

Aufgabe 1 (Bonusaufgabe). Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge der Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Angenommen, jedes f_n ist beschränkt und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass f ebenfalls beschränkt ist. (3 Bonuspkt.)
- (b) Wir zeigen nun, dass punktweise Konvergenz in (a) nicht ausreicht, um die Beschränktheit von f zu folgern. Seien zum Beispiel $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und f gegeben durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/n) \\ \frac{1}{x}, & x \in [1/n, 1], \end{cases} \quad f(x) := \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1/x, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Zeigen Sie dass jedes f_n beschränkt ist, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert, aber dass f unbeschränkt ist. (3 Bonuspkt.)

- (c) Angenommen, jedes f_n ist monoton wachsend und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass f ebenfalls monoton wachsend ist. (3 Bonuspkt.)

Hinweis: Zeigen Sie für $x, y \in [0, 1]$ mit $y > x$ dass $f(y) \geq f(x) - \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$.

- (d) Angenommen, jedes f_n ist monoton wachsend und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. (3 Bonuspkt.)

Lösung. (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $C_n \in \mathbb{R}$ so dass $|f_n(x)| \leq C_n$ für alle $x \in [0, 1]$. Da (f_n) gleichmäßig konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq n_0$ gilt $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f_n(x)| < 1$. Dann gilt für alle $x \in [0, 1]$ dass

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < 1 + C_n,$$

und somit ist f beschränkt.

- (b) Jedes f_n ist beschränkt, da $|f_n(x)| \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, 1]$. Für alle $x \in (0, 1]$ konvergiert $f_n(x)$ gegen $f(x) = 1/x$, da $f_n(x) = 1/x$ für alle $n > 1/x$ (und für $x = 0$ ist $f_n(x) = f(x) = 0$ für alle n). Aber die Funktion f ist nicht beschränkt, denn für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ beliebig und $x \in (0, 1/n)$ gilt $f(x) > n$.

- (c) Sei $y > x$. Wir müssen zeigen dass $f(y) \geq f(x)$, und hierfür genügt es zu zeigen dass $f(y) \geq f(x) - \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$. Gegeben $\epsilon > 0$, folgt aus der punktweisen Konvergenz dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $|f(y) - f_n(y)| \leq \epsilon/2$ und $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon/2$. Insbesondere gilt

$$f(y) \geq f_n(y) - \epsilon/2, \quad \text{und} \quad f_n(x) \geq f(x) - \epsilon/2.$$

Benutzen wir dass f_n monoton wachsend ist, so folgt

$$f(y) \geq f_n(y) - \epsilon/2 \geq f_n(x) - \epsilon/2 \geq f(x) - \epsilon.$$

- (d) Sei $\epsilon > 0$. Da f stetig ist und $[0, 1]$ kompakt ist, folgt dass f gleichmäßig stetig ist (Satz 8.15). Deswegen existiert $\delta > 0$ sodass für alle $x, y \in [0, 1]$ gilt

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (*)$$

Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 1/\delta$, und setzen $a_j := j/N$ für $j = 0, 1, \dots, N$. Wegen der punktweisen Konvergenz folgt dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert sodass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|f(a_j) - f_n(a_j)| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (**)$$

Sei nun $x \in [0, 1]$, und wähle j sodass $x \in [a_j, a_{j+1}]$. Dann folgt

$$f(x) - \epsilon \stackrel{(*)}{\leq} f(a_j) - \frac{\epsilon}{2} \stackrel{(**)}{\leq} f_n(a_j) \leq f_n(x) \leq f_n(a_{j+1}) \stackrel{(**)}{\leq} f(a_{j+1}) + \frac{\epsilon}{2} \stackrel{(*)}{\leq} f(x) + \epsilon.$$

Somit ist bewiesen dass für alle $x \in X$ und für alle $n \geq n_0$ gilt $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$. \square

Aufgabe 2 (Grenzwerte von Funktionen). Bestimmen Sie mit Beweis für die nachfolgenden Funktionen $f_j: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f_j(x)$.

(a) $f_1(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$. (3 Pkt.)

(b) $f_2(x) := \exp\left(\frac{x^4}{1+x^2}\right) \exp(-x^2)$. (3 Pkt.)

