evič VOSKRESENSKIĬ: Algebraic Groups and their Birational Invariants; Translations of Mathematical Monographs 179, AMS, Providence 1998

[We73] André WEIL: Basic Number Theory (Second Ed.); Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 144, Springer, Berlin Heidelberg New York 1973

[Wi85] Franck WIELONSKY: Séries d'Eisenstein, intégrales toroïdales et une formule d'Hecke; L'Enseignement Math. 31 (1985), pp. 93–135