V1G1: Analysis 1

Pavel Zorin-Kranich
Universität Bonn
Wintersemester 2020/21

Die Funktion dieses Skripts besteht darin, den Stand der Vorlesung festzuhalten. Es enthält insbesondere nicht alles was in der Vorlesung gesagt wird. Ich empfehle zusätzlich folgende Literatur.

- H. Amann, J. Escher, *Analysis I* Die umfassende und moderne deutschsprachige Einführung in die Analysis. Eignet sich sowohl als Erklärung als auch als Nachschlagewerk.
- T. Tao, *Analysis I*. Dieses Buch nimmt die logischen und mengentheoretischen Grundlagen der Analysis ernst.
- O. Forster, *Übungsbuch zu Analysis 1*. Enthält viele Aufgaben, manche davon mit Lösungen. Nützlich zur Prüfungsvorbereitung und falls Sie zusätzliche Beispiele brauchen wie die Bearbeitung einer Übungsaufgabe aussehen kann.

Folgende Literatur kann ebenfalls von Interesse sein.

- O. Forster, *Analysis 1*.
- K. Königsberger, *Analysis 1*. Zwei klassische Lehrbücher die für den Großteil dieser Vorlesung, mit Ausnahme der Grundlagen, sehr gut geignet sind.
- S. Hildebrandt, *Analysis 1*. Enthält viele historische Informationen. Ich empfehle diese bei Interesse am Ende des Semesters zu lesen, da die Geschichte ohne Kenntnis aller darin auftauchenden Begriffe unverständlich bleibt.

Inhaltsverzeichnis

1 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Das erste Ziel zu Beginn dieser Vorlesung besteht darin, Sie mit der Sprache der Mathematik vertraut zu machen. Ein Glossar der verwendeten Begriffe findet sich im Skript von Herrn Lesch. Wir werden die Begriffe nicht alle auf einmal einführen, sondern nach und nach wenn sie benötigt werden.

Ein weiteres Ziel besteht darin, zu vermitteln wie ein mathematischer Beweis funktioniert. Dafür ist es ideal, die Eigenschaften ganzer Zahlen zu studieren, weil Sie mit diesen Eigenschaften längst vertraut sind und sich deshalb auf die mathematische Argumentation und die logischen Zusammenhänge konzentrieren können.

Definition 1.1 (Peano-Axiome für die natürlichen Zahlen)**.** *Die* natürlichen Zahlen *sind ein Tripel* $(\mathbb{N}, 0, S)$*, wobei* $\mathbb{N}$ *eine Menge ist und* S *eine Abbildung, das die folgenden* Axiome *erfüllt:*

P0 0 *ist ein Element von* $\mathbb{N}$*. Es wird die* Null *genannt.*

PS S *ist eine Abbildung von* $\mathbb{N}$ *nach* $\mathbb{N}$*. Für ein* $n \in \mathbb{N}$ *heißt* $S(n)$ *der* Nachfolger *von* n *(engl.* successor*).*

PInj S *ist eine* injektive *Abbildung, das heißt, für verschiedene* $m, n \in \mathbb{N}$ *sind auch* $S(m), S(n)$ *verschieden.*

PS≠0 *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *ist* $S(n) \neq 0$

PInd *(Induktionsprinzip) Sei* $P(n)$ *eine Eigenschaft einer natürlichen Zahl die die Werte „richtig“ oder „falsch“ annehmen kann. Man nehme an dass* $P(0)$ *gilt und dass für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *für das* $P(n)$ *gilt, auch* $P(S(n))$ *gilt. Dann gilt* $P(n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

Axiome sind eine spezielle Art von Annahmen. Der Unterschied zwischen „Axiom“ und „Annahme“ ist dass ein Axiom nach seiner Einführung stillschweigend immer angenommen wird, während weitere Annahmen in jedem Lemma/Proposition/Theorem neu getroffen werden.

Die Peano-Axiome lassen sich in Symbolen wie folgt darstellen.

P0 $0 \in \mathbb{N}$

PS $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

PInj $(\forall x, y \in \mathbb{N})\Big(S(x) = S(y) \implies x = y\Big)$

PS≠0 $(\forall x \in \mathbb{N}) S(x) \neq 0$

PInd $\big(P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \implies P(S(n)))\big) \implies (\forall n \in \mathbb{N}) P(n).$

Definition 1.2. *Eine Aussage ist ein Ausdruck der die Werte „wahr“ (*$1, \top$*) oder „falsch“ (*$0, \bot$*) annehmen kann. Wenn* A, B *Aussagen sind, können wir folgende neue Aussagen bilden, die abhängig von den Werten von* A *und* B *folgende Werte annhemen:*

A	$\neg A$
	Negation
0	1
1	0

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \implies B$	$A \impliedby B$	$A \iff B$
		oder	*und*	*impliziert*	*wird impliziert von*	*ist äquivalent zu*
0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Definition 1.3 (Dezimalzahlen, informell). $1 := S(0), 2 := S(1), 3 := S(2), \ldots$ *Damit ist*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Die Peano-Axiome gelten aber auch in anderen Modellen, z.B. für römische oder unäre (Strichliste) Zahlen. Besonders wichtig sind binäre Zahlen; diese und Algorithmen für den Umgang mit ihnen bilden ein weitläufiges Thema in der Informatik und Numerik.

Beispiel. Um den Sinn aller Axiome zu verdeutlichen geben wir Beispiele von Zahlensystemen an die jeweils genau ein Axiom nicht erfüllen.

P0 nicht erfüllt:

$$\varnothing = \{\}$$

PInj nicht erfüllt:

$$\{0, 1\}, \quad S(0) = 1, S(1) = 1.$$

PS≠0 nicht erfüllt (`uint8_t` in `C++`):

$$\{0, \ldots, 255\}, \quad S(0) = 1, S(1) = 2, \ldots, S(254) = 255, S(255) = 0.$$

PInd nicht erfüllt: Zwei Kopien natürlicher Zahlen, sagen wir $\{0, 0', 1, 1', \ldots\}$ mit $S(n) = n+1$ und $S(n') = (n+1)'$. Das Induktionsprinzip ist verletzt für die (mangels geeigneter Sprache noch vage formulierte) Aussage „n hat keinen Strich".

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ mit $S(n) = n + 1$ erfüllen weder PS≠0 (weil $S(-1) = 0$) noch PInd (sei z.B. $P(n)$ die Aussage „$n \geq 0$").

1.1 Addition

Definition 1.4. *Eine* Addition *auf* $\mathbb{N}$ *ist eine Verknüpfung (Abbildung)*

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (a, b) \mapsto a + b$$

die geordnete Paare natürlicher Zahlen auf natürliche Zahlen abbildet und folgende Eigenschaften erfüllt:

0+ $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 + n = n$,

S+ $(\forall m, n \in \mathbb{N}) S(n) + m = S(n + m)$.

Wir werden später, wenn wir Mengentheorie behandeln, sehen dass eine solche Addition existiert und eindeutig ist. Momentan können wir das noch nicht tun, weil wir nicht genau definiert haben was eine Abbildung ist. Wir nehmen aber vorerst an dass eine Addition gegeben ist und führen unseren ersten mathematischen Beweis.

Lemma 1.5 (+0). $(\forall n \in \mathbb{N}) n + 0 = n$.

Ein Lemma/Proposition/Theorem/Korollar ist eine Aussage die mithilfe logischer Schlussregeln und ggf. Axiome bewiesen wird. Verschiedene Namen dienen lediglich dazu, die Wichtigkeit der jeweiligen Aussage einzuordnen, es gibt keine logische Abgrenzung.

Lemma 1.5 folgt nicht unmittelbar aus der Annahme 0+, weil wir noch nicht wissen dass $0 + n = n + 0$.

Beweis. Wir verwenden das Induktionsprinzip mit der Aussage

$$P(n) \equiv (n + 0 = n).$$

Die Schreibweise $A \equiv B$ hat eine ähnliche Bedeutung wie $A \iff B$, mit dem Unterschied dass A und B *per Definition* äquivalent sind.

Das Induktionsprinzip hat die Form $A \implies B$, wobei B die Aussage dieses Lemmas ist. Um B zu zeigen, reicht es in diesem Fall A zu zeigen. Diese Schlussregel heißt *modus ponens* oder *Implikationsbeseitigung*.

Die Aussage A ist wiederum von der Form $A_0 \wedge A_1$, wobei $A_0 \equiv P(0)$. Um die Aussage $A_0 \wedge A_1$ zu zeigen, müssen wir sowohl A_0 als auch A_1 zeigen. Die Beweise dieser Teilaussagen haben bei Benutzung des Induktionsprinzips spezielle Namen: Induktionanfang und Induktionsschritt.

Induktionsanfang (IA): Wir müssen $P(n)$ mit $n = 0$ zeigen. Für $n = 0$ gilt

$$n + 0 = 0 + 0 \overset{0+}{=} 0.$$

Deshalb ist $n + 0 = 0$, und das ist $P(n)$.

Induktionsschritt (IS): Wir müssen

$$(\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \implies P(S(n)))$$

zeigen. Dafür benutzen wir ein neues Beweismuster: um etwas für alle n zu zeigen, reicht es n fest zu halten und es für dieses n zu zeigen.

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Wir müssen nun

$$P(n) \implies P(S(n))$$

zeigen. Neues Beweismuster: um eine Implikation $A \implies B$ zu zeigen, nehmen wir A an und zeigen dann B. In diesem Fall nehmen wir also an dass $P(n)$ gilt. Die Aussage $P(n)$ heißt die *Induktionshypothese (IH)*.

Wir müssen $P(S(n))$ zeigen. Es gilt

$$S(n) + 0 \overset{S+}{=} S(n + 0) \overset{IH}{=} S(n).$$

Deshalb ist $S(n) + 0 = S(n)$, und das ist $P(S(n))$.

Hier bedeutet $\overset{IH}{=}$ dass wir IH, also die Induktionshypothese angewendet haben. □

Lemma 1.6 (+1)**.** $(\forall n \in \mathbb{N}) S(n) = n + 1$.

Beweis. Hausaufgabe (im Beweis dürfen nur die vorherigen Aussagen benutzt werden, nicht die nachfolgenden.) □

Bemerkung. Nachdem Lemma +1 bekannt ist, kann das Induktionsprinzip wie folgt umformuliert werden:

$$\big(P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \implies P(n + 1))\big) \implies (\forall n \in \mathbb{N}) P(n) \tag{PInd'}$$

In der parallelen VL Linearen Algebra 1 wird diese Version des Induktionsprinzips von Anfang an benutzt, weil dort Rechenregeln für die Addition als gegeben vorausgesetzt werden, während wir sie erst zeigen werden.

Lemma 1.7 (+S)**.** $(\forall m, n \in \mathbb{N}) n + S(m) = S(n + m)$.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$ fest. Wir zeigen per Induktion über n die Aussage

$$P(n) \equiv \big(n + S(m) = S(n+m)\big).$$

<u>IA</u> Sei $n = 0$. Dann

$$0 + S(m) \stackrel{0+}{=} S(m) \stackrel{0+}{=} S(0+m).$$

<u>IS</u> Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $P(n)$ bekannt. Wir wollen $P(S(n))$ zeigen:

$$S(n) + S(m) \stackrel{S+}{=} S(n + S(m)) \stackrel{IH}{=} S(S(n+m)) \stackrel{S+}{=} S(S(n)+m).$$ □

Lemma 1.8 (Addition ist kommutativ)**.** $(\forall m, n \in \mathbb{N}) n + m = m + n.$

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$ fest. Wir benutzen Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

<u>IA</u>

$$0 + m \stackrel{0+}{=} m \stackrel{+0}{=} m + 0.$$

<u>IS</u>

$$S(n) + m \stackrel{S+}{=} S(n+m) \stackrel{IH}{=} S(m+n) \stackrel{+S}{=} m + S(n).$$ □

Lemma 1.9 (Addition ist assoziativ)**.** $(\forall m, n, p \in \mathbb{N})(m+n)+p = m+(n+p).$

Assoziativität ist eine sehr wichtige Eigenschaft, allgemeiner sehen Sie das wenn Sie in der Linearen Algebra Gruppen betrachten. Dank Assoziativität macht die Schreibweise $m+n+p$ Sinn, da es keinen Unterschied macht in welcher Reihenfolge summiert wird. Ein gutes Beispiel in dem Assoziativität nicht gilt sind die Gleitkommazahlen, die für viele numerische Berechnungen verwendet werden; mehr dazu erfahren Sie in der Numerik und/oder Informatik.

Beweis. Hausaufgabe. Wieder gilt dass nur die früheren Aussagen benutzt werden dürfen. □

[1: 2020-11-02]

[2: 2020-11-04]

Nun schauen wir uns Beispiele von Aussagen an für die die Axiome PInj und PS≠0 gebraucht werden.

Lemma 1.10 (Kürzungsregel für Addition)**.** $(\forall m, n, p \in \mathbb{N})(m+p = n+p \implies m = n).$

Beweis. Das Neue an diesem Beweis ist dass wir nicht einfach zwei der Variablen m, n, p fest wählen und über die dritte Induktion benutzen können. Stattdessen werden wir die Aussage

$$P(p) \equiv (\forall m, n \in \mathbb{N})(m + p = n + p \implies m = n)$$

per Induktion über p zeigen.

<u>IA</u> $p = 0$. Wir wollen $P(0)$ zeigen. Dafür setzen wir $m, n \in \mathbb{N}$ fest.
Wir nehmen also an dass $m + 0 = n + 0$. Dann

$$m \stackrel{+0}{=} m + 0 \stackrel{\text{Annahme}}{=} n + 0 \stackrel{+0}{=} n.$$

<u>IS</u> Sei $P(p)$ bekannt, wir wollen $P(S(p))$ zeigen. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ fest. Wir nehmen an dass $m + S(p) = n + S(p)$. Dann

$$S(m) + p \stackrel{S+}{=} S(m+p) \stackrel{+S}{=} m + S(p) = n + S(p) \stackrel{+S}{=} S(n+p) \stackrel{S+}{=} S(n) + p.$$

Wenn wir in $P(p)$ die Variablen m, n durch $S(m), S(n)$ ersetzen, bekommen wir

$$S(m) + p = S(n) + p \implies S(m) = S(n). \tag{1.1}$$

Implikationsbeseitigung in den letzten beiden Aussagen liefert

$$S(n) = S(m).$$

Das Axiom PInj (und Implikationsbeseitigung) impliziert nun $n = m$. $\square$

Bemerkung. Es hätte nicht funktioniert m, n fest zu wählen und dann die Aussage

$$P'(p) \equiv (m + p = n + p \implies m = n)$$

zu zeigen, weil die Implikation (1.1) kein Spezialfall von $P'(p)$ ist.

Hier sehen wir wie wichtig es in einem Induktionsbeweis ist eine geeignete Aussage $P(n)$ zu finden.

Lemma 1.11. $(\forall m, n \in \mathbb{N})(m + n = 0 \implies (m = 0 \wedge n = 0))$.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Wir benutzen Induktion über m.

