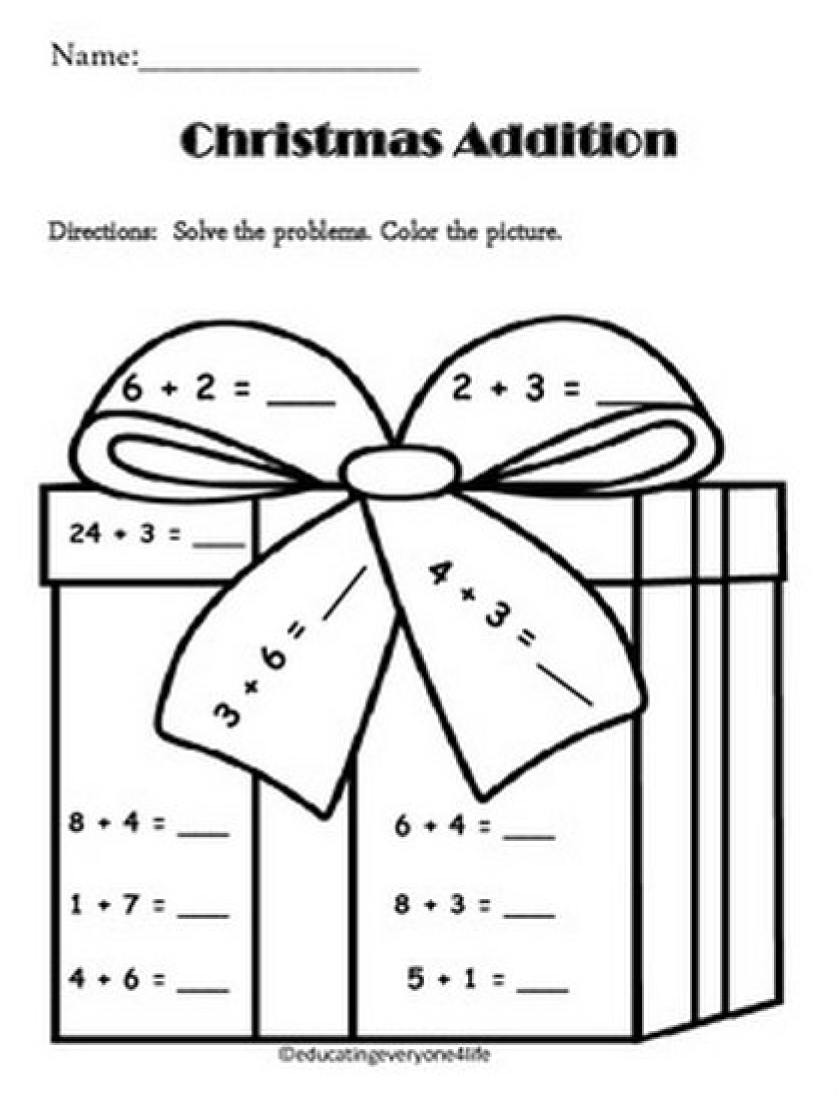
Analysis 3

04.12.2018
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Besprechung: TBC, Januar 2019

Weihnachtsblatt

Aufgabe 1: (Besonders prüfungsrelevant)



Aufgabe 2:
Sei Ω eine Menge und Σ eine σ-Algebra auf Ω. Seien weiters μ, ν zwei Maße auf (Ω, Σ). Entscheiden Sie mit Begründung, ob

(a) $\lambda_1 := \max\{\mu, \nu\}$,

(b) $\lambda_2 := \min\{\mu, \nu\}$,

(c) $\lambda_3 := \mu + \nu$,

(d) $\lambda_4 := |\mu - \nu|$

jeweils wiederum Maße auf (Ω, Σ) definieren.

Aufgabe 3:
Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller Zahlen $x \in [0,1)$, in deren Dezimaldarstellung eine '3' vorkommt. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ eine Borelmenge ist.

Aufgabe 4:
Seien $N, M \subset \mathbb{R}^d$ Nullmengen bezüglich des d-dimensionalen Lebesguemaßes. Zeigen oder widerlegen Sie, dass dann auch $N + M := \{n + m\colon\ n \in N,\ m \in M\}$ eine Nullmenge bezüglich des d-dimensionalen Lebesguemaßes ist.

Aufgabe 5:
Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ eine Lebesgue-messbare Menge mit der folgenden Eigenschaft: Jede horizontale Gerade schneidet A in abzählbar vielen Punkten. Zeigen Sie, dass $m^2(A) = 0$.

