Kleine AG: Modulräume von Garben

Organisatoren:
Heinrich Hartmann (heinrich_hartmann@gmx.net)
Pawel Sosna (sosna@math.uni-bonn.de)

am 19.04.2008 in Bonn

Einleitung

Modulräume von Garben sind aus verschiedenen Gründen interessant. Zum einen sind sie Beispiele für höher-dimensionale Varietäten mit einer interessanten Geometrie. So sind alle bekannten Beispiele von Hyperkählermannigfaltigkeiten (bis auf Deformation) mit Dimension > 2 solche Modulräume. Andererseits bieten die Modulräume eine neue Möglichkeit die Geometrie der ihnen zugrundeliegenden Varietät zu studieren. Klassische Konstruktionen wie das Hilbertschema oder das Picardschema sind Beispiele für Modulräume von Garben. Wie der Name schon sagt, sollen diese Modulräume Garben auf einer gegebenen Varietät parametrisieren. Es stellt sich jedoch heraus, dass dies im Allgemeinen nicht möglich ist und man sich damit begnügen muss, sogenannnte (halb-)stabile Garben zu betrachten. Diese Garben kann man als kleinste Bausteine allgemeiner Garben ansehen. Für diese Objekte existiert nun ein Modul-Schema, dessen abgeschlossene Punkte S-Äquivalenzklassen halbstabiler Garben entsprechen.
Das Ziel der kleinen AG ist es einen ersten Einblick in die allgemeine Konstruktion zu geben und die Eigenschaften der Modulräume zu studieren. Ein wichtiger Spezialfall sind Modulräume auf K3-Flächen, deren Geometrie wir im letzten Vortrag besprechen wollen. Wir fangen jedoch erstmal klein an und versuchen den Begriff der (Halb-)Stabilität auf dem Niveau der kommutativen Algebra zu verstehen. Jeder Vortrag sollte wie immer 45 Minuten dauern.

Programm

1. Vortrag: Grundlagen der kommutativen Algebra

Im ersten Vortrag sollen einige fundamentale Resultate über die Struktur von Moduln über noetherschen Ringen wiederholt werden. Dabei kann man sich an [M], Kapitel 3, orientieren. Es sollten alle Inhalte der Abschnitte 7 & 8 abgedeckt werden, insbesondere Lemma 7 und die Sätze 9, 10, 11 (mit möglichst vielen Beweisen). Basierend auf Satz 10 auch Satz I.7.4 in [Ha] anführen. Zum Schluss auf die Torsionsfiltrierung und Saturierung einer Garbe eingehen, siehe [HL], Seite 3-4, sowie Dimension und Reinheit definieren und in Beziehung zu diesen Begriffen setzen.

2. Vortrag: Das Hilbertpolynom

Zu Beginn sollte der Namensgeber des Vortrags vorgestellt werden, zunächst in der Version der kommutativen Algebra ([Ha], Satz I.7.5 oder [M], Kapitel 4, Abschnitt 10), dann in der kohomologischen Version ([Ha], Aufgabe III.5.2 (mit Beweis)) und schließlich in der Grothendieck-Riemann-Roch Version (Abschnitt 3.1 in [L], insbesondere auch das Beispiel für Flächen erwähnen). Danach sollte die Berechnung des Hilbertpolynoms mit Hilfe freier Auflösungen an einem Beispiel vorgeführt werden.
Als nächstes Rang und Grad einer Garbe definieren, siehe [HL], Abschnitt 1.2 (Bemerkung auf Seite 14 erwähnen). Interessant ist auch die schnitttheoretische Beschreibung in [F], Aufgabe 2.5.2.