Lösung. (a) Wir benutzen die Gleichheit $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ für $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und berechnen:

$$f_1(x) = \frac{(x + \sqrt{x}) - x}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\sqrt{x}} + 1}.$$

Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/\sqrt{x} = 0$, und mit den Rechenregeln für Grenzwerte und mit der Stetigkeit der Wurzelfunktion folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}.$$

(b) Wir schreiben

$$f_2(x) = \exp\left(\frac{x^4}{1+x^2} - x^2\right) = \exp\left(\frac{x^4}{1+x^2} - \frac{x^2 + x^4}{1+x^2}\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{1/x^2 + 1}\right).$$

Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^2 = 0$, und mit den Rechenregeln für Grenzwerte und mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = \exp\left(-\frac{1}{0+1}\right) = \exp(-1) = e^{-1}. \quad \square$$

Aufgabe 3 (Ableitungen). Bestimmen Sie die Ableitungen der nachfolgenden Funktionen.

(a) $\exp(x \sin x)$ für $x \in \mathbb{R}$. (2 Pkt.)

(b) $\sqrt{\exp(-x^2)}$ für $x \in \mathbb{R}$. (2 Pkt.)

(c) $x^{(x^x)}$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$. (3 Pkt.)

(d) $\frac{\tan x}{1+(\ln x)^2}$ für $x \in (0, \pi/2)$. (3 Pkt.)

Lösung. Wir benutzen in dieser Aufgabe die Rechenregeln aus Abschnitt 9.2 und die in Abschnitt 9.4 gegebenen Ableitungen von \exp , \sin , \cos und \ln sowie die Ableitung von \tan (Präsenzblatt 10, Aufgabe 5(a)).

(a)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\exp(x \sin x)) &\stackrel{9.9}{=} \left(\frac{d}{dx}(x \sin x)\right) \exp'(x \sin x) \stackrel{9.8(ii)}{=} (\sin x + x \sin' x) \exp'(x \sin x) \\ &\stackrel{9.31}{=} (\sin x + x \cos x) \exp(x \sin x). \end{aligned}$$

(b) Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion folgt

$$\sqrt{\exp(-x^2)} = \exp(-x^2/2).$$

Man kann dafür auch (etwas umständlicher) den Umweg über die Definitionen rationaler und reeller Potenzen nehmen:

$$\sqrt{\exp(-x^2)} = \exp(-x^2)^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln \exp(-x^2)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(-x^2)\right) = \exp(-x^2/2).$$

Hiermit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sqrt{\exp(-x^2)} &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \exp'(-x^2/2) \frac{d}{dx}(-x^2/2) \\ &\stackrel{\text{Produktregel}}{=} -\frac{1}{2} \exp(-x^2/2) \frac{d}{dx} x^2 \\ &= -x \sqrt{\exp(-x^2)}. \end{aligned}$$

(c) Wir berechnen zuerst:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^x &= \frac{d}{dx} \exp(x \ln x) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \left(\frac{d}{dx} (x \ln x) \right) \exp'(x \ln x) \stackrel{\text{Produktregel}}{=} (\ln x + x \ln' x) \exp'(x \ln x) \\ &\stackrel{9.31+9.32}{=} (\ln x + 1) \exp(x \ln x) = (\ln x + 1)x^x. \end{aligned} \quad (*)$$

Hiermit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^{x^x}) &= \frac{d}{dx} (\exp(x^x \ln x)) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \left(\frac{d}{dx} (x^x \ln x) \right) \exp'(x^x \ln x) \\ &\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \left(\left(\frac{d}{dx} x^x \right) \ln x + x^x \ln' x \right) \exp'(x^x \ln x) \stackrel{(*)}{=} ((\ln x + 1)x^x \ln x + x^x \ln' x) \exp'(x^x \ln x) \\ &\stackrel{9.31+9.32}{=} ((\ln x + 1)x^x \ln x + x^{x-1}) \exp(x^x \ln x) = (x(\ln x)^2 + x \ln x + 1)x^{(x^x+x-1)}. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{\tan x}{1 + (\ln x)^2} &\stackrel{9.11}{=} \frac{(1 + (\ln x)^2) \frac{d}{dx} \tan x - (\tan x) \frac{d}{dx} (1 + (\ln x)^2)}{(1 + (\ln x)^2)^2} \\ &\stackrel{9.8}{=} \frac{(1 + (\ln x)^2) \frac{d}{dx} \tan x - (\tan x) 2(\ln x)(\ln' x)}{(1 + (\ln x)^2)^2} \\ &= \frac{(1 + (\ln x)^2)/(\cos x)^2 - (\tan x) 2(\ln x)/x}{(1 + (\ln x)^2)^2} \\ &= \frac{x(1 + (\ln x)^2) - 2(\sin x)(\cos x)(\ln x)}{x(\cos x)^2(1 + (\ln x)^2)^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Inverse Sinus/Kosinus). (a) Zeigen Sie dass \cos auf dem Intervall $[0, \pi/4]$ streng monoton fallend ist und auf diesem Intervall ≥ 0 ist.

Hinweis: Sie brauchen nur die bereits aus dem Skript bekannten Aussagen über \cos und \sin . (2 Pkt.)

