

Kleine AG

Alterationen nach de Jong

am Samstag, den 27. Oktober 2007 in Bonn

Organisatoren: Christian Liedtke (Düsseldorf)
Kay Rülling (Duisburg-Essen)

1 Einleitung

Sei X eine Varietät über einem Körper k (= integres und separiertes Schema von endlichem Typ über k).

Definition 1.1. Eine *Alteration* von X ist eine Varietät X' der Dimension $\dim X' = \dim X$ zusammen mit einem dominanten und eigentlichen Morphismus $X' \rightarrow X$.

Das Ziel dieser kleinen AG ist es, den folgenden Satz von de Jong zu beweisen:

Satz 1 ([dJ96, Theorem 4.1]). *Sei X eine Varietät über einem Körper k und $Z \subset X$ eine echte abgeschlossene Untermenge. Dann gibt es eine Alteration $\varphi : X' \rightarrow X$ und eine offene Einbettung $j : X' \hookrightarrow \bar{X}'$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i) \bar{X}' ist eine reguläre projektive Varietät,
- (ii) $j(\varphi^{-1}(Z)) \cup \bar{X}' \setminus j(X')$ ist ein Divisor mit strikt normalen Überkreuzungen.

Wenn k außerdem perfekt ist, dann kann φ generisch étale gewählt werden.

Diese Aussage ist schwächer als Auflösung von Singularitäten, für die man zusätzlich fordert, dass φ birational ist (zumindest in der schwachen Version). Dort ist der Stand der Dinge der folgende: Auflösung von Singularitäten in beliebiger Dimension und Charakteristik 0 ist von Hironaka bewiesen worden. Ferner lassen sich Singularitäten von Flächen in jeder positiven Charakteristik auflösen (Abhyankar, Lipman) und von 3-Faltigkeiten ab Charakteristik $p \geq 7$ (Abhyankar). Der allgemeine Fall ist noch offen.

Das schöne an de Jongs Satz ist, dass er in allen Dimensionen und allen Charakteristiken funktioniert (es gibt sogar eine Version für Varietäten über vollständigen diskreten Bewertungsringen) und, dass der Beweis - im Vergleich zu Hironaka - relativ kurz ist, spannende Techniken - wie etwa Modulräume markierter Kurven - benutzt und darüberhinaus noch sehr geometrisch ist. Ferner ist es so, dass diese Aussage in vielen Anwendungen völlig ausreicht, etwa bei Endlichkeitssätzen gewisser Kohomologiegruppen (z.B. de Rham Kohomologie in Charakteristik 0, ℓ -adischer oder rigider Kohomologie).

Zum Beweis: dieser wird per Induktion über die Dimension von X geführt, wobei der Induktionsanfang $\dim X = 0$ trivial ist. Wir können ferner annehmen, dass k algebraisch abgeschlossen ist. Die Beweisidee ist nun, X in Kurven zu fasn, und dann die Basis dieser Faserung so zu alterieren, dass nach normalem Pullback zu dieser Alteration eine Familie von Kurven über einer glatten Basis entsteht, deren Fasern nur noch schlimmstenfalls Doppelpunkte haben. In

dieser Situation kann man die dann noch eventuell vorhandenen Singularitäten des Totalraums dieser neuen Faserung von Hand durch Aufblasen auflösen. Ein wenig detaillierter (siehe auch [AbOo98, Abschnitt 0.5]):