IA: Sei $m = 0$. Wir nehmen an dass $m + n = 0$. Dann auch

$$0 = m + n = 0 + n \overset{0+}{=} n.$$

IS: Die Behauptung sei für m bekannt. Wir wollen nun

$$S(m) + n = 0 \implies (S(m) = 0 \wedge n = 0) \tag{1.2}$$

zeigen. Es gilt

$$S(m) + n \overset{S+}{=} S(m + n) \overset{PS\neq 0}{\neq} 0.$$

Also ist die linke Seite der Implikation (1.2) falsch. Deshalb ist die Behauptung (die Implikation (1.2)) wahr. $\square$

1.2 Multiplikation

Die Multiplikation auf $\mathbb{N}$ ist eine Verknüpfung

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (a, b) \mapsto ab$$

die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

0· $(\forall n \in \mathbb{N}) 0n = 0$,

$S\cdot$ $(\forall m, n \in \mathbb{N}) S(m)n = mn + n$.

Alle Rechenregeln für Multiplikation kann man per Induktion zeigen. Da wir nicht viel Zeit haben, zeigen wir nur das Distributivgesetz.

Lemma 1.12 (Distributivgesetz in $\mathbb{N}$)**.** $(\forall m, n, p \in \mathbb{N})(p + m)n = pn + mn$.

Beweis. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ fest. Wir benutzen Induktion über $p \in \mathbb{N}$.

IA: $p = 0$:

$$(0 + m)n \overset{0+}{=} mn \overset{0+}{=} 0 + mn \overset{0\cdot}{=} 0n + mn.$$

IS: Die Behauptung sei für $p \in \mathbb{N}$ bekannt. Dann

$$(S(p)+m)n \overset{S+}{=} S(p+m)n \overset{S\cdot}{=} (p+m)n+n \overset{IH}{=} pn+mn+n \overset{+kommutativ}{=} pn+n+mn \overset{S\cdot}{=} S(p)n+mn.$$

$\square$

1.3 Ordnung

Man kann nun Ordnung der natürlichen Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ so definieren:

$$(m \leq n) \iff (\exists p \in \mathbb{N}) n = m + p.$$

In dieser Formel steht „$\exists$“ für „existiert“. Dies ist neben „$\forall$“ den man benutzen kann um neue Variablen einzuführen. Wir geben einen Beispielbeweis für eine Existenzaussage an.

Zur Abwechslung schreiben wir die Aussage des Nachfolgenden Lemmas in Wörtern statt in Symbolen.

Lemma 1.13 (Ordnung ist transitiv)**.** *Seien $n, n', n'' \in \mathbb{N}$ mit $n \leq n'$ und $n' \leq n''$. Dann gilt $n \leq n''$.*

Formal ist die Aussage dieses Lemmas

$$(\forall n, n', n'' \in \mathbb{N})\big((n \leq n') \wedge (n' \leq n'') \implies n \leq n''\big).$$

Beweis. Seien $n, n', n'' \in \mathbb{N}$ fest mit $n \leq n'$ und $n' \leq n''$. Das heißt per Definition

$$(\exists p' \in \mathbb{N}) n' = n + p' \text{ und } (\exists p'' \in \mathbb{N}) n'' = n' + p''.$$

Logische Regel: wenn die Formel $(\exists x) A(x)$ gilt, dann können wir ein neues Objekt x einführen das die Eigenschaft $A(x)$ hat. Seien also $p', p'' \in \mathbb{N}$ wie oben.

Wir müssen zeigen

$$n \leq n''.$$

Per Definition von „$\leq$“ müssen wir zeigen

$$(\exists p \in \mathbb{N}) n'' = n + p.$$

Beweismuster: Existenz kann man zeigen indem man das geforderte Objekt konstruiert. In diesem Fall setzen wir $p = p' + p''$ und können dann überprüfen dass

$$n + p = n + p' + p'' = n' + p'' = n''. \qquad \square$$

2 Mengenlehre

Sie haben von ihnen in den Vorlesungen AlMa, LA, oder Grundzüge der Mathematik gehört: die Mengen. Die Mengenlehre ist aus Fragestellungen über reelle Zahlen hervorgegangen, und deshalb ist dies der passende Ort um ihren Aufbau zu präsentieren.

Eine Menge kann Elemente enthalten, die wiederum Mengen sein müssen. Wenn X eine Menge ist und x ein Element davon, dann wird das mit $x \in X$ notiert. Das Symbol $\in$ ist ein stilisiertes ϵ, das wiederum eine stilisierte Abkürzung für „Element“ war. Die Negation „x ist kein Element von X“ wird mit $x \notin X \equiv \neg(x \in X)$ notiert.

Manchmal ist es auch praktisch „elementare“ Objekte zu haben die keine Mengen sind und dennoch Elemente von Mengen sein können. Wir werden das genauer diskutieren wenn wir die natürlichen Zahlen als Menge konstruieren.

Axiom 2.1. *Die leere Menge ist eine Menge:*

$$(\exists X)(\forall x) x \notin X.$$

Axiom 2.2 (Extensionalität)**.** *Mengen sind durch ihre Elemente bestimmt:*

$$(\forall X, Y)\Big((\forall z)(z \in X \iff z \in Y) \implies X = Y\Big).$$

Axiom 2.3 (Aussonderung)**.** *Wenn X eine Menge ist und $P(x)$ eine Aussageform, dann gibt es eine Menge $Y = \{x \in X \mid P(x)\}$ die aus Elementen von X besteht für die P gilt:*

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall x)\big(x \in Y \iff (x \in X) \wedge P(x)\big).$$

Wir müssen x aus einer Menge X nehmen und nicht alle x, sonst tritt das Russelsche Paradoxon (Barbier-Paradoxon) auf: für $P(x) \equiv x \notin x$ betrachte $M := \{x \,|\, P(x)\}$. Ist nun $M \in M$?

Definition 2.4. *Seien X, Y Mengen. Ihr* Durchschnitt *ist die Menge*

$$X \cap Y := \{x \in X \mid x \in Y\}.$$

Eine ähnliche Konstruktion der Vereinigung funktioniert nicht da im Aussonderungsaxiom eine Grundmenge gebraucht wird. Deshalb muss die Existenz der Vereinigung postuliert werden.

Axiom 2.5 (Vereinigung)**.** *Sei $\mathcal{F}$ eine Menge (deren Elemente ebenfalls Mengen sind). Dann existiert die Vereinigung $U = \cup\mathcal{F}$ der Elemente von $\mathcal{F}$:*

$$(\forall \mathcal{F})(\exists U)(\forall x)\big(x \in U \iff (\exists F \in \mathcal{F})x \in F\big).$$

Die Eindeutigkeit der Vereinigung (und später auch der Paare und der Produktmengen) folgt aus den Extensionalitätsaxiom.

Axiom 2.6 (Paar)**.** *Seien F, G Mengen. Dann gibt es eine Menge $P = \{F, G\}$ deren Elemente genau F und G sind:*

$$(\forall F, G)(\exists P)(\forall x)\big((x \in P) \iff (x = F \vee x = G)\big).$$

Mit Hilfe dieser beiden Axiome kann man nun die Vereinigung von 2 Mengen definieren:

$$F \cup G := \cup\{F, G\}.$$

Bemerkung (Nützlichkeit der Symbole). Es schadet nicht statt „$\forall n \in \mathbb{N}$“ zu schreiben „für alle natürliche Zahlen n“. Bei Verwednung natürlicher Sprachen sollte man aber auf Eindeutigkeit achten. Seien z.B. G die Menge gesunder Gerichte und L die Menge der leckeren Gerichte. Ist „gesundes und leckeres Essen“ nun $G \cap L$ oder $G \cup L$?

Definition 2.7 (Teilmenge)**.** *Seien X', X Mengen. Die Menge X' heißt* Teilmenge *von X, geschrieben $X' \subseteq X$, falls alle Elemente von X' auch Elemente von X sind, also falls*

$$(\forall x)\big(x \in X' \implies x \in X\big).$$

Axiom 2.8 (Potenzmenge)**.** *Für jede Menge X existiert die* Potenzmenge $\mathcal{P} = \mathcal{P}(X)$ *deren Elemente genau die Teilmengen von X sind:*

$$(\forall X)(\exists \mathcal{P})(\forall X')(X' \in \mathcal{P} \iff X' \subseteq X).$$

Es stellt sich heraus dass die bereits eingeführten Axiome ausreichen um Produkte von Mengen zu definieren.

Definition 2.9. *Seien x, y Mengen. Das* geordnete Paar (x, y) *ist definiert als*

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}. \tag{2.1}$$

Lemma 2.10 (Charakterisierung der geordneten Paare)**.**

$$(\forall x, y, x', y')\big((x, y) = (x', y') \iff (x = x' \wedge y = y')\big).$$

Wir können nun die Menge aller Paare von Elementen einer Menge definieren:

$$\mathrm{Paare}(X) := \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \mid (\exists x, y \in X) P = (x, y)\}.$$

Definition 2.11. *Das* Produkt *von Mengen X, Y ist die Menge*

$$X \times Y := \{P \in \mathrm{Paare}(X \cup Y) \mid (\exists x \in X)(\exists y \in Y) P = (x, y)\}.$$

Nun können wir den Begriff der Abbildung formalisieren.

Definition 2.12. *Eine* Abbildung $f : X \to Y$ *mit Definitionsbereich X und Wertebereich Y ist durch eine Teilmenge $\Gamma_f \subseteq X \times Y$, genannt* Graph von f, *charakterisiert:*

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y)\big(f(x) = y \iff (x, y) \in \Gamma_f\big).$$

Jede Menge $\Gamma \subseteq X \times Y$ mit der Eigenschaft

$$(\forall x \in X)(\exists! y \in Y)(x, y) \in \Gamma \tag{2.2}$$

ist der Graph einer Abbildung. Hier steht „$\exists!$“ für „es existiert genau ein“.

Lemma 2.13 (Verkettung/Komposition)**.** *Wenn $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen sind, dann ist*

$$(g \circ f) : X \to Z, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

auch eine Abbildung. Die Verkettung ist assoziativ: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

[2: 2020-11-04]

[3: 2020-11-09]

Bemerkung. Ähnlich zu der Regel dass in einer Formel wie $a + bc$ die Multiplikation vor der Addition ausgeführt wird, gibt es sogenannte *Präzendenzregeln* für logische Verknüpfungen. Sie sind in folgender Reihenfolge auszuführen:

(i) alle Funktionen und Relationen, z.B. $\cdot, +, =, \in$

(ii) $\neg, \exists, \forall$

(iii) $\wedge$

(iv) $\vee$

(v) $\implies, \impliedby$

(vi) $\iff$.

Überflüssige Klammern dürfen weggelassen werden. Man beachte dabei dass nicht überall Klammern eingeschoben werden können:

$$\big((\forall n) P(n)\big) \implies P(n + 1)$$

ist nicht erlaubt, weil dann das zweite „n“ nicht definiert ist. Deshalb ist

$$(\forall n)\big(P(n) \implies P(n + 1)\big)$$

die einzige sinnvolle Interpretation.

Für bessere Lesbarkeit belassen wir auch viele formal unnötige Klammern in den Formeln.

2.1 Rekursion

Axiom 2.14 (Unendlichkeitsaxiom, informal). *Es gibt eine Menge die die Peano-Axiome der natürlichen Zahlen erfüllt. Im Folgenden bezeichnen wir eine solche Menge mit* $\mathbb{N}$.

Proposition 2.15 (Rekursive Definition). *Sei X eine Menge, $x_0 \in X$, und $F : \mathbb{N} \times X \to X$ eine Abbildung. Dann gibt es eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ mit der Eigenschaft*

$$f(0) = x_0, \quad (\forall n \in \mathbb{N}) f(n+1) = F(n, f(n)).$$

Dies ist das elementarste Beispiel einer iterativen Konstruktion.

Beweis. Wir werden den Graph Γ_f, also eine Teilmenge $\Gamma \subseteq \mathbb{N} \times X$ konstruieren. Dieser Graph soll folgende Eigenschaften haben.

(i) Es ist ein Graph im Sinne von (2.2).

(ii) $(0, x_0) \in \Gamma$,

(iii) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in X)\Big((n,x) \in \Gamma \implies (n+1, F(n,x)) \in \Gamma\Big)$.

Dafür betrachten wir die Menge $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times X)$ aller Teilmengen $G \subseteq \mathbb{N} \times X$ die die Eigenschaften 2 und 3 (mit G an Stelle von Γ) erfüllen.

Es gilt $\mathbb{N} \times X \in \mathcal{G}$, also ist $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Sei

$$\Gamma := \bigcap_{G \in \mathcal{G}} G = \{(n,x) \in \mathbb{N} \times X \mid (\forall G \in \mathcal{G})(n,x) \in G\}.$$

Dass diese Menge die Eigenschaften (ii) und (iii) erfüllt folgt direkt aus den Definitionen. Es bleibt zu zeigen dass Γ ein Graph ist, d.h.,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! x \in X)(n,x) \in \Gamma.$$

Wir zeigen dies per Induktion über n.

<u>IA</u>: Die Menge

$$G_0 := \{(n,x) \in \mathbb{N} \times X \mid (n = 0 \land x = x_0) \lor n \neq 0\}$$

ist ein Element von $\mathcal{G}$. Daraus folgt dass $(0,x) \in \Gamma \subseteq G_0$ bereits $x = x_0$ impliziert.

<u>IS</u>: Sei $x_n \in X$ das eindeutige Element mit $(n, x_n) \in \Gamma$. Sei $x_{n+1} := F(n, x_n)$. Aufgrund von (iii) gilt $(n+1, x_{n+1}) \in \Gamma$. Sei $x' \in X$. Wir müssen zeigen dass

$$x_{n+1} \neq x' \implies (n+1, x') \notin \Gamma.$$

Sei dazu

$$G' := \Gamma \setminus \{(n+1, x')\}.$$

Wir stellen fest dass $G' \in \mathcal{G}$, deshalb per Definition $\Gamma \subseteq G'$, und damit $(n+1, x') \notin \Gamma$. □

Korollar 2.16 (Eindeutigkeit von $\mathbb{N}$). *Seien $(\mathbb{N}, 0, S)$ und $(\mathbb{N}', 0', S')$ zwei Tupel die beide die Peano-Axiome erfüllen. Dann existiert eine Abbildung*

$$\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$$

mit $\iota(0) = 0'$ und $S' \circ \iota = \iota \circ S$.

Wenn wir $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}'$ vertauschen, bekommen wir eine Abbildung $\iota' : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}$ mit ähnlichen Eigenschaften. Es stellt sich heraus dass $\iota \circ \iota' = \mathrm{id}_{\mathbb{N}'}$ und $\iota' \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Dazu benutzen wir das folgende Resultat:

Lemma 2.17. *Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung mit $f(0) = 0$ und $f \circ S = S \circ f$. Dann ist f die Identität auf $\mathbb{N}$.*

Lemma 2.18. *Die Abbildung ι aus Korollar 2.16 ist injektiv.*

Beweis. Wenn $\iota(n) = \iota(m)$, dann $n = \iota'(\iota(n)) = \iota'(\iota(m)) = m$. □

Definition 2.19. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* surjektiv *falls für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$.*

Definition 2.20. *Eine Abbildung die sowohl injektiv als auch surjektiv ist heißt* bijektiv.

