

Kleine AG

Spezielle Holonomiegruppen

am Samstag, den 8. Juli 2006 in Bonn

Organisatoren: Christian Liedtke (Düsseldorf)
Martin Möller (Essen)

1. EINLEITUNG

Zu einer (kompakten, zusammenhängenden und orientierbaren) n -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) gibt es genau einen torsionsfreien Zusammenhang ∇_g , der mit der Metrik g verträglich ist, den sogenannten *Levi-Civita-Zusammenhang*.

Mit ∇_g kann man nun Tangentialvektoren entlang von Schleifen verschieben. Die so entstehenden linearen Abbildungen erzeugen eine Untergruppe $\text{Hol}(g)$ von $SO(n)$, die sogenannte *Holonomiegruppe*. Diese Gruppe ist nach dem Satz von Borel und Lichnerowicz eine kompakte Liegruppe und man sollte erwähnen, daß man durch leichtes "wackeln" an einer gegebenen Metrik g immer eine Metrik \tilde{g} mit $\text{Hol}(\tilde{g}) = SO(n)$ erhalten kann.

Sei $\text{Hol}_0(g)$ die Zusammenhangskomponente der Identität von $\text{Hol}(g)$. Nach einem Satz von deRham kann man annehmen, daß $\text{Hol}_0(g)$ irreduzibel auf dem Tangentialraum von M operiert, da sonst die universelle Überlagerung von M die Struktur eines Produkts hat, dessen Faktoren zu den irreduziblen Unterdarstellungen von $\text{Hol}_0(g)$ korrespondieren. Der Satz von Berger besagt nun, daß in dieser Situation nur erstaunlich wenige Gruppen als Holonomiegruppen in Frage kommen:

Theorem 1 (Berger). *Sei M eine einfach-zusammenhängende, kompakte und orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. Falls $\text{Hol}_0(g)$ dann irreduzibel auf $T_p M$ operiert, so ist eine der folgenden Aussagen wahr:*

- (1) $\text{Hol}_0(g) = SO(n)$.
- (2) M ist lokal symmetrisch.
- (3) M ist kählersch und $\text{Hol}_0(g) = U(n/2)$.
- (4) M ist kählersch, Ricci-flach und $\text{Hol}_0(g) = SU(n/2)$.
- (5) $\text{Hol}_0(g) = Sp(1)Sp(n/4)$.
- (6) $\text{Hol}_0(g) = Sp(n/4)$.
- (7) $n = 7$ und $\text{Hol}_0(g) = G_2$.
- (8) $n = 8$ und $\text{Hol}_0(g) = Spin(7)$.

Daß tatsächlich alle Fälle auftreten ist inzwischen auch in den letzten beiden Fällen positiv von Joyce beantwortet worden.

Die Bedeutung dieses Satzes für die komplexe algebraische Geometrie besteht darin, daß $\text{Hol}_0(g) \subseteq U(n/2)$ äquivalent dazu ist, daß die Mannigfaltigkeit eine Kähler-Mannigfaltigkeit ist. Ferner ist $\text{Hol}_0(g) \subseteq SU(n/2)$ äquivalent dazu, daß $c_1^{\mathbb{R}}(M) \in H^2(M, \mathbb{R})$ verschwindet.

Eine Anwendung des Satzes von Berger ist die folgende Klassifikation, die unabhängig von Beauville und Bogomolov gefunden worden ist.

Theorem 2 (Beauville-Bogomolov). *Sei M eine kompakte Kählermannigfaltigkeit mit $c_1^{\mathbb{R}}(M) = 0$. Dann gibt es eine endliche Überlagerung von M , die ein Produkt von Mannigfaltigkeiten ist, deren Faktoren von folgenden Typen ist*

- (1) *komplexe Tori,*
- (2) *einfach-zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit $\text{Hol}(g) = \text{SU}(d)$,*
- (3) *einfach-zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit $\text{Hol}(g) = \text{Sp}(d)$.*

Je nach Autor und Buch heißen die Mannigfaltigkeiten im zweiten Fall *Calabi-Yau* und die im dritten Fall *Hyperkähler*.

Für die ersten beiden Klassen gibt es eine Fülle von Beispielen. Z.B. erhält man durch glatte Hyperfläche vom Grad d im $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{d+1}$ Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten (im Sinne der obigen Definition) in jeder Dimension $d \geq 3$. Die Konstruktion von Hyperkählermannigfaltigkeiten hingegen ist um einiges schwieriger.

2. DAS PROGRAMM

1. Vortrag: Zusammenhänge, Holonomie und (Ricci-) Krümmung (45min)

Zunächst sollte an den Levi-Civita-Zusammenhang und seinen Krümmungstensor erinnert werden, z.B. [Huy, Abschnitte 2.2 und 2.4] oder [Bes, Kapitel 1B und 1C]. Da kein Mensch den vollständigen Krümmungstensor versteht, erhalten wir durch Spur nehmen die Ricci-Krümmung, [Bes, Kapitel 1F].

Dann sollten die Holonomiegruppen $\text{Hol}(g)$ und $\text{Hol}_0(g)$ definiert werden, mit elementaren Eigenschaften wie in [Huy, Abschnitt 2.3] oder [Bes, Abschnitt 10.B]. Wir wollen uns auf irreduzible Holonomiegruppen zurückziehen und benötigen den Zusammenhang zu lokalen Produktstrukturen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten, siehe [Bes, Abschnitt 10.D].

2. Vortrag: Liegruppen, (lokal) symmetrische Räume und Sphären (45min)

Wir benötigen die Klassifikation von Lie-Gruppen, die transitiv auf der Sphäre \mathbb{S}^{n-1} operieren ([Bes, Example 7.13]). An die Definition aller vorkommenden Liegruppen sollte erinnert werden. Der Beweis ([Bo1] und [Bo2]) sollte maximal in Form einer Skizze auftreten.