- Nach einer birationalen Modifikation von X kann man annehmen, dass es einen Morphismus $X \rightarrow Y$ mit $\dim Y = \dim X - 1$ gibt, so dass die generische Faser eine eigentliche, glatte und irreduzible Kurve ist. Dies ist im wesentlichen Inhalt des 2. Vortrags.
- Die Hauptschwierigkeit und der spannendste Teil des Beweises (hier kommen Modulräume markierter Kurven ins Spiel) ist es dann, zu zeigen, dass es eine Alteration $Y' \rightarrow Y$ gibt, so dass diese Familie von Kurven $X \rightarrow Y$ nach normalisiertem Pullback zu Y' und anschließender Modifikation schlimmstenfalls noch Doppelpunkte als Singularitäten in den Fasern hat. Dies ist im wesentlichen Inhalt des 3. Vortrags.
- Hat man dies erreicht, kann man die Induktionsvoraussetzung auf Y' anwenden und findet somit eine Alteration $Y'' \rightarrow Y'$, wobei Y'' glatt über k ist. Nach normalisiertem Pullback zu Y'' erhalten wir dann eine Familie $X'' \rightarrow Y''$ von Kurven über einer glatten Basis, deren Fasern schlimmstenfalls Doppelpunkte als Singularitäten haben. Dann hat X'' schlimmstenfalls gewöhnliche Doppelpunkte als Singularitäten und diese können einfach durch Aufblasen aufgelöst werden. Dies ist im wesentlichen Inhalt des 4. Vortrags.

Als Literatur verweisen wir auf die folgenden drei Artikel: den Originalartikel von de Jong [dJ96], einen Bourbaki-Seminarvortrag von Berthelot [Be97] (mit ausführlicher Beweisskizze und einigen Anwendungen) und schließlich ein Skript von Abramovich und Oort [AbOo98].

In der AG werden wir uns an der sehr gut geschriebenen Originalarbeit von de Jong [dJ96] orientieren. Da die Vorträge aufeinander aufbauen (man muss aber nicht den ganzen Artikel lesen um zum Beispiel den 4. Vortrag zu halten), sollten die Vortragenden die Konventionen und Notationen aus diesem Artikel verwenden.

2 Das Programm

Sofern nicht anders angegeben, beziehen sich Satz-, Kapitel- und sonstige Nummerierungen auf den Artikel [dJ96].

1. Vortrag: Der Satz von De Jong (45 Minuten)

Zuerst sollen die Definition einer Alteration sowie einer Modifikation, d.h. einer birationalen Alteration, angegeben werden (2.20, 2.17). Dann kurz die Definition eines Divisors mit strikt normalen Überkreuzungen wiederholen (2.4). Zu Vergleichszwecken nun das Resultat von Hironaka über die Auflösung von Singularitäten anschreiben, dazu Passendes aus [Hi64, Abschnitt 3, Main Theorem I] und der Diskussion danach, [Hi64, Abschnitt 4, Main Theorem I*], sowie [Hi64, Abschnitt 5, Main Theorem II] auswählen. Anschließend Satz 4.1 (das Ziel dieser Kleinen AG) bringen und Bemerkung 4.2 kurz erwähnen.

Es folgt eine kurze Beweisskizze. Diese sollte sich an [AbOo98, Abschnitt 0.5] orientieren. Auf jeden Fall sollten die einzelnen Schritte (Step 0 - Step 5) aus [AbOo98, Abschnitt 0.5] angeschrieben werden. Es bleibt dem Vortragenden überlassen, wieviel er zum Beweis der einzelnen Schritte sagt, es sollte aber sehr grob bleiben; die Details kommen in den folgenden Vorträgen.

Schließlich soll der Anfang des Beweises von Satz 4.1. gegeben werden (4.3 - 4.10), in dem gezeigt wird, dass wir ohne Einschränkung folgendes annehmen dürfen:

(*) *X ist eine normale und projektive Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und Z ist Träger eines Divisors, der bei Bedarf beliebig vergrößert werden darf.*

2.Vortrag: Reduktion auf den Fall einer Familie von Kurven (45 Minuten).