- (b) Zeigen Sie dass \cos auf dem Intervall $[0, \pi/2]$ streng monoton fallend und auf diesem Intervall ≥ 0 ist. (1 Pkt.)
- (c) Zeigen Sie dass \cos auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist und dieses Intervall bijektiv auf $[-1, 1]$ abbildet. (1 Pkt.)
- (d) Zeigen Sie dass $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ bijektiv ist. (1 Pkt.)
- (e) Nun definieren wir die Umkehrfunktionen $\arcsin := \sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ und $\arccos := \cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$. Berechnen Sie die Ableitungen \arcsin' auf $(-\pi/2, \pi/2)$ und \arccos' auf $(0, \pi)$. (5 Pkt.)

Lösung. (a) Wir wissen dass für $x \in (0, \pi/4) \subseteq (0, 1)$ stets

$$\cos'(x) = -\sin(x) < -x \cdot \frac{5}{6}$$

gilt (s. Skript, nach Definition 7.38). Nach Korollar 9.21a ist \cos auf dem Intervall $[0, \pi/4]$ streng monoton fallend. Da $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, folgt nun dass \cos auf diesem Intervall positiv ist.

- (b) Aus der Verdopplungsformel (Übungsblatt 8, Aufgabe 4(b)) folgt nun

$$\cos(x) = 2(\cos(x/2))^2 - 1.$$

Da die Funktion $y \mapsto y^2$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ streng monoton steigend ist, folgt dass \cos auf dem Intervall $[0, \pi/2]$ streng monoton fallend ist. Da $\cos(\pi/2) = 0$, ist \cos auf diesem Intervall positiv.

- (c) Aus der Verdopplungsformel bekommen wir nun dass \cos auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist (man kann das Argument nicht noch einmal wiederholen, da \cos auf diesem Intervall nicht mehr positiv ist).

Da $\cos(0) = 1$ und $\cos(\pi) = -1$ (Verdopplungsformel), bildet \cos das Intervall $[0, \pi]$ bijektiv auf $[-1, 1]$ ab.

- (d) Dies folgt direkt aus $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$ und die Bijektivität von $[-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [0, \pi]$, $x \mapsto \pi/2 - x$.

- (e) Nach Proposition 9.13 gilt

$$\arcsin'(\sin x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Da \cos auf $(-\pi/2, \pi/2)$ positiv ist, gilt $\cos x = \sqrt{1 - (\sin x)^2}$, und es folgt für $y = \sin x \in (-1, 1)$

$$\arcsin' y = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Die Berechnung für \arccos' mit $y = \cos x$ ist ähnlich:

$$\arccos' y = \arccos'(\cos x) = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - (\cos x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}. \quad \square$$

Aufgabe 5 (Bonusaufgabe). Der natürliche Logarithmus \ln ist eine konkave Funktion (Korollar 9.33). Diese Eigenschaft werden wir hier benutzen für einen neuen Beweis der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (siehe auch Präsenzblatt 3, Aufgabe 1).

Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $j = 1, \dots, n$, seien $x_j \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\lambda_j \in (0, 1)$ mit $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$.

(a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion über n die Ungleichung

$$\ln \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right) \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \ln x_j, \quad n \in \mathbb{N}_{\geq 2}. \quad (3 \text{ Pkt.})$$

(b) Beweisen Sie (mithilfe vom Teilaufgabe (a)) die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \geq \prod_{j=1}^n x_j^{\lambda_j}, \quad (1 \text{ Pkt.})$$

und folgern Sie hieraus die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \geq \left(\prod_{j=1}^n x_j \right)^{1/n}. \quad (1 \text{ Pkt.})$$

Lösung. (a) IA: für $n = 2$ gilt $\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2$, da \ln konkav ist (Korollar 9.33).

IS: Wir nehmen an dass die Ungleichung richtig ist für ein festes $n \in \mathbb{N}$ (IH). Wir schreiben $\lambda := \sum_{j=1}^n \lambda_j$. Dann folgt für $n + 1$:

$$\begin{aligned} \ln \left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j \right) &= \ln \left(\lambda \sum_{j=1}^n \lambda^{-1} \lambda_j x_j + \lambda_{n+1} x_{n+1} \right) \stackrel{\text{IA}}{\geq} \lambda \ln \left(\sum_{j=1}^n \lambda^{-1} \lambda_j x_j \right) + \lambda_{n+1} \ln x_{n+1} \\ &\stackrel{\text{IH}}{\geq} \lambda \sum_{j=1}^n \lambda^{-1} \lambda_j \ln x_j + \lambda_{n+1} \ln x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \ln x_j. \end{aligned}$$