Aufgabe 6:
Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ eine Nullmenge bezüglich des d-dimensionalen Lebesguemaßes. Zeigen oder widerlegen Sie, ob dann auch

$$\widetilde{A} := \{x' \in \mathbb{R}^{n-1}\colon\ \text{es gibt } x_n \in \mathbb{R} \text{ mit } (x', x_n)^\top \in A\}$$

eine Nullmenge bezüglich des $(d-1)$-dimensionalen Lebesguemaßes ist.

Aufgabe 7:
Sei $\Omega := \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2\colon\ x, y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$. Bestimmen Sie

$$\int_\Omega (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m^2.$$

Aufgabe 8:
Zeigen Sie, dass die nachfolgende Menge Lebesgue-messbar ist (bzgl. m^3) und bestimmen Sie ihr Lebesguemaß $m^3(A)$:

$$A := \{(x,y,z)^\top\colon\ x \in [1,2],\ y, z \geq 0,\ y + zx^2 \leq x\}.$$

Aufgabe 9:
Sei wie üblich $B := \{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |x| < 1\}$ der offene (euklidische) Einheitsball in $\mathbb{R}^d$. Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_B \frac{1}{1 - |x|^\alpha}\,\mathrm{d}m$$

endlich ist.

Aufgabe 10:
Berechnen Sie das zweidimensionale Lebesguemaß derjenigen Fläche, die der folgenden Abschnitt der logarithmischen Spirale

$$f\colon [0,\pi] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

mit der x-Achse einschließt.

Hinweis für Aufgaben 11–17:

Argumentieren Sie genau. Falls Sie Konvergenzsätze aus der Vorlesung benutzen, begründen Sie ihre Anwendbarkeit, und stellen Sie bei Berechnungen von Lebesgueintegralen dar, warum und wie sich diese aus dem Riemannintegral gewinnen lassen.

Aufgabe 11:
Wir nennen eine messbare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *lokal integrierbar*, falls für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ das Integral $\int_K |f| \,\mathrm{d}m^d$ existiert und endlich ist. Sei nun

$$A := \left\{ \int_K |f| \,\mathrm{d}m^d \colon\; K \subset \mathbb{R}^d \text{ kompakt} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn $\sup A < \infty$, und dass in diesem Fall gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| \,\mathrm{d}m^d = \sup A.$$

Aufgabe 12:
Geben Sie jeweils zu den Sätzen von Beppo Levi (monotone Konvergenz) und Lebesgue (dominierte Konvergenz) je zwei Beispiele an, auf die sich diese Sätze anwenden bzw. nicht anwenden lassen. Diese Beispiele sollten unabhängig von den nachfolgenden Aufgaben sein.

Aufgabe 13:
Sei die Funktionenfolge (f_n), $f_n\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } \frac{1}{n} \le x < 1, \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{für } 0 < x < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass (f_n) punktweise gegen eine Grenzfunktion $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ konvergiert und bestimmen Sie diese.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} f_n \,\mathrm{d}m = \int_{(0,1)} f \,\mathrm{d}m$$

gilt. Berechnen Sie weiters das Integral auf der rechten Seite der vorherigen Gleichung.

Aufgabe 14:
Sei die Funktionenfolge (f_n), $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := n \sin\left(\frac{x^2}{n}\right).$$

(a) Geben Sie drei Arten von Konvergenz an, sodass (f_n) konvergiert und beweisen Sie die entsprechenden Konvergenzen.

(b) Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \,\mathrm{d}m.$$

Aufgabe 15:
Gegeben sei eine Folge stetiger Funktionen (f_n), $f_n\colon K \to \mathbb{R}$, wobei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und nichtleer sei. Sei nun die stetige Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ der punktweise Limes, wobei weiters $f_n \nearrow f$ gelte.

(a) Zeigen Sie, dass $f_n \to f$ gleichmäßig auf K konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_K f_n \,\mathrm{d}m^d = \int_K f \,\mathrm{d}m^d.$$

Aufgabe 16:
Bestimmen Sie (mit ausführlicher Begründung)

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^\infty \frac{x}{e^{\varepsilon x^2} + x^2} \,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 17:
Sei für $k \in \mathbb{N}$

$$A_k := \bigcup_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{k}}{2^m}, \frac{\sqrt{k+1}}{2^m} \right].$$

Sei weiters $f_k := \chi_{A_k}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, ob (f_k) punktweise gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, ob (f_k) gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie, ob (f_k) in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert.

Aufgabe 18:
Seien $f, f_1, f_2, ... \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel:

(a) Gelte $f_j \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt $f_j \to f$ m^d-fast überall.