Zuerst sollte das Resultat in 2.11 kurz angeschrieben und der Beweis skizziert werden. Es genügt, dies in der Situation (*) zu tun - das erspart ein paar technische Details. Nun die Lemmata 4.11 und 4.13 anschreiben und möglichst viel von den Beweisen präsentieren. Kurz sagen, was die strikt Transformierte einer Alteration bzgl. eines Morphismus' ist (2.18, 2.20). Schließlich soll gefolgert werden, dass es ausreichend ist, den Satz in folgender Situation zu beweisen (4.12, 4.14 - 4.16): X erfüllt (*) und es gibt einen Morphismus projektiver Varietäten $f : X \rightarrow Y$ mit folgenden Eigenschaften (4.12):

- a) Alle Fasern von f sind nicht leer, geometrisch zusammenhängend und äquidimensional der Dimension 1.
- b) Der glatte Ort von f ist dicht in allen Fasern.
- c) Die generische Faser ist glatt.
- d) Der Morphismus $f|_Z : Z \rightarrow Y$ ist endlich und generisch étale.
- e) Für jeden geometrischen Punkt \bar{y} von Y und jede irreduzible Komponente C von $X_{\bar{y}}$ gilt: $\#(\text{sm}(X/Y) \cap C \cap Z) \geq 3$.
- f) Es gibt Schnitte $\sigma_i : Y \rightarrow X$, $i = 1, \dots, n$ von f mit $Z = \bigcup_i \sigma_i(Y)$.

3.Vortrag: Reduktion auf den Fall einer Familie von n -markierten stabilen Kurven (60 Minuten).

Ziel dieses Vortrages ist es, zu zeigen, dass wir annehmen können, dass $X \rightarrow Y$ eine Familie von n -markierten stabilen Kurven ist. Nach Induktionsannahme können wir dann zusätzlich Y als glatt annehmen. Dies sollte auch vorne weg gesagt werden, da die folgenden Abschweifungen erst einmal vom eigentlichen Ziel wegführen.

Zunächst sollen die Definitionen einer (spaltenden) semi-stabilen Kurve über einem Schema S (2.21, 2.22), sowie die einer n -markierten stabilen Kurve ([Be97, 3.1.1]) gegeben und die lokale Beschreibung 2.23 erwähnt werden. Dann kurz sagen, dass es einen Modulraum $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ von n -markierten stabilen Kurven vom Geschlecht g gibt (2.24 oder [Be97, 3.1.2], hier werden genauere Quellenangaben gemacht, falls jemand die Details nachschlagen will, aber im Vortrag können

diese sowieso nicht behandelt werden). Die Tatsache, dass $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ nur ein Stack und kein Schema ist sollte nur kurz erwähnt, aber ansonsten ignoriert werden. Die Definition von ${}_{\ell}M_{g,n}$ angeben und sagen, dass es ein étales und endliches Schema über $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}[1/\ell]$ ist.

Als nächstes die Methode des Verflachens von Raynaud und Gruson wie in 2.19 erklären. Es wäre schön, eine Beweisskizze zu sehen.

Nun die Situation wie in 4.18 annehmen (für unsere Zwecke ist es ausreichend Schemata von endlichem Typ über k zu betrachten, anstatt exzellenter): es gibt also $X \rightarrow Y$ mit den Voraussetzungen 4.18., eine stabile n -markierte Kurve $(\mathcal{C}, \tau_1, \dots, \tau_n)$ über Y und einen Isomorphismus $\mathcal{C}_U \cong X_U$ über einer offenen und nicht-leeren Teilmenge $U \subset S$, der kompatibel mit den Schnitten ist. Nun soll gezeigt werden, wie dieser Isomorphismus über U nach Modifikation von Y zu einem birationalen Morphismus $\mathcal{C} \rightarrow X$ fortgesetzt werden kann. Dazu 4.18 unten, 4.19 - 4.21. Es sollte insbesondere erklärt werden, wie benutzt wird, dass T flach über S ist (T_s hat reine Dimension 1 und daher hat in Lemma 4.20 pr_2 fast überall endliche Fasern) und wie Bedingung e) benutzt wird, um zu zeigen, dass $\text{pr}_1 : T_j \rightarrow \mathcal{C}_s$ nicht konstant ist (4.20).