(b) Da \exp streng monoton steigend ist, folgt aus (a)

$$\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right) = \exp \left(\ln \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right) \right) \geq \exp \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \ln x_j \right) = \prod_{j=1}^n \exp(\lambda_j \ln x_j) = \prod_{j=1}^n x_j^{\lambda_j}.$$

Die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel folgt im Spezialfall $\lambda_j = 1/n$ für alle $j = 1, \dots, n$. \square

Aufgabe 6 (Nicht-stetige Ableitungen). Für $k, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei $f_{k,m} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_{k,m}(x) := \begin{cases} x^k \sin(1/x^m), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie (für beliebige $k, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) dass die Funktion $f_{k,m}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist, berechnen Sie die Ableitung $f'_{k,m}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, und zeigen Sie dass $f'_{k,m}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig ist. (3 Pkt.)

(b) Bestimmen Sie mit Beweis für welche $k, m \in \mathbb{Z}$ die Funktion $f_{k,m}$ auf ganz \mathbb{R} differenzierbar ist, und berechnen Sie in diesen Fälle $f'_{k,m}(0)$. (3 Pkt.)

(2 Bonuspkt.)

Hinweis: Arbeiten Sie hierbei an der kritischen Stelle $x = 0$ direkt anhand der Definition der Differenzierbarkeit.

- (c) Falls $f_{k,m}$ auf ganz \mathbb{R} differenzierbar ist: bestimmen Sie mit Beweis für welche $k, m \in \mathbb{Z}$ die Ableitung $f'_{k,m}$ stetig ist in 0. (3 Pkt.)

(2 Bonuspkt.)

Korrektur: Es war beabsichtigt $k, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ in den Teilaufgaben (b) und (c) anzunehmen. Für die Bearbeitung der Fälle $k, m \leq 0$ gibt es deshalb je 2 Bonuspunkte pro Teilaufgabe.

Lösung. (a) Die Funktionen $x \mapsto 1/x$ (Lemma 9.10) und \sin (Korollar 9.31) sind auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar. Mithilfe vom Satz 9.8 und Satz 9.9 folgt dass auch $f_{k,m}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist, und wir berechnen

$$f'_{k,m}(x) = \left(\frac{d}{dx}x^k\right) \sin(1/x^m) + x^k \frac{d}{dx} \sin(1/x^m) = kx^{k-1} \sin(1/x^m) - mx^{k-m-1} \cos(1/x^m).$$

Da die Funktionen \sin und \cos sowie $x \mapsto 1/x$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar sind, folgt dass auch $f'_{k,m}(x)$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar (und deshalb stetig) ist.

- (b) Für den kritischen Punkt $x = 0$ berechnen wir für $h \neq 0$

$$\frac{|f_{k,m}(h) - f_{k,m}(0)|}{|h|} = |h|^{k-1} |\sin(1/h^m)|. \quad (*)$$

Ist $k = 1$, dann ist $\lim_{h \rightarrow 0} 1/h^m = \pm\infty$ (für beliebiges $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) und deshalb hat (*) keinen Grenzwert wenn $h \rightarrow 0$. Ist aber $k > 1$, dann ist

$$\frac{|f_{k,m}(h) - f_{k,m}(0)|}{|h|} \leq |h|^{k-1},$$

und es folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f_{k,m}(h) - f_{k,m}(0)|}{|h|} = 0.$$

Also ist $f_{k,m}$ differenzierbar auf ganz \mathbb{R} genau dann wenn $k \geq 2$, und in diesem Fall gilt $f'_{k,m}(0) = 0$.

- (c) Es sei nun $k \geq 2$, sodass $f_{k,m}$ differenzierbar ist. Die Ableitung $f'_{k,m}$ (berechnet in Teilaufgabe (a)) ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; wir betrachten nur noch den kritischen Punkt $x = 0$. Die Ableitung $f'_{k,m}$ ist also stetig genau dann wenn $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f'_{k,m}(x) = f'_{k,m}(0) = 0$. Der Term $kx^{k-1} \sin(1/x^m)$ konvergiert gegen 0 wenn $x \rightarrow 0$, da für $x \neq 0$ gilt

$$|kx^{k-1} \sin(1/x^m)| \leq k|x|^{k-1}.$$

Der Term $mx^{k-m-1} \cos(1/x^m)$ konvergiert gegen 0 genau dann wenn $k - m - 1 > 0$. Deshalb ist $f'_{k,m}$ stetig in 0 genau dann wenn $k > m + 1$. (Im Fall $k \leq m$ fehlt nicht nur die Stetigkeit, aber ist $f'_{k,m}$ sogar unbeschränkt auf jede Umgebung von 0.) \square