Korollar 2.21. *Die Abbildung ι aus Korollar 2.16 ist surjektiv.*

Beweis. Sei $n' \in \mathbb{N}$. Dann ist $n' = \iota(\iota'(n'))$. □

Als Nächstes konstruieren wir die Addition.

Lemma 2.22 (Menge der Abbildungen)**.** *Für Mengen X, Y existiert die Menge $Y^X = (X \to Y)$ aller Abbildungen von X nach Y.*

Lemma 2.23 (Currying)**.** *Für beliebigen Mengen X, Y, Z gibt es eine Bijektion*

$$(X \times Y \to Z) \cong (X \to (Y \to Z))$$

die einer Abbildung $g : X \times Y \to Z$ die Abbildung $G : X \to (Y \to Z)$ mit $G(x)(y) = g(x, y)$ zuordnet.

Proposition 2.24. *Sei $(\mathbb{N}, 0, S)$ ein Tupel das die Peano-Axiome erfüllt. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Additionsverknüpfung*

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

Beweis. Currying erlaubt es uns stattdessen eine Abbildung $G : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ zu konstruieren die die folgenden Eigenschaften haben soll: für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $G(0)(m) = m$ und $G(S(n))(m) = S(G(n)(m))$. Dafür verwenden wir das Rekursionsprinzip mit $X = (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ und $F(n, x) = S \circ x$. □

Multiplikation kann ähnlich rekursiv definiert werden, was wir nicht näher anschauen werden.

Definition 2.25 (Summen und Produkte von Folgen)**.** *Eine* Folge *ist eine Abbildung deren Definitionsbereich $\mathbb{N}$ ist. Man schreibt Folgen oft in der Form $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei a_n der Wert der Folge in n ist. Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind die Summen und Produkte*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + \cdots + a_N, \quad \prod_{n=1}^{N} a_n = a_1 \cdots a_N$$

rekursiv definiert durch

$$\sum_{n=1}^{0} a_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{N+1} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + a_{N+1}, \qquad \prod_{n=1}^{0} a_n = 1, \quad \prod_{n=1}^{N+1} a_n = (\prod_{n=1}^{N} a_n) a_{N+1}.$$

Nun können wir eine bekannte Formel zeigen.

Beispiel. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$2 \sum_{n=1}^{N} n = N(N+1).$$

Beweis. Induktion über N.

IA: Für $N = 0$ verschwinden beide Seiten der Gleichung.

IS:

$$2 \sum_{n=1}^{N+1} n \overset{def}{=} 2\Big(\sum_{n=1}^{N} n + (N+1)\Big) = 2 \sum_{n=1}^{N} n + 2(N+1) \overset{IH}{=} N(N+1) + 2(N+1) = (N+1)(N+2).$$

□

2.2 Wohlordnung der natürlichen Zahlen

Wir fassen einige Eigenschaften der Ordnung der natürlichen Zahlen zusammen. Diese Eigenschaften wurden entweder bereits gezeigt oder werden in den Übungen besprochen.

Proposition 2.26. *Für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt:*

(i) $x \leq y$ *oder* $y \leq x$.

(ii) Wenn $x \leq y$ *und* $y \leq x$*, dann* $y = x$.

(iii) Reflexivität: $x \leq x$

(iv) Transitivität: wenn $x \leq y$ *und* $y \leq z$*, dann* $x \leq z$.

(v) Kürzungsregel: $x \leq y \iff x + z \leq y + z$.

(vi) Wenn $x \leq y$*, dann* $xz \leq yz$.

Lemma 2.27. *Seien* $m, n \in \mathbb{N}$ *mit* $m \leq n + 1$*. Dann gilt* $m \leq n$ *oder* $m = n + 1$.

Beweis. Hausaufgabe. □

Lemma 2.28 ($\mathbb{N}$ ist wohlgeordnet)**.** *Sei* $A \subseteq \mathbb{N}$ *eine nichtleere Teilmenge. Dann existiert das* Minimum $m = \min A$*, d.h., ein eindeutig bestimmtes Element* $m \in A$ *sodass für alle* $n \in A$ *gilt* $m \leq n$.

Eine geordnete Menge heißt *wohlgeordnet* wenn jede ihrer nichtleeren Teilmengen ein minimales Element besitzt.

Beweis. Wir zeigen nur Existenz, die Eindeutigkeit folgt aus Proposition 2.26, Teil (ii).
Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge. Wir zeigen per Induktion über k die Aussage

$$[(\exists k' \in A) k' \leq k] \implies [(\exists m \in A)(\forall n \in A) m \leq n].$$

IA: wenn $k = 0$, dann ist auch $k' = 0$. Wir nehmen dann $m = 0$.
IS: Die Behauptung sei für ein k bekannt. Wir nehmen nun an

$$(\exists k' \in A) k' \leq k + 1. \tag{2.3}$$

Beweismuster Fallunterscheidung: Falls auch

$$(\exists k'' \in A) k'' \leq k \tag{2.4}$$

gilt, dann gilt die Behauptung nach der IH.
Ansonsten gilt die Negation von (2.4):

$$(\forall k'' \in A) \neg (k'' \leq k). \tag{2.5}$$

Sei k' wie in (2.3). Nach Lemma 2.27 gilt $k' \leq k$ oder $k' = k + 1$. Der erste Fall widerspricht (2.5), also muss der zweite Fall gelten, d.h., $k' = k + 1$.
Wir behaupten dass in diesem Fall $m := k + 1$ das Minimum von A ist. Dafür müssen wir noch zeigen $(\forall n \in A) m \leq n$. Sei also $n \in A$. Nach Proposition 2.26, Teil (i) gilt $m \leq n$ oder $n \leq m$. In ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten Fall benutzen wir Lemma 2.27 und bekommen dass $n \leq k$ oder $n = k + 1$. Der erste Fall widerspricht (2.5), ist also ausgeschlossen. Im zweiten Fall gilt $k + 1 = m \leq n$. □

Proposition 2.29 (Starkes Induktionsprinzip)**.** *Sei P eine Aussageform. Wenn für jedes* $m \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$(\forall n < m) P(n) \implies P(m), \tag{2.6}$$

dann gilt bereits für jedes n die Aussage $P(n)$.

Beweis. Sei
$$A := \{n \in \mathbb{N} \mid \neg P(n)\}.$$
Widerspruchsbeweis:

Angenommen, $A \neq \emptyset$. Dann hat A nach Lemma 2.28 ein Minimum $m \in A$. Aus Definition von A folgt dass $P(n)$ gilt für alle $n < m$. Aus der Annahme (2.6) folgt $P(m)$, im Widerspruch zu $m \in A$.

Also ist die Annhame $A \neq \emptyset$ falsch. Deshalb ist $A = \emptyset$. Das bedeutet dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $P(n)$ gilt. □

2.3 Injektive und surjektive Abbildungen

Zur Erinnerung: eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *injektiv* falls
$$(\forall x, x' \in X)x \neq x' \implies f(x) \neq f(x'),$$
surjektiv falls
$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)f(x) = y,$$
und *bijektiv* falls sie injektiv und surjektiv ist.

Lemma 2.30. *Die Verkettung von injektiven Abbildungen ist injektiv. Die Verkettung von surjektiven Abbildungen ist surjektiv.*

Lemma 2.31 (Schubfachprinzip). *Wir schreiben $\mathbb{N}_{<n} = \{0, \dots, n-1\} := \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}$ für die Menge deren Elemente die n kleinsten natürlichen Zahlen sind. Seien $m, n \in \mathbb{N}$.*

(i) Wenn es eine injektive Abbildung $\mathbb{N}_{<m} \to \mathbb{N}_{<n}$ gibt, dann ist $m \leq n$,

(ii) Wenn es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N}_{<m} \to \mathbb{N}_{<n}$ gibt, dann ist $m \geq n$.

Die Rückrichtung ist jeweils einfach.

Beweis. Wir zeigen nur den Teil (i).

Wir benutzen Induktion über n und zeigen die Aussage
$$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists f : \mathbb{N}_{<m} \to \mathbb{N}_{<n}, f \text{ injektiv}) \implies m \leq n. \tag{2.7}$$

IA $n = 0$. Falls $m = 0$, dann ist $m \leq n$. Falls $m \neq 0$, dann gibt es gar keine Abbildungen $\mathbb{N}_{<m} \to \mathbb{N}_{<n}$, also ist die linke Seite der Implikation falsch.

IS Wir nehmen an dass (2.7) für n gilt, das ist die Induktionshypothese.

Sei $m \in \mathbb{N}$. Falls $m = 0$, dann ist $m \leq n$. Andernfalls $m = m' + 1$. Sei $f : \mathbb{N}_{<m'+1} \to \mathbb{N}_{<n+1}$ injektiv. Sei $\sigma : \mathbb{N}_{<n+1} \to \mathbb{N}_{<n+1}$ die Permutation die $f(m')$ und n vertauscht, d.h.,
$$\sigma(k) = \begin{cases} n, & \text{falls } k = f(m'), \\ f(m'), & \text{falls } k = n, \\ k, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.8}$$
Dann ist
$$\sigma \circ f : \mathbb{N}_{<m'+1} \to \mathbb{N}_{<n+1}$$
auch eine injektive Abbildung und es gilt $\sigma \circ f(m') = n$. Sei $f' : \mathbb{N}_{<m'} \to \mathbb{N}_{<n}$ die *Einschränkung* von $\sigma \circ f$ auf $\mathbb{N}_{<m'}$, d.h.,
$$f'(k) = (\sigma \circ f)|_{\mathbb{N}_{<m'}}(k) = (\sigma \circ f)(k).$$
Dann ist f' eine injektive Abbildung und nach IH gilt $m' \leq n$. Daraus folgt $m \leq n + 1$. □

Notation 2.32. *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Das* Bild *einer Teilmenge $X' \subseteq X$ unter f ist*

$$f(X') = \{f(x) \mid x \in X'\} := \{y \in Y \mid (\exists x \in X') f(x) = y\}.$$

Das Urbild *einer Teilmenge $Y' \subseteq Y$ unter f ist*

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y'\}.$$

Lemma 2.33. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann injektiv wenn es eine Abbildung $g : f(X) \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gibt* (Linksinverse).

Beweis. „$\Longleftarrow$“: Wenn es ein g wie oben gibt, dann folgt für $x, x' \in X$ aus $f(x) = f(x')$

$$x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'.$$

„$\Longrightarrow$“: Wenn f injektiv ist, dann ist

$$\{(y, x) \in f(X) \times X \mid (x, y) \in \Gamma_f\}$$

auch Graph einer Abbildung, und diese Abbildung kann man als g verwenden. $\square$

Lemma 2.34. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann surjektiv wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gibt* (Rechtsinverse).

Beweisversuch. „$\Longleftarrow$“: Sei g wie oben. Dann gibt es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $y = f(x)$, nämlich $x = g(y)$.

„$\Longrightarrow$“: Für jedes $y \in Y$ nach Definition der Surjektivität die Menge

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

nicht leer. Nun wählen wir für jedes y ein $x = g(y)$ aus dieser Menge. Es stellt sich allerdings heraus dass das mit den bisherigen Axiomen nicht möglich ist; wir führen für diesen Zweck gleich ein neues Axiom ein. $\square$

Sei $(F_i)_{i \in I}$ eine indizierte Familie von Mengen (das ist, formal gesehen, lediglich eine Abbildung deren Werte Mengen sind). Die dazugehörige *Produktmenge* ist

$$\prod_{i \in I} F_i := \Big\{f : I \to \bigcup_{i \in I} F_i \mid (\forall i \in I) f(i) \in F_i\Big\}.$$

Man beachte dass diese Definition nicht die frühere Definition des Produkts zweier Mengen ersetzen kann, weil sie den Begriff der Abbildung benutzt, der auf das Produkt zweier Mengen aufbaut.

Axiom 2.35 (Auswahlaxiom)**.** *Die Produktmenge einer beliebigen indizierten Familie nichtleerer Mengen ist nicht leer.*

Beweis von „$\Longleftarrow$“ in Lemma 2.34. Sei g ein Element von

$$\prod_{y \in Y} f^{-1}(\{y\}). \qquad \square$$

2.4 Kardinalität

Definition 2.36 (endliche Mengen). *Eine Menge X hat* Kardinalität $n \in \mathbb{N}$ *falls es eine Bijektion zwischen X und $\mathbb{N}_{<n}$ gibt. Wir schreiben dann $|X| = n$.*

Bemerkung. Aus dem Schubfachprinzip folgt dass die Kardinalität endlicher Mengen wohldefiniert ist, in dem Sinn dass es nur ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|X| = n$ geben kann.

Lemma 2.37. *Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $|\mathbb{N}_{<n} \times \mathbb{N}_{<m}| = nm$.*

Beweis. Eine Bijektion $\mathbb{N}_{<n} \times \mathbb{N}_{<m} \to \mathbb{N}_{<nm}$ ist gegeben durch $(a, b) \mapsto a + bn$. □

Definition 2.38. *Die* Permutationsgruppe $\mathrm{Sym}(n)$ *ist die Menge aller Bijektionen $\mathbb{N}_{<n} \to \mathbb{N}_{<n}$.*

Lemma 2.39. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $|\mathrm{Sym}(n)| = n! = 1 \cdots n$.*

Beweisidee. Per Induktion über n.

IA: $n = 0$. In diesem Fall ist $n! = 0! = 1$ und $\mathbb{N}_{<n} = \varnothing$. Es gibt genau eine Abbildung $\varnothing \to \varnothing$, und diese ist bijektiv.

IS: Man schreibe

$$\mathrm{Sym}(n+1) = \bigcup_{k=0}^{n} \{f \in \mathrm{Sym}(n+1) \mid f(n) = k\}.$$

Jede der Mengen auf der rechten Seite ist gleich mächtig wie $\mathrm{Sym}(n)$, was man mit Hilfe der Permutation (2.8) sieht. □

Definition 2.40 (Binomialkoeffizienten). *Für $k, n \in \mathbb{N}$ sei*

$$\binom{n}{k} = |\{A \subseteq \mathbb{N}_{<n} \mid |A| = k\}|$$

die Anzahl der k-Elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Für $k > n$ gilt nach dem Schubfachprinzip $\binom{n}{k} = 0$.

Lemma 2.41. *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt*

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Beweis. Es gilt

$$|\{A \subseteq \mathbb{N}_{<n+1} | |A| = k+1\}| = |\{A \subseteq \mathbb{N}_{<n+1} | |A| = k+1, n \in A\}| + |\{A \subseteq \mathbb{N}_{<n+1} | |A| = k+1, n \notin A\}|.$$

□

Lemma 2.42. *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Beweis. Zuerst zeigen wir die Behauptung für $k = 0$ und alle $0 \leq n$:

$$\binom{n}{0} = |\{\varnothing\}| = 1 = \frac{n!}{0!n!}.$$

Nun zeigen wir die komplette Behauptung per Induktion über n.

IA: Für $n = 0$ gilt auch $k = 0$, und diesen Fall haben wir bereits bearbeitet.