Nun werden diese allgemeinen Resultate auf die bereits in den Vorträgen 1 und 2 erzielten Reduktionen angewandt, um zu sehen, dass es genügt, Satz 4.1 in Situation 4.23 zu zeigen (4.17, 4.22). Es sollte klargestellt werden, dass dies der Schritt ist, in dem die Induktionsannahme benutzt wird.

4.Vortrag: Auflösen der Doppelpunkte (45 Minuten).

Zunächst noch einmal an Satz 4.1 erinnern, den wir beweisen wollen und, dass wir gesehen haben, dass wir uns auf Situation 4.23 beschränken können. Ferner können wir zusätzlich noch $\text{codim}_X \text{Sing}(X) \geq 3$ annehmen.

Schließlich sollen die Singularitäten durch Aufblasen von Hand aufgelöst werden. Hierzu nehmen wir Situation 3.1 an (wir können uns auf Schemas von endlichem Typ über k beschränken, anstatt exzellenter). Dann Lemma 3.2 angeben und den Beweis (3.3 - 3.4) skizzieren. Kurz auf die lokale Beschreibung 3.5 eingehen. Dies benutzen wir, um zu zeigen, dass wir ohne Einschränkung die Situation 4.25 annehmen können. Den Beweis beenden: 4.26 - 4.28 .

5.Vortrag: Anwendungen (30 Minuten).

Hier ist es dem Vortragenden überlassen, Anwendungen von de Jongs Satz auszuwählen. Man könnte zum Beispiel ein paar der folgenden Punkte diskutieren:

- Hodge Theorie für singuläre Varietäten à la Hodge III, nur mit regulären Alterationen statt Auflösungen von Singularitäten, vgl. [De74, (8.2.1)-(8.2.3)].
- Endlichkeit rigider Kohomologie für glatte Varietäten [Be97b, Théorème 3.1], siehe auch [Be97, Abschnitt 6.2]. (Rigide Kohomologie hier als black Box benutzen und nur darauf verweisen, dass sie für X glatt und projektiv mit der kristallinen Kohomologie übereinstimmt und somit in diesem Fall endlich ist.)
- Monodromie in der étalen Kohomologie [Be97, Abschnitt 6.3].

- Positivität von Schnittmultiplizitäten [Be97, Abschnitt 6.1]. Hier wird nicht nur Satz 1 benötigt, sondern auch eine Version über einem vollständigen diskreten Bewertungsring, siehe [dJ96, Theorem 6.5], diese sollte auch angegeben werden.

Sollte sich der Vortragende für Punkt eins und/oder Punkt drei entscheiden, sollte er ganz kurz etwas zu kohomologischem Abstieg sagen, hierzu siehe [De74, Abschnitt 5 und 6.2].

Insgesamt wird dieser Vortrag eher den Charakter einer „Märchenstunde“ haben.

Literatur

- [AbOo98] D. Abramovich, F. Oort, *Alterations and resolution of singularities*, <http://arxiv.org/pdf/math/9806100>,
- [Be97] P. Berthelot, *Altérations de variétés algébriques (d'après A. J. de Jong)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1995/96. Astérisque No. 241 (1997), Exp. No. 815, 5, 273–311. ¹
- [Be97b] P. Berthelot, *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide*, Invent. Math. 128 (1997), no. 2, 329–377. ²
- [De74] P. Deligne, *Théorie de Hodge. III*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 44 (1974), 5–77.
- [dJ96] A. J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 83 (1996), 51–93. ³
- [Hi64] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I*, Ann. of Math. (2) 79 (1964), 109–203.

¹erhältlich unter <http://perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/publis/Alterations.pdf>

²erhältlich unter <http://perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/publis/Finitude.pdf>

³kann also bei NUMDAM heruntergeladen werden