3. Vortrag: (Semi-)Stabilität von Garben

Die Literaturangaben beziehen sich im Folgenden, wenn nicht anders angegeben, auf [HL]. Viele Definitionen in diesem Vortrag sehen deutlich schöner aus, wenn man einige Voraussetzungen an das Schema stellt (insbesondere glatt, irreduzibel): Dies sollte man an den entsprechenden Stellen erwähnen.
Wir starten mit den zwei gebräuchlichen Stabilitätsbegriffen, nämlich Gieseker- und μ-Stabilität, und vergleichen diese (Abschnitt 1.2). Nun Prop. 1.2.7 beweisen. Jetzt die Harder-Narasimhan-Filtration definieren und Theorem 1.3.4 anführen (ohne Beweis). Falls die Zeit reicht, Lemma 1.3.3 behandeln. Jetzt noch die Jordan-Hölder-Filtration und S-Äquivalenz besprechen (Abschnitt 1.5). Die beiden Filtrationen können anhand des Harder-Narasimhan-Polygons illustriert werden ([S], Seite 11ff). Mit dem Diagramm kann man z.B. das Lemma 1.2.14 sofort sehen. Zum Schluss Lemma 3.4 aus [L] beweisen.

4. Vortrag: Modulräume: Eigenschaften und Beispiele

In diesem Vortrag wollen wir die abstrakte Maschinerie hinter der Konstruktion der Modulräume kennen lernen, bevor wir uns einem expliziten Beispiel, dem Hilbertschema, widmen. Aufgrund der Komplexität der Konstruktion wird der erste Teil eher skizzenhaft ausfallen.
Wir starten mit dem Quot-Schema, siehe Abschnitt 2.3 in [L]. Bevor man das Theorem 2.7 anführt, sollte man die (Ko-)Darstellbarkeit eines Funktors erläutern, siehe Def. 2.2.1 in [HL]. Dann noch die universelle Familie beschreiben.
Nun kommen wir zur Definition des Modulfunktors (Abschnitt 4.1 in [HL]). Bei der Beschreibung der Konstruktion des Modulraums kann man sich nach der Darstellung in [Hu] Seite 240-242 richten. Diese ist für den Fall der K3-Flächen zurechtgeschnitten, beschreibt den allgemeinen Fall aber relativ gut, wenn man an den entsprechenden Stellen reduziertes Hilbertpolynom statt Mukai-Vektor einsetzt.

Nun kommen wir zum Hilbertschema, siehe Abschnitt 2.4 in [L]. Wir starten natürlich mit der Definition, dann abgeschlossene Punkte beschreiben und Korollar 2.11 angeben. Dann auf die Beweisidee des Theorems 2.12 in [L] eingehen, das Hilbertschema für kleine n beschreiben (nach Theorem 2.12) und zum Schluss Theorem 2.15 anführen.

5.Vortrag: Modulräume auf K3-Flächen

Zunächst sollte es eine Einleitung zu K3-Flächen geben (siehe z.B. [Hu], Abschnitt 10.1): Definition, Beispiele, grundlegende Eigenschaften wie die Beschreibung der Kohomologie samt Hodge-Zerlegung und Schnittpaarung sowie das globale Torelli-Theorem. Aufbauend darauf das Mukai-Gitter, die Mukai-Paarung und die Hodge-Zerlegung des Mukai-Gitters definieren. Zuletzt brauchen wir noch den Mukai-Vektor. Dann den Zusammenhang zur Eulercharakteristik erklären ([HL], Korollar 6.1.5). Als erstes Beispiel Satz 6.1.6 aus [HL] mit dem ersten Teil des Beweises. Daraufhin Lemma 3.11 aus [L] mit Beweis und Proposition 10.20 aus [Hu] mit Beweis. Dann die Diskussion in [Hu] auf S. 244-245 bis einschließlich Proposition 10.24 (ohne Remark 10.21) mit Beweisen falls die Zeit es erlaubt. Am Ende auf die O'Grady-Beispiele eingehen mit Erklärung ihrer Stellung in der Theorie, siehe Abschnitt 4 in [L].

Referenzen

[F] W. Fulton; *Intersection Theory*

[Ha] R. Hartshorne; *Algebraic Geometry*

[Hu] D. Huybrechts; *Fourier-Mukai Transforms in Algebraic Geometry*

[HL] D. Huybrechts, Lehn; *Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*; zu finden unter `www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/ar/arb/`

[L] M. Lehn; *Symplectic Moduli Spaces*; zu finden unter `www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/ar/arb/`

[M] H. Matsumura; *Commutative Algebra*

[S] S. Shatz; *The decomposition and Specialization of Algebraic Families in Vector Bundles*; zu finden unter `www.numdam.org/numdam-bin/browse?id=CM_1977__35_2`