IS: Die Behauptung sei für ein n und alle $k \leq n$ bekannt. Für $0 \leq k < n$ bekommen wir mit Lemma 2.41

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für $n+1$ und alle $1 \leq k \leq n$ gezeigt. Den Fall $k = 0$ haben wir bereits früher bearbeitet. Der Fall $k = n+1$ ist ähnlich:

$$\binom{n+1}{0} = |\{\mathbb{N}_{<n+1}\}| = 1 = \frac{(n+1)!}{(n+1)!((n+1)-(n+1))!}. \qquad \square$$

Definition 2.43 (Kardinalität)**.** *Seien X, Y Mengen. Wir sagen dass X kleinere Kardinalität hat als Y falls es eine injektive Abbildung $X \to Y$ gibt und schreiben dann $|X| \leq |Y|$.*

Wir schreiben $|X| = |Y|$ falls $|X| \leq |Y|$ und $|Y| \leq |X|$.

Wir schreiben $|X| < |Y|$ falls $|X| \leq |Y|$ und $|Y| \not\leq |X|$.

Eine Menge X heißt abzählbar *falls $|X| \leq |\mathbb{N}|$.*

Endliche Mengen sind insbesondere abzählbar.

Lemma 2.44. *$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.*

Beweis. Eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$(k, l) \mapsto (k+l)(k+l+1)/2 + k. \qquad \square$$

Lemma 2.45 (Schröder–Bernstein, ohne Beweis)**.** *Seien X, Y Mengen mit $|X| = |Y|$. Dann gibt es eine Bijektion $X \to Y$.*

Lemma 2.46 (Diagonalargument)**.** *Sei X eine Menge. Es gibt keine surjektive Abbildung $X \to \mathcal{P}(X)$.*

Beweis. Sei $f : X \to \mathcal{P}(X)$ eine beliebige Abbildung. Definiere

$$A := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Wenn $A = f(x_0)$ für ein $x_0 \in X$, dann ist

$$x_0 \in A \overset{\text{Def. von } A}{\iff} x_0 \notin f(x_0) = A.$$

Dies ist ein Widerspruch, also gibt es kein x_0 mit $f(x_0) = A$. Insbesondere ist f nicht surjektiv. $\square$

Korollar 2.47. *Für jede Menge X ist $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.*

Beweis. Für die Ungleichung $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ betrachte die Abbildung $x \mapsto \{x\}$.

Angenommen, $|\mathcal{P}(X)| \leq |X|$. Sei $f : \mathcal{P}(X) \to X$ injektiv. Nach Lemma 2.33 existiert eine Linksinverse $g : f(X) \to \mathcal{P}(X)$, die insbesondere surjektiv ist. Wir können sie zu einer Abbildung $\tilde{g} : X \to \mathcal{P}(X)$ fortsetzen, z.B. durch

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \in f(X), \\ \emptyset, & x \notin f(X). \end{cases}$$

Die Abbildung $\tilde{g}$ ist dann surjektiv, im Widerspruch zu Lemma 2.46. $\square$

2.5 Selten benutzte Axiome

Das Zermelo–Fraenkel-Axiomensystem erfasst noch 2 weitere Axiome, das Ersetzungsaxiom und das Fundierungsaxiom. Ersteres erlaubt es, grob gesagt, Abbildungen und ihre Wertebereiche gleichzeitig implizit zu definieren. Letzteres erlaubt es, das Induktionsprinzip zu verallgemeinern. Diese zusätzlichen Axiome spielen in Analysis 1 keine Rolle.

3 Ganze, rationale, und reelle Zahlen

Die Gleichungen

$$x+1=0, \quad 2x=1, \quad x^2=2, \quad x^2=-1$$

besitzen keine Lösungen in $\mathbb{N}$. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, reelle Zahlen $\mathbb{R}$, und komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ sind Erweiterungen von $\mathbb{N}$ in denen die jeweiligen Gleichungen lösbar werden. Man könnte diese Erweiterungen axiomatisch einführen, so wie wir das mit den natürlichen Zahlen mittels Peano-Axiome getan haben. Es ist aber nützlich sie ausgehend von den ganzen Zahlen zu konstruieren, da ähnliche Konstruktionen in Analysis und Algebra häufiger vorkommen.

3.1 Ganze Zahlen

Definition 3.1. *Eine* Relation R *auf einer Menge* X *ist eine Teilmenge von* $X \times X$. *Wir schreiben* xRy *falls* $(x,y) \in R$.

Eine Relation R *heißt*

(i) reflexiv *falls* $(\forall x \in X) xRx$,

(ii) symmetrisch *falls* $(\forall x,y \in X) xRy \implies yRx$,

(iii) antisymmetrisch *falls* $(\forall x,y \in X) xRy \wedge yRx \implies y=x$,

(iv) total *falls* $(\forall x,y \in X) xRy \vee yRx$,

(v) transitiv *falls* $(\forall x,y,z \in X) xRy \wedge yRz \implies xRz$,

(vi) Äquivalezrelation *falls sie reflexiv, symmetrisch, und transitiv ist.*

(vii) partielle Ordnungsrelation *falls sie reflexiv, antisymmetrisch, und transitiv ist.*

(viii) totale Ordnungsrelation *falls sie reflexiv, antisymmetrisch, transitiv, und total ist.*

Beispiel. Relationen auf $\mathbb{N}$ und ihre Eigenschaften:

Relation	reflexiv	symmetrisch	antisymmetrisch	total	transitiv
$\leq$	ja	nein	ja	ja	ja
$<$	nein	nein	ja	nein	ja
$=$	ja	ja	ja	nein	ja
$\neq$	nein	ja	nein	nein	nein
$\mid$ (teilt)	ja	nein	ja	nein	ja

Definition 3.2 (Quotient)**.** *Sei* $\sim$ *eine Äquivalenzrelation auf einer Menge* X. *Für* $x \in X$ *ist* $[x] := \{x' \in X \mid x \sim x'\}$ *die* Äquivalenzklasse von x modulo $\sim$. *Der* Quotient von X modulo $\sim$

$$(X/\sim) = \{[x] \mid x \in X\} := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid (\exists x \in X) A = [x]\}$$

ist die Menge aller Äquivalenzklassen modulo $\sim$. *Ein* Repräsentant *einer Äquivalenzklasse* $[x]$ *ist ein Element* $x' \in [x]$.

Definition 3.3 (ganze Zahlen). *Definiere die Relation $\sim$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch*

$$(a,b) \sim (a',b') :\iff a+b' = b+a'. \tag{3.1}$$

Sei $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ *und definiere die Abbildung* $\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $\iota(n) = [(n,0)]$.

Die Äquivalenzklasse $[(a,b)]$ sollte man sich wie $a-b$ vorstellen; mit späteren Definitionen wird das auch so gelten:

$$[(a,b)] = \iota(a) - \iota(b) = a - b.$$

[4: 2020-11-11]

[5: 2020-11-16]

Um zu sehen dass (3.1) eine Äquivalenzrelation definiert muss man folgende Punkte überprüfen:

(i) $\sim$ ist eine Relation,

(ii) $\sim$ ist reflexiv,

(iii) $\sim$ ist symmetrisch,

(iv) $\sim$ ist transitiv.

Die ersten 3 Punkte sind sehr einfach; wir zeigen nur die Transitivität. Angenommen,

$$(a,b) \sim (a',b') \text{ und } (a',b') \sim (a'',b'').$$

Das heißt dass

$$a+b' = b+a' \text{ und } a'+b'' = b'+a''.$$

Wenn wir diese Gleichungen addieren und die Kürzungsregel anwenden, bekommen wir

$$a+b'+a'+b'' = b+a'+b'+a'' \text{ bzw. } a+b'' = b+a''.$$

Letzteres bedeutet nach Definition $(a,b) \sim (a'',b'')$.

Lemma 3.4. *Die Verknüpfungen*

$$[(a,b)] + [(c,d)] := [(a+c, b+d)], \quad [(a,b)] \cdot [(c,d)] := [(ac+bd, ad+bc)].$$

sind auf $\mathbb{Z}$ wohldefiniert, d.h., nicht von der Wahl der Repräsentanten der Äquivalenzklassen abhängig.

Beweis. Die Behauptung bedeutet dass aus Äquivalenz der Argumente

$$(a,b) \sim (a',b'), \quad (c,d) \sim (c',d')$$

die Äquivalenz der Werte

$$(a+c, b+d) \sim (a'+c', b'+d'), \quad (ac+bd, ad+bc) \sim (a'c'+b'd', a'd'+b'c')$$

folgt. Für die Addition rechnen wir

$$(a+c)+(b'+d') = (a+b')+(c+d') = (a'+b)+(c'+d) = (a'+c')+(b+d),$$

und nach Definition bedeutet das $(a+c, b+d) \sim (a'+c', b'+d')$.

Die Wohldefiniertheit der Multiplikation ist der aufwendigste Teil der Definition von $\mathbb{Z}$. Wir behandeln den Spezialfall $(c',d') = (c,d)$ (den allgemeinen Fall kann man daraf zurückführen). Intuitiv gesprochen, möchten wir die folgende Rechnung durchführen:

$$\begin{aligned}(ac+bd) &+ (a'd+b'c) - (a'c+b'd) - (ad+bc) \\ &= (ac+bd) + (a'd + (b-a+a')c) - (a'c + (b-a+a')d) - (ad+bc) = 0.\end{aligned}$$

Das geht aber nicht solange $\mathbb{Z}$ noch nicht definiert ist.

Der tatsächliche Beweis geht so: wir beginnen mit der Identität

$$bd + a'd + (a' + b)c = a'c + (a' + b)d + bc.$$

In den Klammern wenden wir die Voraussetzung an und bekommen

$$bd + a'd + (a + b')c = a'c + (a + b')d + bc.$$

Diese Gleichung lässt sich so umstellen:

$$(ac + bd) + (a'd + b'c) = (a'c + b'd) + (ad + bc),$$

und das ist die Definition von $(ac + bd, ad + bc) \sim (a'c + b'd, a'd + b'c)$. □

Definition 3.5. *Ein* kommutativer Ring mit 1 (K1-Ring) *ist ein Tupel* $(R, +, \cdot, 0, 1)$ *bestehend aus*

(i) einer Menge R,

(ii) einer Verknüpfung $+ : R \times R \to R$, $(a, b) \mapsto a + b$, genannt Addition,

(iii) einer Verknüpfung $\cdot : R \times R \to R$, $(a, b) \mapsto ab$, genannt Multiplikation,

(iv) einem ausgezeichneten Element $0 \in R$, *genannt* Null(-element), *und*

(v) einem ausgezeichneten Element $1 \in R$, *genannt* Eins(-element),

die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

AA Die Addition ist assoziativ:

$$(\forall a, b, c \in R) \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

AN Die Null ist ein neutrales Element der Addition:

$$(\forall a \in R) \quad a + 0 = a$$

AI Existenz additiver Inversen ($b = -a$):

$$(\forall a \in R)(\exists b \in R) \quad a + b = 0$$

AK Die Addition ist kommutativ:

$$(\forall a, b \in R) \quad a + b = b + a$$

MA Die Multiplikation ist assoziativ:

$$(\forall a, b, c \in R) \quad a(bc) = (ab)c$$

MN Die Eins ist ein neutrales Element der Multiplikation:

$$(\forall a \in R) \quad a1 = a$$

MK Die Multiplikation ist kommutativ:

$$(\forall a, b \in R) \quad ab = ba$$

D Distributivgesetz:

$$(\forall a, b, c \in R) \quad (a + b)c = ac + bc.$$

Proposition 3.6. *Seien* $0_{\mathbb{Z}} := [(0,0)]$ *und* $1_{\mathbb{Z}} := [(1,0)]$*. Dann ist* $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}})$ *ein kommutativer Ring mit* 1.

Die Einbettung $\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *ist injektiv und vertauscht mit Addition und Multiplikation. Weiterhin ist* $\mathbb{Z} = \iota(\mathbb{N}) \cup (-\iota(\mathbb{N}))$ *und* $\iota(\mathbb{N}) \cap (-\iota(\mathbb{N})) = \{0\}$*.*

Nach dem Beweis dieser Proposition unterscheiden wir nicht mehr zwischen $\mathbb{N}$ und $\iota(\mathbb{N})$.

Beweis. Wie zeigen die Existenz additiver Inversen (AI); und lassen den Rest als Übung.

Sei $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dann gilt

$$[(a,b)] + [(b,a)] = [(a+b, a+b)] = [(0,0)].$$

Also ist $[(b,a)]$ eine additive Inverse von $[(a,b)]$ (Notation: $-[(a,b)] = [(b,a)]$). □

Aus der Definition eines K1-Rings R kann man weitere Konsequenzen ziehen, z.B.:

Lemma 3.7. *Sei* R *ein K1-Ring. Dann gilt*

(i) die Kürzungsregel für die Addition:

$$(\forall a, b, c \in R) a + c = b + c \implies a = b,$$

(ii) Multiplikation mit Null ergibt Null:

$$(\forall a \in R) 0a = 0.$$

Lemma 3.8 (Nullteilerfreiheit von $\mathbb{N}$)**.** *Für alle* $m, n \in \mathbb{N}$ *gilt* $m \neq 0 \wedge n \neq 0 \implies mn \neq 0$.

Beweis. Wenn $m \neq 0$ und $n \neq 0$, dann ist $m = S(m'), n = S(n')$, und

$$mn = S(m')n = m'n + n = m'n + S(n) = S(m'n + n) \neq 0.$$ □

Lemma 3.9 (Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Z}$)**.** *Für alle* $m, n \in \mathbb{Z}$ *gilt* $m \neq 0 \wedge n \neq 0 \implies mn \neq 0$.

Beweis. Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq 0$ und $n \neq 0$. Aus Proposition 3.6 wissen wir dass m entweder die Form $[(a,0)]$ oder $[(0,a)]$ mit $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ hat. Analog ist $n = [(b,0)]$ oder $n = [(0,b)]$ mit $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$. Es gibt nun 4 Fälle, von denen wir nun einen betrachten:

$$[(a,0)][(b,0)] = [(ab,0)] \neq 0_{\mathbb{Z}},$$

da $ab \neq 0_{\mathbb{N}}$ nach Lemma 3.8. □

Definition 3.10. *Ein K1-Ring* R *heißt* total geordnet *falls darauf eine totale Ordnungsrelation* $\leq$ *definiert ist für die gilt*

(i) $(\forall a, b, c \in R) a \leq b \implies a + c \leq b + c$

(ii) $(\forall a, b \in R) a \geq 0 \wedge b \geq 0 \implies ab \geq 0.$

Lemma 3.11. *Die Relation*

$$[(a,b)] \leq [(c,d)] :\iff a + d \leq c + b.$$

ist eine wohldefinierte totale Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}$*. Es gilt*

$$\{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 0\} = \iota(\mathbb{N}) \tag{3.2}$$

Das Paar $(\mathbb{Z}, \leq)$ *ist ein total geordneter K1-Ring.*

Beweis. Größtenteils Übung.

Die Multiplikativität von $\leq$ kann man z.B. so zeigen: seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \geq 0$ und $b \geq 0$. Nach (3.2) gilt $a = \iota(m)$, $b = \iota(n)$ für $m, n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$ab = [(m,0)][(n,0)] = [(mn,0)] \geq 0.$$

□

Definition 3.12 (Betrag). *Sei R ein total geordneter K1-Ring. Für $a \in R$ definieren wir*

$$|a| := \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & \text{sonst.} \end{cases}$$

In einem total geordneten K1-Ring gelten viele bekannte Rechenregeln für Ordnung.