Nun sollte kurz an den Begriff des (lokal) symmetrischen Raums erinnert werden, [Bes, Kapitel 7F] und [Bes, Definition 10.76]. Ein Satz von E. Cartan ([Bes] Theorem 10.72) charakterisiert lokal symmetrische Räume durch das Verschwinden der kovarianten Ableitung des Krümmungstensors. Zumindest eine Skizze des Beweises wäre schön. Die Klassifikation von symmetrischen Räumen würde eine weitere 'kleine AG' benötigen.

3. Vortrag: Der Satz von Berger (60min)

Das Ziel dieses Vortrags ist das folgende Resultat, wobei wir dabei Simons' Beweis [Si] folgen werden.

Theorem 3 (Berger). *Sei $n = \dim M$. Wir behalten die bisher eingeführten Bezeichnungen und Konventionen bei. Dann gilt folgendes:*

- (1) *M ist lokal symmetrisch oder*
- (2) *es gibt ein $0 \neq v \in T_p M$, so daß die Bahn $\text{Hol}(g) \cdot v$ die $(n - 1)$ -dimensionale Sphäre \mathbb{S}^{n-1} vom Radius $\|v\|$ ist.*

Dazu geht man wie folgt vor: Der Satz von Ambrose-Singer ([Bes, Theorem 10.58]) sagt, daß die Lie-Algebra der Holonomie-Gruppe von Konjugaten von Ricci-Krümmungstensenoren erzeugt wird. Wenn (2) nicht gilt möchte man zeigen, daß diese verschwinden und M folglich lokal symmetrisch ist. Zentral ist dabei Simons Begriff eines saturierten Holonomie-Systems ([Si], [Bes, Abschnitt 10.H]).

Theorem 1 folgt hieraus und aus dem 2.Vortrag. Wenn noch Zeit bleibt, kann man noch ein paar Worte zum nicht einfach-zusammenhängenden Fall ([Bes, Abschnitt 10.I]) sagen.

4. Vortrag: Kähler-Einstein-Metriken und Ricci-Krümmung (45min)

Jetzt sollte erklärt werden, warum $\text{Hol}(g) \subseteq U(d)$ äquivalent dazu ist, daß die Mannigfaltigkeit kählersch ist ([Jo, Proposition 4.1]).

Die Ricci-Krümmung der Kählermetrik definiert dann in $H^2(M, \mathbb{R})$ genau die Klasse von $c_1^{\mathbb{R}}(M)$, [Jo, Section 4.4] Dies führt auf den Begriff der Kähler-Einstein-Metrik.

Eine Kählermannigfaltigkeit M mit Ricci-flacher Kählermetrik g erfüllt also $c_1^{\mathbb{R}}(M) = 0$. Ferner gilt dann $\text{Hol}(g) \subseteq SU(d)$, [Ber, Lemma 399] und die Bemerkung zu den Ricci-flachen Holonomiegruppen in [Jo, Abschnitt 3.5].

Erstaunlicherweise gilt nun auch die Umkehrung, daß $c_1^{\mathbb{R}}(M) = 0$ impliziert, daß es eine Ricci-flache Kählermetrik auf M gibt. Dies wurde von Calabi vermutet und von Yau bewiesen, [V, Theorem 1.5], [Jo, Kapitel 5] und [Bes, Kapitel 11].

5. Vortrag: Der Satz von Bogomolov-Beauville (45min)

Am besten nur anskizzieren wie man mit Yau's Satz [V, Theorem 1.5] und dem Satz von Berger den Satz von Bogomolov-Beauville (Theorem 2 oben) beweisen kann, siehe [V, Theorem 1.6], [Jo, Theorem 5.4] oder [Bea]. Dies führt dann zur Definition von Calabi-Yau- und Hyperkähler-Mannigfaltigkeiten.

Die Holonomiebedingungen kann man nun algebraisch umformulieren: [Jo, Lemma 4.4], [Jo, Proposition 4.5] für Calabi-Yau's und [Jo, Theorem 5.11] für Hyperkählermannigfaltigkeiten.

Falls nun noch etwas Zeit bleiben sollte, wäre es schön, ein paar Beispiele für Hyperkählermannigfaltigkeiten zu geben: K3's in Dimension 2 und $\text{Hilb}^n(K3)$ in höheren Dimensionen [Huy, Kapitel 21.2] (deren holomorphe symplektische Struktur bekommt man fast geschenkt!).

LITERATUR

- [Bea] A. Beauville, *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. Diff. Geom. 18, 755-782 (1983).
- [Ber] M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer (2003).
- [Bes] A.L. Besse, *Einstein Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik 10, Springer (1987)
- [Bo1] A. Borel, *Some remarks about Lie groups transitive on spheres and tori*, Bull. AMS 55, 580-587 (1949).
- [Bo2] A. Borel, *Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris 230, 1378-1380 (1950).
- [Huy] D. Huybrechts, *Compact Hyperkähler Manifolds*, Part III von *Calabi-Yau Manifolds and Related Geometries*, Springer Universitext (2003).
- [Jo] D. Joyce, *Riemannian Holonomy Groups and Calibrated Geometry*, Part I von *Calabi-Yau Manifolds and Related Geometries*, Springer Universitext (2003).
- [Si] J. Simons, *On the transitivity of holonomy systems*, Ann. of Math. (2) 76, 213-234 (1962).
- [V] C. Voisin, *Mirror Symmetry*, SMF/AMS Texts and Monographs 1, Panoramas et Synthèses Numéro 2 (1996).