Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Wintersemester 2016/17

Anwesenheitsaufgaben für die Tutorien der 13. Woche
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. Sei $n \geq 1$ eine positive natürliche Zahl. Berechne die Determinante folgender Matrix:

$$B_n := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $m, n \geq 1$ positive natürliche Zahlen. Sei weiterhin $A \in M(m \times n, K)$ und bezeichne mit $r = \mathrm{rg}(A)$ den Rang von A. Zeige, dass man durch Streichen von gewissen $(n-r)$ Spalten und $(m-r)$ Zeilen von A eine $r \times r$ Matrix B mit $\det(B) \neq 0$ erhalten kann.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $n \geq 2$ eine gerade positive natürliche Zahl. Sei weiterhin $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i < j; \\ 0 & \text{für } i = j; \\ -1 & \text{für } i > j. \end{cases}$$

Zeige, dass $\det(A) = 1$.

Aufgabe 4. *Invertierbarkeit bleibt erhalten unter kleinen Veränderungen*
Sei K ein Körper, sei $n \geq 1$ eine positive natürliche Zahl, und seien $A, B \in M(n \times n, K)$.

(a) Sei t eine formale Variable. Zeige, dass $\det(A + tB)$ ein Polynom in t mit Koeffizienten in K und vom Grad $\leq n$ ist; d.h. zeige, dass es Elemente $c_i \in K$ mit

$$\det(A + tB) = \sum_{i=0}^{n} c_i t^i$$

gibt.

(b) Bestimme c_0 und c_n aus Teil (a).

(c) Sei nun $K = \mathbb{R}$ und $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ invertierbar. Zeige, dass es eine reelle Zahl $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\delta \geq \epsilon \geq 0$, die Summe $A + \epsilon B$ invertierbar ist.

Aufgabe 5. Sei $n \geq 1$ eine positive natürliche Zahl. Sei weiterhin $\pi \in S_n$ ein k-Zykel. Zeige, dass für jedes $\tau \in S_n$, das Element $\tau \circ \pi \circ \tau^{-1}$ ebenfalls ein k-Zykel ist. Beschreibe diesen Zykel explizit.