Lemma 3.13. *Sei R ein total geordneter K1-Ring. Dann gilt für alle $a, b \in R$:*

(i) $a \leq b \implies -b \leq -a$.

(ii) $aa \geq 0$. *Insbesondere ist* $1 = 1 \cdot 1 \geq 0$.

(iii) $ab > 0 \wedge a \geq 0 \implies b \geq 0$.

(iv) $|a| = |-a|$, $0 \leq |a|$, $a \leq |a|$.

(v) $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(Dreiecksungleichung).*

(vi) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Beweis. Dreiecksungleichung wird z.B. so gezeigt:

$$\pm a \pm b \leq |a| \pm b \leq |a| + |b|.$$

□

3.2 Rationale Zahlen (fast ohne Beweise)

Definition 3.14 (Rationale Zahlen). *Definiere die Relation $\sim$ auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ durch*

$$(a, b) \sim (a', b') :\iff ab' = a'b.$$

Sei $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/\sim$. Definiere die Abbildung $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $a \mapsto [(a, 1)]$.

Wir unterschlagen den Beweis dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, der ist ähnlich wie bei der Definition von $\mathbb{Z}$. Mit den folgenden Definitionen werden wir sehen dass

$$[(a,b)] = \frac{\iota(a)}{\iota(b)} = \frac{a}{b}.$$

Lemma 3.15. *Die Verknüpfungen*

$$[(a,b)] + [(c,d)] := [(ad + bc, bd)], \quad [(a,b)] \cdot [(c,d)] := [(ac, bd)].$$

sind auf $\mathbb{Q}$ wohldefiniert, d.h., nicht von der Wahl der Repräsentanten der Äquivalenzklassen abhängig.

Beweis. An dieser Stelle benutzen wir die Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Z}$ (Lemma 3.9) um zu sehen dass $bd \neq 0$.

Wir zeigen nur eine der Implikationen: für alle $a, b, a', b', c, d \in \mathbb{Z}$ gilt

$$(a', b') \sim (a, b) \implies (ad + bc, bd) \sim (a'd + b'c, b'd).$$

Aus der Voraussetzung $ab' = a'b$ folgt

$$(ad + bc)b'd = ab'dd + bb'cd = a'bdd + bb'cd = (a'd + b'c)bd,$$

und das ist die Behauptung. □

Proposition 3.16. *Seien* $0_{\mathbb{Q}} := [(0_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}})]$ *und* $1_{\mathbb{Q}} := [(1_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}})]$. *Dann ist* $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}})$ *ein K1-Ring.*

Die Einbettung $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ *ist injektiv und vertauscht mit Addition und Multiplikation.*

Nach dem Beweis dieser Proposition unterscheiden wir nicht mehr zwischen $\mathbb{Z}$ und $\iota(\mathbb{Z})$.

Definition 3.17. *Ein* Körper *ist ein K1-Ring* $\mathbb{K}$ *in dem zusätzlich gilt dass* $1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$ *und*

MI Existenz multiplikativer Inversen ($b = 1/a = a^{-1}$)*:*

$$(\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\})(\exists b \in \mathbb{K}) ab = 1.$$

Bemerkung. Existenz multiplikativer Inversen impliziert Nullteilerfreiheit und Kürzungsregel für Multiplikation.

Lemma 3.18. $\mathbb{Q}$ *ist ein Körper.*

Beweis. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$ gilt $[(a,b)] = 0_{\mathbb{Q}} \iff a = 0$. Insbesondere ist $1_{\mathbb{Q}} \neq 0_{\mathbb{Q}}$.

Für $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt

$$[(a,b)][(b,a)] = [(ab, ba)] = [(1,1)] = 1_{\mathbb{Q}},$$

also ist $[(b,a)]$ die multiplikative Inverse von $[(a,b)]$. □

Definition 3.19 (Ordnung auf $\mathbb{Q}$)**.** *Für* $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ *mit* $b, d > 0$ *definieren wir*

$$[(a,b)] \leq [(c,d)] :\iff ad \leq cb.$$

Lemma 3.20. $(\mathbb{Q}, \leq)$ *ist ein total geordneter K1-Ring.*

[5: 2020-11-16]
[6: 2020-11-18]

3.3 Reelle Zahlen

Definition 3.21. *Sei* $(X, \leq)$ *eine total geordnete Menge und* $A \subseteq X$. *Ein Element* $x \in X$ *heißt*

(i) obere Schranke *von* A *falls* $(\forall a \in A) a \leq x$.

(ii) Supremum *von* A *(notiert als* $x = \sup A$*) falls es die kleinste obere Schranke ist, d.h.,* x *ist eine obere Schranke und für jede weitere obere Schranke* x' *gilt* $x \leq x'$.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ *heißt* nach oben beschränkt *falls es dafür eine obere Schranke gibt.*

Analog mit $\geq$ statt $\leq$ werden untere Schranke bzw. Infimum ($\inf A$) definiert.

Es kann sein dass $\sup A \notin A$, z.B. gilt $\sup\{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\} = 0$.

Beispiel. Die Menge $A := \{a \in \mathbb{Q} \mid a \geq 0 \wedge a^2 \leq 2\}$ hat in $\mathbb{Q}$ kein Supremum (das Supremum sollte $\sqrt{2}$ sein, diese reelle Zahl ist aber nicht in $\mathbb{Q}$).

Definition 3.22. *Eine total geordnete Menge* $(X, \leq)$ *heißt* ordnungsvollständig *wenn jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum in* X *besitzt.*

Lemma 3.23. *Sei* X *eine total geordnete Menge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) X *ist ordnungsvollständig,*

(ii) jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge hat ein Infimum.

Beweis. Wir zeigen nur die Implikation (i) $\implies$ (ii); die andere ist ähnlich mit $\leq$ und $\geq$ vertauscht.

Sei $A \subseteq X$ nicht leer und nach unten beschränkt, d.h.,

$$B := \{b \in X \mid (\forall a \in A) b \leq a\} \neq \emptyset.$$

Dann ist B nach oben beschränkt (durch jedes $a \in A$). Nach Voraussetzung existiert $x = \sup B \in X$. Da x die kleinste obere Schranke ist und jedes $a \in A$ eine weitere obere Schranke ist, gilt $(\forall a \in A) x \leq a$. Also ist $x \in B$, d.h., x ist eine untere Schranke von A. Es ist aber auch die größte untere Schranke von A, also das Infimum von A. □

Satz 3.24 (reelle Zahlen)**.** *Es gibt, bis auf Isomorphie, genau einen ordnungsvollständigen total geordneten Körper. Wir nennen einen solchen Körper $\mathbb{R}$ und seine Elemente reelle Zahlen.*

Die Eindeutigkeit bis auf Isomorphie bedeutet dass es für je zwei solche Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}'$ einen Isomorphismus $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ gibt, was in diesem Fall bedeutet dass ι eine bijektive Abbildung ist die mit Addition, Multiplikation, und der Ordnung vertauscht.

Beweisskizze der Existenz von $\mathbb{R}$. Zuerst konstruieren wir die positiven reellen Zahlen. Sei $\mathbb{Q}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$. Sei $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q}_{\geq 0})$ die Menge der nichtleeren Teilmengen $R \subseteq \mathbb{Q}_{\geq 0}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $(\forall x, y \in \mathbb{Q}_{\geq 0}) x \in R \land x \leq y \implies y \in R$,

(ii) R besitzt kein Minimum.

Auf der Menge $\mathbb{R}_{\geq 0}$ kann man nun folgende Verknüpfungen und Ordnungsrelation definieren:

$$R{+}R' := \{x{+}x' | x \in R, x' \in R'\}, \quad R{\cdot}R' := \{xx' | x \in R, x' \in R'\}, \quad R \leq R' :\iff R \supseteq R'.$$

Wir haben außerdem eine Einbettung

$$\iota : \mathbb{Q}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto \{x' \in \mathbb{Q} \mid x < x'\}.$$

Die Existenz der Suprema in diesem Modell von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ kann wie folgt gesehen werden: wenn $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge. Dann ist

$$F := \cap\mathcal{F} \setminus \{\min \cap\mathcal{F}\}$$

das Supremum von $\mathcal{F}$ (wir lassen den Formelteil mit min weg falls kein Minimum existiert). In der Tat, wenn R eine obere Schranke von $\mathcal{F}$ ist, dann ist $R \subseteq \cap\mathcal{F}$, sodass $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$. Weitere Eigenschaften sind leicht zu überprüfen.

Die Konstruktion von $\mathbb{R}$ gegeben $\mathbb{R}_{\geq 0}$ funktioniert genauso wie die Konstruktion von $\mathbb{Z}$ gegeben $\mathbb{N}$. Alternativ kann man $\mathbb{Q}$ an Stelle von $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ nehmen und die obige Konstruktion etwas modifizieren um direkt $\mathbb{R}$ zu erhalten. □

Bis wir die Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$ gezeigt haben, werden wir das Symbol $\mathbb{R}$ nicht benutzen. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, ist das folgende Ergebnis nütlzich.

Satz 3.25. *Sei $\mathbb{K}$ ein total geordneter Körper. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften*

(i) $\iota(0_{\mathbb{Q}}) = 0_{\mathbb{K}}$, $\iota(1_{\mathbb{Q}}) = 1_{\mathbb{K}}$,

(ii) für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt $\iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b)$,

(iii) für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt $\iota(ab) = \iota(a)\iota(b)$.

Die Abbildung ist auch ordnungserhaltend in dem Sinn dass für alle $a \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ gilt $\iota(a) \geq 0$.

Damit können wir $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{K}$ auffassen.

Beweisskizze. Zuerst definieren wir ι auf $\mathbb{N}$ rekursiv mittels $\iota(0_{\mathbb{N}}) = 0_{\mathbb{K}}$ und $\iota(n + 1_{\mathbb{N}}) = \iota(n) + 1_{\mathbb{K}}$, dann setzen wir es auf $\mathbb{Z}$ mittels $\iota(m - n) = \iota(m) - \iota(n)$ fort, und schließlich setzen wir es auf $\mathbb{Q}$ mittels $\iota(m/n) = \iota(m)/\iota(n)$ fort. □

3.3.1 Archimedische Eigenschaft

Lemma 3.26. *Sei X eine total geordnete Menge und $x, y, z \in X$. Dann gilt*

$$\neg(x < y) \iff x \geq y, \quad x < y \leq z \implies x < z.$$

Lemma 3.27. *Sei X eine total geordnete Menge und $A \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge. Wenn* $\sup A$ *existiert, dann gilt für alle $x \in X$*

$$x < \sup A \iff (\exists a \in A)x < a.$$

Wenn $\inf A$ *existiert, dann gilt für alle $x \in X$*

$$x > \inf A \iff (\exists a \in A)x > a.$$

Beweis. Wir zeigen nur die erste Äquivalenz, die zweite geht genauso mit $\geq$ statt $\leq$.

Wir beginnen mit der einfachen Implikation $\impliedby$. Wenn $x < a$ für ein $a \in A$, dann $x < a \leq \sup A$, und damit $x < \sup A$.

Als Nächstes zeigen wir $\implies$. Dafür zeigen wir die kontrapositive Implikation

$$\neg\Big((\exists a \in A)x < a\Big) \implies \neg(x < \sup A).$$

Die Negation auf der linken Seite ist

$$(\forall a \in A)x \geq a,$$

d.h., x ist eine obere Schranke von A. Per Definition von $\sup A$ gilt also $\sup A \leq x$. □

Satz 3.28 (Archimedische Eigenschaft)**.** *Sei $\mathbb{K}$ ein ordnungsvollständiger total geordneter Körper. Dann ist $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{K}$ nach oben unbeschränkt. In anderen Worten, für jedes $x \in \mathbb{K}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.*

Beweis. Angenommen, $\mathbb{N}$ wäre in $\mathbb{K}$ nach oben beschränkt. Nach Definition der Ordnungsvollständigkeit existiert dann $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{K}$. Da $s - 1/2 < s$, existiert nach Lemma 3.27 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s - 1/2 < n$. Daraus folgt

$$n + 1 > (s - 1/2) + 1 = s + 1/2 > s.$$

Da $n + 1 \in \mathbb{N}$, ist dies ein Widerspruch zu $s = \sup \mathbb{N}$. □

Korollar 3.29. *Sei $\mathbb{K}$ ein ordnungsvollständiger total geordneter Körper. Dann gilt in $\mathbb{K}$*

$$\inf\{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} = 0.$$

Beweis. Sei $A := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$. Da 0 eine untere Schranke ist und $\mathbb{K}$ ordnungsvollständig ist, existiert nach Lemma 3.23 das Infimum $s := \inf A$. Wenn $s > 0$, dann wäre $1/s \in \mathbb{K}$ eine obere Schranke für $\mathbb{N}$, im Widerspruch zur Archimedischen Eigenschaft. □

Lemma 3.30. *Sei $\mathbb{K}$ ein ordnungsvollständiger total geordneter Körper. Sei $a \in \mathbb{K}$. Dann gibt es genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $a < n \leq a + 1$ und genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $a \leq n < a + 1$.*

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $a \geq 0$ und zeigen dass es ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gibt mit $a < n \leq a + 1$. Aufgrund der Archimedischen Eigenschaft gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n$. Da $\mathbb{N}$ wohlgeordnet ist, gibt es ein *minimales* $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n$. Da $n > a \geq 0$, gilt $n - 1 \in \mathbb{N}$. Da n minimal ist und $n - 1 < n$, gilt $a \not< n - 1$, also $a \geq n - 1$. Durch Umstellen erhalten wir $n \leq a + 1$. □

Satz 3.31 (Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)**.** *Sei $\mathbb{K}$ ein ordnungsvollständiger total geordneter Körper. Seien $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a < b$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.*

Beweis. Archimedische Eigenschaft liefert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n > 1/(b-a) > 0, \quad bn > an + 1.$$

Nach Lemma 3.30 gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit

$$an < m \leq an + 1 < bn.$$

Es folgt $a < m/n < b$. □

Korollar 3.32. *Sei $\mathbb{K}$ ein ordnungsvollständiger total geordneter Körper. Dann gilt für jedes $a \in \mathbb{K}$*

$$a = \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid a < r\}.$$

Beweisskizze der Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$. Seien $\mathbb{K}, \mathbb{K}'$ zwei ordnungsvollständige total geordnete Körper. Der gewünschte Isomorphismus (also bijektive Abbildung die mit Addition, Multiplikation, und Ordnung vertauscht) $\iota : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ ist gegeben durch

$$\iota(a) = \inf_{\text{in } \mathbb{K}'}\{r \in \mathbb{Q} \mid a <_{\text{in } \mathbb{K}} r\}.$$ □

3.3.2 Existenz von Quadratwurzeln

Lemma 3.33. *Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Dann existiert eine eindeutige Zahl $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ sodass $b^2 = a$. Wir schreiben $\sqrt{a} = a^{1/2} = b$.*

Beweis. ObdA $a > 1$, sonst betrachte $1/a$.

Seien $A := \{c \in \mathbb{R} \mid c^2 \geq a \wedge c > 0\}$ (diese Menge ist nichtleer nach dem Archimedischen Prinzip) und $b := \inf A$. Wir wollen zeigen dass $b^2 = a$.