(b) Gelte $f_j \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann konvergiert eine Teilfolge von (f_j) m^d-fast überall.

(c) Konvergiert eine Teilfolge von (f_j) m^d-fast überall gegen f, so gilt $f_j \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$.

(d) Gilt $f_j \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$, so folgt

$$m^d\Big(\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |f_j(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\Big) \to 0, \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Aufgaben 19-23: Transformationssatz und verwandte Sätze

Aufgabe 19: Transformationssatz
Sei $r > 0$ und $\rho\colon K \to \mathbb{R}_0^+$ Lebesgue-integrierbar auf $K := \overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u(x) := \int_K \frac{\rho(y)}{|x-y|} \,\mathrm{d}m^3(y), \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

wohldefiniert ist. Zeigen Sie weiters: Ist ρ rotationssymmetrisch, so ist auch u rotationssymmetrisch.

Aufgabe 20: Transformationssatz

Seien $0 < r < 1$ sowie $x_0 := (1,0,0)^\top \in \mathbb{R}^3$. Wir betrachten den Torus, der entsteht, wenn der Ball mit Zentrum x_0 und Radius r um die x_3-Achse rotiert. Parametrisieren Sie diesen Torus und bestimmen Sie sein dreidimensionales Lebesguemaß.

Aufgabe 21: Transformationssatz

Skizzieren Sie die Menge

$$U := \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \colon \ \frac{1}{2} - x \leq \frac{1}{2} \leq x + y \leq 1 \leq 1 + y\}$$

in ein zweidimensionales Koordinatensystem ein und berechnen Sie

$$I := \int_U \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) \mathrm{d}m^2(x,y).$$

Aufgabe 22: Areaformel

Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar sowie injektiv. Berechnen Sie *direkt* anhand der Areaformel $\mathcal{H}^1(f([a,b]))$, das heißt, die Länge der Kurve, wobei

$$f(t) := \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 23: Coareaformel

Sei $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\inf_{\mathbb{R}^d} |Df| > 0$ und sei $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass für alle $t > 0$ gilt:

$$\int_{\{f>t\}} g \,\mathrm{d}m^d(x) = \int_t^\infty \Big(\int_{\{f=s\}} \frac{g}{|Df|} \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d-1} \Big) \,\mathrm{d}s.$$

Aufgabe 24: Checklist

Die folgenden Aufgaben sollen Ihnen bei der Wiederholung von Definitionen und Sätzen helfen.

(a) Was ist eine σ-Algebra auf einer Menge Ω? Was ist ein Maß μ auf einer σ-Algebra Σ?

(b) Sei Ω eine Menge und Σ eine σ-Algebra auf Ω. Wann nennt man ein Maß μ auf (Ω, Σ) σ-endlich? Geben Sie je ein Beispiel für ein σ-endliches und ein nicht-σ-endliches Maß (inklusive den entsprechenden Messräumen).

(c) Geben Sie eine Version des Satzes von Kolmogorov.

(d) Wiederholen Sie genau, wie das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^d$ eingeführt wurde.

(e) Definieren das s-dimensionale Hausdorffmaß in $\mathbb{R}^d$, $s > 0$. Begründen Sie, warum stets $\mathcal{H}^s(A) = 0$ für $s > d$ gilt.

(f) Ein Maß μ auf einem metrischen Maßraum heißt *lokal endlich*, falls alle Kompakta endliches Maß (bzgl. μ) haben. Für welche $s \geq 0$ ist $\mathcal{H}^s$ lokal endlich (auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$?

(g) Wiederholen Sie, wie das Lebesgueintegral in der Vorlesung eingeführt wurde.

(h) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Fubini. Sind die darin formulierten Bedingungen notwendig für die entsprechende Schlussfolgerung? Gehen Sie insbesondere auf die darin auftretende Bedingung der σ-Endlichkeit ein.

(i) Formulieren Sie den Satz von der monotonen Konvergenz. Geben Sie ein Beispiel (unabhängig von den obigen) zur Anwendbarkeit dieses Satzes.

(j) Formulieren Sie den Satz von der dominierten Konvergenz. Geben Sie ein Beispiel (unabhängig von den obigen) zur Anwendbarkeit dieses Satzes.

(k) Geben Sie Versionen der Area- und Co-Area-Formel. Diskutieren Sie insbesondere genau die Voraussetzungen, und geben Sie Szenarien, auf die diese Sätze anwendbar sind. Wie folgen der Transformationssatz bzw. der Satz von Fubini auf diesen Sätzen?

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch in 2019!