Wenn $b^2 < a$, dann wählen wir $0 < \epsilon < \min\Big((a - b^2)/(2b+1), 1\Big)$ (mit Hilfe von Satz 3.31). Es folgt

$$(b+\epsilon)^2 = b^2 + 2b\epsilon + \epsilon^2 \leq b^2 + 2b\epsilon + \epsilon < b^2 + (a - b^2) = a.$$

Damit ist auch $b + \epsilon$ eine untere Schranke für A, im Widerspruch zu $b = \inf A$.

Wenn $b^2 > a$, dann wählen wir $0 < \epsilon < (b^2 - a)/2b$. Es folgt

$$(b-\epsilon)^2 = b^2 - 2b\epsilon + \epsilon^2 > b^2 - 2b\epsilon \geq b^2 - (b^2 - a) = a,$$

sodass $b - \epsilon \in A$, im Widerspruch zu $b = \inf A$. □

[6: 2020-11-18]

[7: 2020-11-23]

4 Konvergenz

4.1 Konvergenz von Folgen reller Zahlen

Eine Folge reeller Zahlen (oder auch *Folge (mit Werten) in $\mathbb{R}$*) ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Eine gebräuchliche Notation dafür ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (a_n), wobei a_n der Wert der Folge im Punkt $n \in \mathbb{N}$ ist.

Definition 4.1 (Konvergenz). *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir sagen dass diese Folge gegen $a \in \mathbb{R}$* konvergiert, *oder dass a der* Grenzwert *dieser Folge ist falls*

für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt $|a_n - a| < \epsilon$.

Wir schreiben dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \textit{oder} \quad a_n \to a \textit{ (wenn } n \to \infty).$$

Mit Quantoren sieht die Aussage $a_n \to a$ so aus:

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0})|a_n - a| < \epsilon.$$

oder abgekürzt

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)|a_n - a| < \epsilon.$$

Beispiel. Sei $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $a_n \to a$.

Beispiel. Sei $a_n = 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $a_n \to 0$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Nach Archimedischer Eigenschaft von $\mathbb{R}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > 1/\epsilon$. Benutze es als n_0 in der Definition der Konvergenz. □

Beispiel. $a_n = (-1)^n$ konvergiert gegen kein $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. Angenommen, $a_n \to a$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Wähle $\epsilon = 1/2$ und sei n_0 so, dass $n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon$. Dann gilt

$$2 = |a_{n_0} - a_{n_0+1}| = |(a_{n_0} - a) - (a_{n_0+1} - a)| \leq |a_{n_0} - a| + |a_{n_0+1} - a| \leq 2\epsilon = 1,$$

Widerspruch. □

Bemerkung. Die Konvergenzeigenschaft und der Grenzwert bleiben erhalten wenn man endlich viele Folgenglieder ändert.

Lemma 4.2 (Eindeutigkeit des Grenzwerts)**.** *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und seien $a, a' \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ und $a_n \to a'$. Dann gilt $a = a'$.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und seien n_0, n_0' so, dass $n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon$ bzw. $n \geq n_0' \implies |a_n - a'| < \epsilon$. Mit $n = \max(n_0, n_0')$ bekommen wir

$$|a - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| \leq 2\epsilon.$$

Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, muss $|a - a'| = 0$ sein. □

Definition 4.3 (Beschränktheit)**.** *Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$* beschränkt *falls die Menge $\{|a| \mid a \in A\}$ nach oben beschränkt ist. Wir nennen eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$* beschränkt *falls ihr Bild $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.*

Lemma 4.4. *Jede konvergente Folge in $\mathbb{R}$ ist beschränkt.*

Beweis. Sei (a_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \to a$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0 \implies |a_n - a| < 1$. Eine obere Schranke für (a_n) ist dann

$$|a| + 1 + \max_{0 \leq n < n_0} |a_n|.$$ □

Beispiel. Die Folge $a_n = n$ ist nicht beschränkt (Archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$!), also konvergiert sie auch nicht.

Definition 4.5. *Eine Folge in $\mathbb{R}$ die gegen 0 konvergiert heißt* Nullfolge.

Lemma 4.6. *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$a_n \to a \iff a_n - a \to 0 \iff |a_n - a| \to 0.$$

Lemma 4.7. *Seien (a_n) und (b_n) Folgen in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wenn $a_n \leq Cb_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b_n \to 0$, dann gilt auch $a_n \to 0$.*

Beweis. Wenn $C = 0$, dann ist $a_n = 0$ für alle n.

Wenn $C > 0$, für $\epsilon > 0$ sei n_0 so, dass $n \geq n_0 \implies |b_n - 0| < \epsilon/C$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$|a_n - 0| \leq C|b_n - 0| < C \cdot (\epsilon/C) = \epsilon.$$ □

Korollar 4.8. *Seien (a_n) und (b_n) Folgen in $\mathbb{R}$. Wenn $a_n \to 0$ und (b_n) beschränkt ist, dann $a_n b_n \to 0$.*

Lemma 4.9 (Körperoperationen und Konvergenz). *Seien (a_n) und (b_n) Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann gilt*

(i) $a_n + b_n \to a + b$,

(ii) $a_n b_n \to ab$,

(iii) wenn $a \neq 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \neq 0$, dann $1/a_n \to 1/a$.

Beweis. (i) Sei $\epsilon > 0$ fest. Seien n_0, n_0' so, dass $n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon/2$ bzw. $n \geq n_0' \implies |b_n - b| < \epsilon/2$. Dann gilt für $n \geq \max(n_0, n_0')$

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

(ii) Da die Folge (a_n) konvergiert, ist sie beschränkt. Sei $A > 0$ eine obere Schranke für $|a_n|$. Wir schätzen ab

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \leq A|b_n - b| + |b||a_n - a|.$$

Beide Summanden auf der rechten Seite sind Nullfolgen nach Lemma 4.7. Deren Summe ist nach (i) also auch eine Nullfolge. Nach Lemma 4.7 ist die linke Seite also auch eine Nullfolge.

(iii) Sei n_0 so, dass $n \geq n_0 \implies |a_n - a| < |a|/2$. Dann gilt für $n \geq n_0$

$$|a_n| \geq |a| - |a_n - a| > |a| - |a|/2 = |a|/2.$$

Deshalb ist

$$\sup_{n \geq n_0} |a_n|^{-1} = \sup\{|a_n|^{-1} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}\} \leq 2/|a|.$$

Insbesondere ist die Folge $(|a_n|^{-1})_{n \geq n_0}$ beschränkt. Deshalb ist die Einschränkung der Folge

$$|1/a_n - 1/a| = |a_n - a| \cdot |a_n|^{-1}|a|^{-1}$$

auf $n \geq n_0$ eine Nullfolge nach Korollar 4.8. □

Lemma 4.10. *Seien $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann $n^k/a^n \to 0$ wenn $n \to \infty$.*

Beweis. Sei $a = 1 + r$ mit $r > 0$. Für alle $n > 2k$ gilt

$$\begin{aligned} a^n = (1+r)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^n \\ &\geq \binom{n}{k+1} r^{k+1} = \frac{r^{k+1}}{(k+1)!} \frac{n!}{(n-k-1)!} = \frac{r^{k+1}}{(k+1)!} \prod_{j=0}^{k} (n-j) \\ &\geq \frac{r^{k+1}}{(k+1)!} \prod_{j=0}^{k} \frac{n}{2} = \frac{(r/2)^{k+1}}{(k+1)!} n^{k+1}. \end{aligned}$$

Es folgt dass

$$\frac{n^k}{a^n} \leq \Big(\frac{(r/2)^{k+1}}{(k+1)!}\Big)^{-1} \frac{n^k}{n^{k+1}} = \Big(\frac{(r/2)^{k+1}}{(k+1)!}\Big)^{-1} \frac{1}{n} \to 0.$$

□

Lemma 4.11. *Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$. Dann $a^n/n! \to 0$.*

Beweis. Sei $N \geq 2|a|$ eine natürliche Zahl. Für $n \geq N$ gilt dann

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^n}{n!} \frac{a}{n+1} \leq \frac{1}{2} \frac{a^n}{n!}.$$

Per Induktion folgt dass

$$\frac{a^n}{n!} \leq 2^{-(n-N)} \frac{a^N}{N!}.$$

Die rechte Seite ist eine Nullfolge nach Lemma 4.10. □

4.2 Ordnung und Konvergenz, monotone Folgen

Definition 4.12 (Monotonie). *Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ heißt* monoton wachsend (fallend) *wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_n \geq a_{n+1}$). Eine Folge heißt* monoton *falls sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.* Strikte Monotonie *ist ähnlich definiert, aber mit $<,>$ an Stelle von $\leq, \geq$.*

Proposition 4.13. *Sei (a_n) eine monoton wachsende nach oben beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert (a_n), und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Beweis. Sei $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $a := \sup A$.

Sei $\epsilon > 0$. Da $a-\epsilon < a = \sup A$, existiert nach Lemma 3.27 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > a-\epsilon$. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann

$$a - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a,$$

und insbesondere $|a_n - a| < \epsilon$. □

Lemma 4.14 (Bernoulli–Ungleichung). *Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

Beweis. Induktion über n. IA ist klar. IS:

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a. \quad \square$$

Lemma 4.15 (Berechnung von Wurzeln). *Seien $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x_0^p \geq a$. Wir definieren eine Folge in $\mathbb{R}$ rekursiv durch*

$$x_{n+1} := \frac{p-1}{p} x_n + \frac{a}{p x_n^{p-1}}. \tag{4.1}$$

Dann konvergiert die Folge (x_n), und ihr Grenzwert $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ erfüllt $x^p = a$.

Beweis. Für die rekursive Definition benutzen wir die Funktion $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ die durch

$$x \mapsto \frac{p-1}{p} x + \frac{a}{p x^{p-1}}$$

gegeben ist. Insbesondere ist (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}_{>0}$ und durch 0 von unten beschränkt. Mit Bernoulli-Ungleichung bekommen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1}^p = x_n^p\Big(1 - \frac{1}{p} + \frac{a}{p x_n^p}\Big)^p \geq x_n^p\Big(1 + p\big(-\frac{1}{p} + \frac{a}{p x_n^p}\big)\Big) = x_n^p\Big(1 - 1 + \frac{a}{x_n^p}\Big) = a,$$

sodass $x_n^p \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Als Nächstes zeigen wir dass die Folge (x_n) monoton fallend ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{p-1}{p} x_n - \frac{a}{p x_n^{p-1}} = \frac{x_n}{p} - \frac{a}{p x_n^{p-1}} = \frac{x_n}{p}\Big(1 - \frac{a}{x_n^p}\Big) \geq 0.$$

Also ist (x_n) eine monoton fallende, von unten beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, und damit konvergent.

Sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann ist $x > 0$, da sonst $x_n < \min(a,1)$ für genügend große $n \in \mathbb{N}$ gelten würde, im Widerspruch zu $x_n^p \geq a$. Also können wir in (4.1) auf beiden Seiten Grenzwerte nehmen (mit Hilfe von Lemma 4.9) und erhalten

$$x = \frac{p-1}{p} x + \frac{a}{p x^{p-1}}.$$

Daraus folgt $x^p = a$. □

Bemerkung. Die Konstruktion (4.1) ist ein Beispiel einer *Fixpunktiteration* (in diesem Fall das sogenannte Newtonverfahren). Fixpunktiterationen werden in Analysis 2 systematisch behandelt.

[7: 2020-11-23]

[8: 2020-11-25]

Lemma 4.16 (Sandwichlemma). *Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man nehme an dass (a_n) und (c_n) zu dem gleichen Grenzwert konvergieren, also $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$. Dann konvergiert auch (b_n) zu dem gleichen Grenzwert.*

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n \to 0.$$

Nach Lemma 4.7 ist $b_n - a_n$ also auch eine Nullfolge. Es folgt $b_n = (b_n - a_n) + a_n \to 0 + a = a$. □

Definition 4.17 (Limes superior/inferior). *Für eine beschränkte Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ sei*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} a_m = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} a_m, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} a_m = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} a_m.$$

Lemma 4.18. *Sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *(a_n) konvergiert,*

(ii) $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

In beiden Fällen gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Beweis. Wir zeigen nur $(ii) \implies (i)$. Dies folgt aus dem Sandwichlemma, angewandt auf die Folgen

$$\inf_{m\geq n} a_m \leq a_n \leq \sup_{m\geq n} a_m.$$

□

Definition 4.19 (Teilfolge). *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine strikt monoton steigende Folge in $\mathbb{N}$. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine* Teilfolge *von (a_n).*

Proposition 4.20. *Jede Folge in einem total geordneten Raum besitzt eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Sei (a_n) eine Folge in einem total geordneten Raum. Sei

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid (\forall m \geq n) a_n \geq a_m\}.$$

Wenn M eine unbeschränkte Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, dann konstruieren wir eine Indexfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv wie folgt: sei $n_0 \in M$ beliebig. Für ein $k \in \mathbb{N}$ setzen wir weiter

$$n_{k+1} := \min(M \cap \mathbb{N}_{>n_k}).$$

Mit dieser Definition gilt $a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}$, da $n_k \in M$, wir haben also eine monoton fallende Teilfolge gefunden.

Wenn M dagegen eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, dann konstruieren wir eine Indexfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie folgt: sei $n_0 > \sup M$. Für ein $k \in \mathbb{N}$ setzen wir weiter

$$n_{k+1} := \min\{m \in \mathbb{N}_{>n_k} \mid a_{n_k} < a_m\}.$$

Die letztere Menge ist nicht leer weil $n_k \notin M$, da $n_k \geq n_0 > \sup M$. Mit dieser Definition gilt $a_{n_k} < a_{n_{k+1}}$, wir haben also eine (strikt) monoton steigende Teilfolge gefunden. □

Korollar 4.21 (Satz von Bolzano–Weierstraß). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Nach Proposition 4.20 existiert eine monotone Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Diese Teilfolge ist auch beschränkt. Nach Proposition 4.13 konvergiert diese Teilfolge. □

4.3 Uneigentliche Grenzwerte

Es ist gelegentlich praktisch $\pm\infty$ als Grenzwerte zuzulassen. Dazu definieren wir

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

als geordnete Menge, wobei $-\infty$ das kleinste Element ist, $+\infty$ das größte Element, und ansonsten die Ordnung von $\mathbb{R}$ benutzt wird. In $\bar{\mathbb{R}}$ hat jede Teilmenge ein Supremum:

- für eine nach oben unbeschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt in $\bar{\mathbb{R}}$ dass $\sup A = +\infty$.
- für die leere Menge $A = \emptyset$ gilt in $\bar{\mathbb{R}}$ dass $\sup A = -\infty$.

Genauso hat jede Teilmenge in $\bar{\mathbb{R}}$ ein Infimum, und es gilt $\inf A = -(\sup(-A))$.

Die Definition der Konvergenz in $\bar{\mathbb{R}}$ lässt sich systematisch formulieren wenn wir metrische Räume definieren, ad hoc kann man sagen dass eine Folge (a_n) in $\bar{\mathbb{R}}$ gegen $+\infty$ konvergiert falls

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}) a_n \geq M.$$

Lemma 4.22. *Jede monotone Folge in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergiert in $\bar{\mathbb{R}}$.*

Beweis. Sei (a_n) eine monoton steigende Folge in $\bar{\mathbb{R}}$. Wenn kein n_0 gibt sodass sie für alle $n \geq n_0$ den selben Wert annimmt, dann nimmt sie Werte in $\mathbb{R}$ an. Wenn sie dazu noch beschränkt ist, dann konvergiert sie nach Proposition 4.13. Wenn sie unbeschränkt ist, dann konvergiert sie gegen $+\infty$. □

4.4 Metrische Räume

Der Begriff der Konvergenz macht allgemeiner in sogenannten *metrischen Räumen* Sinn.

Definition 4.23. *Ein* metrischer Raum *besteht aus einer Menge M und einer Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, genannt* Metrik*, sodass für alle $x, y, z \in M$ gilt*

(i) $x = y \iff d(x, y) = 0$,

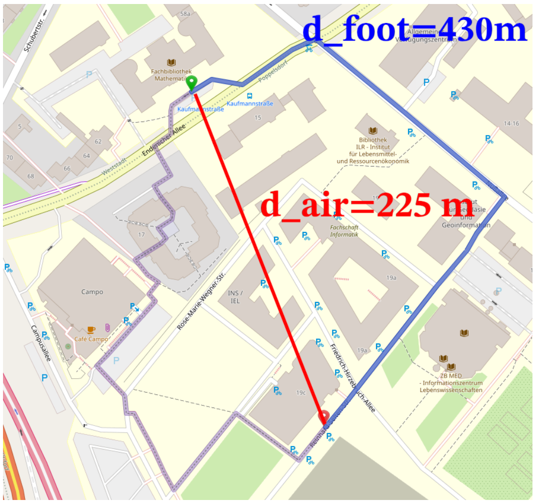
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Symmetrie),*

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(Subadditivität oder Dreiecksungleichung).*

Die Größe $d(x, y)$ wird als der *Abstand zwischen x und y (bezüglich der Metrik d)* bezeichnet.

Beispiel. $\mathbb{R}$ ist ein metrischer Raum mit der (Standard-)Metrik $d(x, y) = |x - y|$.

Beispiel. M Menge aller öffentlich zugänglichen Punkte in Bonn und $d_{\text{foot}}(x, y)$ die minimale Fußweglänge zwischen x, y.



Anmerkung: wenn wir Fußweg durch Fahrradweg oder die Länge durch Dauer ersetzen, wird die Symmetrie verletzt. Wenn wir Bonn durch Deutschland ersetzen, dann muss d manchmal den Wert $+\infty$ annehmen, weil es keinen Fußweg vom Festland auf manche Inseln gibt.

Beispiel. Sei M eine beliebige Menge. Dann ist

$$d_{\text{dis}}(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf M, die sogenannte *diskrete Metrik*.

Beispiel. Sei (M, d) ein metrischer Raum, M' eine Menge, und $\iota : M' \to M$ eine injektive Abbildung. Dann ist $\iota^* d(x, y) := d(\iota(x), \iota(y))$ eine Metrik auf M' (die *pullback*- oder *Rücktransport*-Metrik).

Wenn $M' \subseteq M$ eine Teilmenge und ι die Identitätsabbildung ist, nennt man $d_{M'}(x, y) := \mathrm{id}^* d(x, y) = d(x, y)$ die *induzierte* Metrik. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ ein metrischer Raum.

Beispiel. Wir betrachten die Abbildung $\iota : \bar{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$,

$$\iota(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R}, \\ \pm 1, & x = \pm\infty. \end{cases}$$

Dann ist der Pullback der Standradmetrik auf $\mathbb{R}$,

$$\iota^* d(x, y) = |\iota(x) - \iota(y)|$$

eine Metrik auf $\bar{\mathbb{R}}$.

Definition 4.24 (Konvergenz in metrischen Räumen)**.** *Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (a_n) in M heißt* konvergent *mit Grenzwert $a \in M$ (auch: $a_n \to a$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = a$) falls*

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}) d(a_n, a) < \epsilon.$$

Für $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik stimmt das mit der vorherigen Definition überein. Für $\bar{\mathbb{R}}$ mit der oben beschriebenen Metrik stimmt diese Definition der Konvergenz mit der Definition in Abschnitt 4.3 überein (Übung). Genauso wie für Folgen in $\mathbb{R}$ erhalten wir folgende Eigenschaften von Folgen in metrischen Räumen.

Lemma 4.25 (Eindeutigkeit und Charakterisierung des Grenzwerts)**.** *Sei (a_n) eine Folge in einem Metrischen Raum (M, d) und seien $a, a' \in M$. Dann gilt*

(i) Wenn $a_n \to a$ und $a_n \to a'$, dann $a = a'$.

(ii) $a_n \to a \iff d(a_n, a) \to 0$.

4.5 Cauchy-Folgen

Die Definition der Konvergenz hat den Nachteil dass man einen Kandidaten für den Grenzwert haben muss um die Definition überprüfen zu können. In diesem Abschnitt lernen wir ein Konvergenzkriterium kennen das nur die Werte der Folge benutzt.

Definition 4.26. *Eine Folge (a_n) in einem metrischen Raum (M,d) heißt* Cauchy-Folge *wenn*

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, n' \in \mathbb{N}_{\geq n_0}) d(a_n, a_{n'}) < \epsilon.$$

Kurzschreibweise:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) n, n' \geq n_0 \implies d(a_n, a_{n'}) < \epsilon.$$

Lemma 4.27. *Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist auch eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $a_n \to a$ eine konvergente Folge. Sei $\epsilon > 0$. Nach Definition der Konvergenz existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0 \implies d(a_n, a) < \epsilon/2$. Für $n, n' \geq n_0$ bekommen wir

$$d(a_n, a_{n'}) \leq d(a_n, a) + d(a, a_{n'}) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \qquad \square$$

Bemerkung. Im Beweis des folgenden Satzes ist die folgende Aussage implizit enthalten: wenn (a_n) eine Cauchyfolge in einem metrischen Raum ist und eine Teilfolge (a_{n_k}) gegen ein a konvergiert, dann konvergiert auch $a_n \to a$.

Satz 4.28 (Cauchy-Kriterium für Folgen in $\mathbb{R}$)**.** *Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.*

Beweis. Sei (a_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

Schritt 1: (a_n) ist beschränkt. Das geht ähnlich wie der Beweis für konvergente Folgen (Lemma 4.4).

Schritt 2: Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ der Grenzwert dieser Teilfolge. Wir werden zeigen dass $a_n \to a$.

Sei $\epsilon > 0$. Nach Definition der Konvergenz existiert ein k_0 mit $k \geq k_0 \implies |a_{n_k} - a| < \epsilon/2$. Nach Definition einer Cauchy-Folge existiert ein N mit $n, n' \geq N \implies |a_n - a_{n'}| < \epsilon/2$. Sei $k \geq k_0$ so, dass $n_k \geq N$. Dann gilt für alle $n \geq N$

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \qquad \square$$

Satz 4.28 ist in allgemeinen metrischen Räumen falsch.

Beispiel. Sei $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der induzierten Metrik. Die Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ ist in M eine Cauchyfolge, konvergiert aber nicht in M.

Beispiel. Sei $M = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ mit der induzierten Metrik. Betrachte die Folge (x_n) aus Lemma 4.15 mit einem rationalen Startwert und $a = p = 2$. Diese Folge nimmt Werte in $\mathbb{Q}$ an und ist in $\mathbb{R}$ konvergent. Nach Lemma 4.27 ist sie eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Deshalb ist sie auch eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$.

Wenn $x_n \to x$ in $\mathbb{Q}$, dann ist auch $x_n \to x$ in $\mathbb{R}$, und aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwerts gilt $x = \sqrt{2}$. Dies ist ein Widerspruch zu $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, also konvergiert die Folge $(x_n)_n$ nicht in $\mathbb{Q}$.

Das Cauchy-Kriterium für Konvergenz ist außerordentlich wichtig. Deshalb gibt es eine spezielle Bezeichnung für metrische Räume in denen dieses Kriterium erfüllt ist.

Definition 4.29 (Metrische Vollständigkeit)**.** *Ein metrischer Raum (M,d) heißt* (metrisch) vollständig *wenn jede Cauchy-Folge in M in M konvergiert.*

Beispiel. $\mathbb{R}$ ist metrisch vollständig.

5 Normierte Vektorräume

5.1 Vektorräume

Definition 5.1. *Ein* Vektorraum *über* $\mathbb{R}$ *ist eine kommutative Gruppe* $(V, +)$ *zusammen mit einer Skalarmultiplikation* $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, $(a, v) \mapsto av$, *sodass für alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *und* $v, w \in V$ *gilt*

(i) $a(v + w) = av + aw$,

(ii) $(a + b)v = av + bv$,

(iii) $(ab)v = a(bv)$,

(iv) $1v = v$.

Beispiel. $\mathbb{R}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, mit der Multiplikation in $\mathbb{R}$ als Skalarmultiplikation.

Beispiel. $\mathbb{R}^N = \prod_{i=1}^N \mathbb{R}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation: für $v = (v_1, \dots, v_N), w = (w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{R}^N$ und $a \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$v + w = (v_1 + w_1, \dots, v_N + w_N), \quad av := (av_1, \dots, av_N).$$

Beispiel. Sei $B(\mathbb{N})$ die Menge aller beschränkten Folgen in $\mathbb{R}$. Dies ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit den komponentenweisen Operationen.

Beispiel. Sei $B_c(\mathbb{N})$ die Menge aller beschränkten Folgen in $\mathbb{R}$ mit nur endlich vielen Folgengliedern $\neq 0$. Dies ist auch ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit den komponentenweisen Operationen.

[8: 2020-11-25]

[9: 2020-11-30]

5.2 Normen auf Vektorräumen

Definition 5.2. *Sei* V *ein Vektorraum über* $\mathbb{R}$. *Eine Abbildung* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *heißt* Norm auf V *falls für alle* $a \in \mathbb{R}$ *und* $v, w \in V$ *folgendes gilt.*

(i) $v = 0 \iff \|v\| = 0$.

(ii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *(Dreiecksungleichung),*

(iii) $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$ *(Homogenität).*

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ *bezeichnet man als* normierten Vektorraum.

Beispiel. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist ein normierter Vektorraum.

Beispiel. Für $v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ definiere

$$\|v\|_1 := \sum_{j=1}^N |v_j|.$$

Dies ist eine Norm auf $\mathbb{R}^N$.

Beispiel. Für $v = (v_j)_{j \in \mathbb{N}} \in B(\mathbb{N})$ definiere

$$\|v\|_\infty := \sup_{j \in \mathbb{N}} |v_j|.$$

Dies ist eine Norm sowohl auf $B(\mathbb{N})$ als auch auf $B_c(\mathbb{N})$.

Definition 5.3 (Euklidische Norm). *Für $v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ definiere*

$$\|v\|_2 := \Big(\sum_{j=1}^{N} |v_j|^2\Big)^{1/2}.$$

Lemma 5.4 (Cauchy–Schwarz-Ungleichung). *Seien $v_1, \dots, v_N, w_1, \dots, w_N \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gilt*

$$\sum_{j=1}^{N} v_j w_j \leq \|v\|_2 \|w\|_2.$$

Beweis. Wenn $\|v\|_2 = 0$, dann sind alle $v_j = 0$, sodass die linke Seite der Ungleichung verschwindet. Sei also ObdA $\|v\|_2 \neq 0$.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Mit der elementaren Ungleichung $ab \leq a^2/2 + b^2/2$ (die aus $(a-b)^2 \geq 0$ folgt) können wir schreiben

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} v_j w_j &= \sum_{j=1}^{N} (\lambda v_j)(w_j/\lambda) \\
&\leq \sum_{j=1}^{N} (\lambda v_j)^2/2 + (w_j/\lambda)^2/2 \\
&= \lambda^2 \|v\|_2^2/2 + \|w\|_2^2/(2\lambda^2).
\end{aligned}$$

Wenn wir nun $\lambda = \sqrt{\|w\|_2/\|v\|_2}$ wählen, erhalten wir die Behauptung. □

Lemma 5.5 (Subadditivität der Euklidischen Norm). *Für alle $v, w \in \mathbb{R}^N$ gilt*

$$\|v + w\|_2 \leq \|v\|_2 + \|w\|_2.$$

Beweis. Wir quadrieren die linke Seite der Ungleichung und erhalten

$$\begin{aligned}
\|v + w\|_2^2 &= \sum_{j=1}^{N} |v_j + w_j|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{N} (|v_j| + |w_j|)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{N} |v_j|^2 + 2|v_j||w_j| + |w_j|^2.
\end{aligned}$$

Mit der Cauchy–Schwarz-Ungleichung schätzen wir weiter ab

$$\begin{aligned}
\dots &= \|v\|_2^2 + \|w\|_2^2 + 2\sum_{j=1}^{N} |v_j||w_j| \\
&\leq \|v\|_2^2 + \|w\|_2^2 + 2\|v_j\|_2 \|w_j\|_2 \\
&= (\|v\|_2 + \|w\|_2)^2.
\end{aligned}$$

□

Auf einem normierten Vektorraum benutzen wir stets die *induzierte Metrik*

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Damit können wir über Konvergenz von Folgen in normierten Vektorräumen sprechen.

Lemma 5.6 (Rechenregeln für Grenzwerte in normierten Vektorräumen). *Sei $a_n \to a$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Seien $v_n \to v$ und $w_n \to w$ konvergente Folgen in einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$. Dann gilt $a_n v_n \to av$ und $v_n + w_n \to v + w$.*

Beweis. Gleicher Beweis wie im Fall $V = \mathbb{R}$ (Lemma 4.9). □

5.3 Banachräume

Definition 5.7. *Ein* Banachraum *ist ein normierter Vektorraum der (metrisch) vollständig ist.*

Beispiel. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist ein Banachraum nach Satz 4.28.

Lemma 5.8. $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$ *ist ein Banachraum.*

Beweis. Wir müssen zeigen dass jede Cauchyfolge konvergiert. Sei also $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^N$. Jedes Element dieser Folge ist ein N-Tupel: $\vec{v}_n = (v_{n,j})_{j=1}^N$.

Sei $1 \leq j \leq N$ fest. Da $|v_{n,j} - v_{n',j}| \leq \|v_n - v_{n'}\|_2$, ist jede Folge $(v_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, konvergiert also gegen ein (eindeutig bestimmtes) $v_j \in \mathbb{R}$.

Sei $\vec{v} := (v_j)_{j=1}^N$. Wir werden zeigen dass $\|\vec{v}_n - \vec{v}\|_2 \to 0$. Sei dazu $\epsilon > 0$. Per Definition existiert für jedes $1 \leq j \leq N$ ein $n_{0,j} \in \mathbb{N}$ sodass

$$n \geq n_{0,j} \implies |v_{n,j} - v_j| < \epsilon/\sqrt{N}.$$

Es folgt dass für $n \geq \max\{n_{0,1}, \dots, n_{0,N}\}$ gilt

$$\|\vec{v}_n - \vec{v}\|_2 = \Big(\sum_{j=1}^N |v_{n,j} - v_j|^2\Big)^{1/2} < \Big(\sum_{j=1}^N (\epsilon/\sqrt{N})^2\Big)^{1/2} = \epsilon.$$ □

Beispiel. $(B_c(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein normierter Raum, aber kein Banachraum.

Beweis. Sei $\vec{v} = (v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die Folge $v_j = 2^{-j}$ in $\mathbb{R}$, sodass $\vec{v} \in B(\mathbb{N})$.

Betrachte die Folge $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B_c, wobei

$$\vec{v}_n = (v_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}, \quad v_{n,j} = \mathbf{1}_{j\leq n} v_j.$$

Dann gilt $\|\vec{v}_n - \vec{v}\|_\infty = 2^{-n-1} \to 0$, aber $\vec{v}$ ist kein Element von $B_c(\mathbb{N})$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwerts konvergiert die Folge $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht in $B_c(\mathbb{N})$. □

5.4 Komplexe Zahlen

Definition 5.9. *Die* komplexen Zahlen *sind der Vektorraum* $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *über* $\mathbb{R}$ *mit der zusätzlichen Verknüpfung*

$$(x, y)(x', y') := (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ *heißt* x *der* Realteil, $x = \Re z$, *und* y *der* Imaginärteil, $y = \Im z$, *von* z.

Wir definieren weiterhin $0_\mathbb{C} := (0, 0)$, $1_\mathbb{C} := (1, 0)$, $i := (0, 1)$, *und* $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\iota(x) = (x, 0)$.

Die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ stimmt mit der Skalarmultiplikation auf $\mathbb{R}^2$ überein:

$$a(x, y) = (ax, ay) = \iota(a) \cdot (x, y).$$

Mit dieser Definition gilt

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1_\mathbb{C},$$

Satz 5.10. $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0_\mathbb{C}, 1_\mathbb{C})$ *ist ein Körper. Die Abbildung* $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *ist ein injektiver Körperhomomorphismus (d.h., sie vertauscht mit Addition und Multiplikation).*

Beweis. Wir zeigen nur die Existenz von Inversen. Dafür benutzen wir *komplexe Konjugation*: für $x, y \in \mathbb{R}$ setze

$$\overline{(x, y)} = (x, -y).$$

Wir behaupten dass für $x, y \in \mathbb{R}$ die nicht beide verschwinden gilt

$$(x, y)^{-1} = (x^2 + y^2)^{-1}\overline{(x, y)},$$

wobei die Inverse auf der rechten Seite in $\mathbb{R}$ genommen wurde. Tatsächlich gilt

$$(x, y)\overline{(x, y)} = (x, y)(x, -y) = (x^2 - y(-y), x(-y) + yx) = (x^2 + y^2, 0),$$

und es folgt

$$(x, y)(x^2 + y^2)^{-1}\overline{(x, y)} = (x^2 + y^2)^{-1}(x^2 + y^2, 0) = (1, 0) = 1_{\mathbb{C}}. \qquad \square$$

Wenn man nun $\mathbb{R}$ mit einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ identifiziert, dann kann man $(x, y) = x + iy$ schreiben.

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und die komplexe Konjugation gelten die Rechenregeln

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad \Re z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \Im z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist definiert als

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt das mit der früheren Definition des Betrags überein.

Lemma 5.11. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

(i) $|z| = 0 \iff z = 0$,

(ii) $|zw| = |z| \cdot |w|$ *(Multiplikativität),*

(iii) $|\overline{z}| = |z|$,

(iv) $|\Re z| \leq |z|$, $|\Im z| \leq |z|$,

(v) $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(Dreiecksungleichung)*

Beweis. Da der Betrag auf $\mathbb{C}$ genau die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist, sind die meisten Aussagen einfach zu sehen. Nur die Multiplikativität ist nicht sofort ersichtlich. Wir rechnen also nach: sei $z = a + ib, w = c + id$. Dann

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= |ac - bd + i(ad + bc)|^2 = |ac - bd|^2 + |ad + bc|^2 \\ &= |ac|^2 - 2acbd + |bd|^2 + |ad|^2 + 2adbc + |bc|^2. \\ &= |ac|^2 + |bd|^2 + |ad|^2 + |bc|^2 \\ &= (|a|^2 + |b|^2)(|c|^2 + |d|^2) = |z|^2|w|^2. \end{aligned} \qquad \square$$

Korollar 5.12. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ *ist ein Banachraum (über $\mathbb{R}$).*

Notation 5.13. *Wir schreiben $\mathbb{K}$ für einen der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.*

Beispiel (Bombelli, 16. Jhd.). Die Cardano-Lösungsformel für kubische Gleichungen der Form $x^3 = 3px + 2q$ lautet

$$x = C + \frac{p}{C}, \quad C = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

Diese Formel kommt sogar im reellen Fall nicht ohne komplexe Zahlen aus. Sei z.B. $p = 5$ und $q = 2$. Dann ist $x = 4$ eine Lösung. Allerdings ist $q + \sqrt{q^2 - p^3} = 2 + \sqrt{-121} = 2 + 11i$. Eine dritte Wurzel von $2 + 11i$ in $\mathbb{C}$ ist $2 + i$, und $5/(2 + i) = 2 - i$.

[9: 2020-11-30]

[10: 2020-12-07]

6 Reihen

Reihen sind eine spezielle Art von Folgen, nämlich die Partialsummen einer weiteren Folge. Wir werden 2 Sorten von Reihen benutzen: Reihen in Banachräumen und positive Reihen (in $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$).

In den Beweisen kann man sich den Banachraum V als $\mathbb{R}$ vorstellen, wir werden die Ergebnisse dieses Kapitels aber auch für andere Banachräume verwenden. Der Fall $V = \mathbb{C}$ wird bei der Betrachtung trigonometrischer Funktionen wichtig sein. Später werden wir auch Funktionenräume als V verwenden.

Definition 6.1 (Reihe in einem Banachraum). *Sei $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem Banachraum V. Die n-te* Partialsumme *der Folge (v_j) ist*

$$s_n := \sum_{j=0}^{n} v_j.$$

Die Folge der Partialsummen (s_n) heißt Reihe *in V, man bezeichnet sie auch mit $\sum_j v_j$. Das j-te Folgenglied v_j bezeichnet man auch als den j-ten* Summand *der Reihe $\sum_j v_j$.*

Eine Reihe heißt konvergent *falls die Folge ihrer Partialsummen in V konvergiert. Der Grenzwert heißt dann der* Wert der Reihe *und wird mit*

$$\sum_{j=0}^{\infty} v_j := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} v_j \tag{6.1}$$

bezeichnet. Eine Reihe heißt divergent *falls sie nicht konvergent ist.*

Aus den entsprechenden Eigenschaften für Folgen bekommen wir Rechenregeln für Reihen:

Lemma 6.2. *Seien $\sum_j v_j$ und $\sum_j w_j$ konvergente Reihen in einem Banachraum V und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\sum_{j=0}^{\infty}(v_j + w_j) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j + \sum_{j=0}^{\infty} w_j, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} a v_j = a \sum_{j=0}^{\infty} v_j,$$

und insbesondere konvergieren die Reihen auf den jeweiligen linken Seiten.

Wir beginnen mit einer einfachen Charakterisierung der Konvergenz von Reihen.

Lemma 6.3 (Teleskopsumme). *Sei (b_j) eine Folge in einem Banachraum V und $a_j = b_{j+1} - b_j$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_j a_j$ genau dann wenn die Folge (b_j) konvergiert. In diesem Fall gilt*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \lim_{j\to\infty} b_j - b_0$$

Beweis. Für die Partialsummenfolge gilt

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = b_{n+1} - b_0.$$

Nach der Rechenregeln für Grenzwerte konvergiert diese Folge genau dann wenn (b_n) konvergiert. □

Lemma 6.4 (Geometrische Reihe). *Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_k a^k$, und*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}.$$

Beweis. Nach den Rechenregeln für Grenwerte reicht es zu zeigen dass

$$(1-a)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a^k = \lim_{n\to\infty}(1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k = 1.$$

Dafür schreiben wir

$$(1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k = \sum_{k=0}^{n}(1-a)a^k = \sum_{k=0}^{n}(a^k - a^{k+1}) = a^0 - a^{n+1}$$

als Teleskopreihe (mit $b_j = -a^j$). Nach Lemma 4.10 gilt

$$\lim_{j\to\infty}|a^j| = \lim_{j\to\infty}|a|^j = 0.$$

□

6.1 Positive Reihen

Reihen mit positiven Summanden sind von fundamentaler Bedeutung, weil die Konvergenz allgemeiner Reihen häufig durch einen Vergleich mit einer positiven Reihe gezeigt wird. Im Gegensatz zu Reihen in allgemeinen Banachräumen kann jeder positiven Reihe ein Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ zugewiesen werden.

Definition 6.5 (Positive Reihe)**.** *Für eine Folge (a_j) in $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ setzen wir*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j := \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j=0}^{n} a_j, \tag{6.2}$$

wobei die Summe als $+\infty$ interpretiert wird wenn einer der Summanden gleich $+\infty$ ist.

Da die Partialsummenfolge monoton steigen ist, stimmen die Definitionen 6.1 und 6.5 überein wenn die Reihe in $\mathbb{R}$ konvergiert:

Lemma 6.6. *Sei (a_j) eine Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) Die Reihe $\sum_j a_j$ konvergiert in $\mathbb{R}$,

(ii) die Partialsummenfolge $(\sum_{j=0}^{n} a_j)_{n\in\mathbb{N}}$ ist in $\mathbb{R}$ beschränkt,

(iii) $\sum_{j=0}^{\infty} a_j < +\infty$, wobei die linke Seite als positive Reihe gesehen wird.

In diesem Fall stimmen die Werte (6.1) *und* (6.2) *überein.*

Beweis. Wenn die Summanden positiv sind, dann ist die Partialsummenfolge monoton wachsend.

(*i*) $\implies$ (*ii*): Aus Proposition 4.13 wissen wir dass beschränkte monoton wachsende Folgen in $\mathbb{R}$ konvergieren.

(*ii*) $\implies$ (*i*): Wenn die Partialsummenfolge in $\mathbb{R}$ konvergiert, ist sie beschränkt nach Lemma 4.4.

(*ii*) $\iff$ (*iii*): Der Wert in (iii) ist per Definition die kleinste obere Schranke der Partialsummenfolge. □

An dieser Stelle brauchen wir noch die Tatsache dass die Ordnung auf $\mathbb{R}$ unter Grenzwerten erhalten bleibt.

Lemma 6.7. *Seien (s_n) und (t_n) Folgen in $\mathbb{R}$ die gegen $s \in \mathbb{R}$ bzw. $t \in \mathbb{R}$ konvergieren. Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $s_n \leq t_n$ gilt, dann gilt auch $s \leq t$.*

Beweis. Angenommen, $s > t$. Sei $\epsilon := (s-t)/2$. Per Definition der Konvergenz existiert ein n mit $|s_n - s| < \epsilon$ und $|t_n - s| < \epsilon$. Dann gilt aber

$$s_n > s - \epsilon = t + \epsilon > t_n,$$

Widerspruch. □

Lemma 6.8 (Monotonie der unendlichen Summation). *Seien (a_j) und (b_j) Folgen in $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. Wenn für alle $j \in \mathbb{N}$ stets $a_j \leq b_j$ gilt, dann gilt*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \leq \sum_{j=0}^{\infty} b_j.$$

Beweis. Wenn die Reihe $\sum_j b_j$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, dann folgt aus Lemma 6.6 dass auch die Reihe $\sum_j a_j$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Die behauptete Ungleichung folgt mit einer Anwendung von Lemma 6.7 auf die Partialsummenfolgen.

Wenn die Reihe $\sum_j b_j$ in $\mathbb{R}$ nicht konvergiert, dann hat sie den Wert $+\infty$, und die behauptete Ungleichung gilt unabhängig vom Wert der linken Seite. □

Proposition 6.9 (Cauchy-Verdichtungssatz). *Sei (a_j) eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann konvergiert $\sum_j a_j$ genau dann wenn $\sum_k 2^k a_{2^k}$ konvergiert.*

Beweis. Da die Summanden beider Reihen positiv sind, konvergieren sie genau dann, wenn die jeweilige Partialsummenfolge

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j, \quad \text{bzw.} \quad t_K = \sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k}$$

beschränkt ist. Wir werden für alle $K \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ zeigen dass

$$s_{2^{K+1}-1} \leq t_K \leq 2 s_{2^K},$$

und da die Partialsummenfolgen monoton steigend sind folgt daraus dass (s_n) genau dann beschränkt ist wenn (t_K) beschränkt ist.

Die erste behauptete Ungleichung zeigt man wie folgt:

$$s_{2^{K+1}-1} = \sum_{j=1}^{2^{K+1}-1} a_j = \sum_{k=0}^{K} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_j \leq \sum_{k=0}^{K} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_{2^k} = \sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k} = t_K,$$

und die zweite so:

$$t_K = \sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2 \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} a_{2^k} \leq 2a_1 + 2 \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} a_j = 2 \sum_{j=1}^{2^K} a_j = 2 s_{2^K}.$$ □

Lemma 6.10. *Sei $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_j 1/j^\alpha$ genau dann wenn $\alpha > 1$.*

Beweis. Nach dem Cauchy-Verdichtungssatz konvergiert die Reihe genau dann, wenn

$$\sum_k 2^k/(2^k)^\alpha = \sum_k (2^{1-\alpha})^k$$

konvergiert. Für $\alpha > 1$ gilt $2^{1-\alpha} < 1$, sodass diese Reihe eine geometrische Reihe ist. Für $\alpha \leq 1$ gilt $2^{1-\alpha} \geq 1$, sodass die K-te Partialsumme $\geq K$ ist, die Partialsummenfolge also unbeschränkt. □

6.2 Absolute Konvergenz

In diesem Kapitel besprechen wir Konvergenzkriterien für Reihen die nicht von der Reihenfolge der Summanden abhängen. Sie alle basieren auf dem Cauchy-Kriterium für Konvergenz von Folgen, das wir zunächst für Reihen umformulieren.

Proposition 6.11 (Cauchy-Kriterium für Reihen). *Sei (v_j) eine Folge in einem Banachraum V. Die Reihe $\sum_j v_j$ konvergiert genau dann wenn*

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, n' \in \mathbb{N})(n_0 < n \leq n') \implies \Big\|\sum_{j=n}^{n'} v_j\Big\| < \epsilon.$$

Beweis. Für die Partialsummenfolge gilt

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} v_j, \quad \sum_{j=n}^{n'} v_j = s_{n'} - s_{n-1}.$$

Die oben aufgestellte Bedingung ist also äquivalent dazu dass die Partialsummenfolge eine Cauchy-Folge ist. Per Definition eines Banachraums sind die Cauchy-Folgen in V genau die konvergenten Folgen in V. □

Korollar 6.12. *Wenn $\sum_j v_j$ eine konvergente Reihe in einem Banachraum ist, dann gilt $\|v_j\| \to 0$.*

Die umgekehrte Implikation ist falsch: Lemma 6.10 liefert Beispiele von divergenten Reihen deren Summanden Nullfolgen bilden.

Definition 6.13. *Sei (v_j) eine Folge in einem Banachraum V. Die Reihe $\sum_j v_j$ heißt* absolut konvergent *wenn die Reihe $\sum_j \|v_j\|$ konvergiert.*

Proposition 6.14. *Sei $\sum_j v_j$ eine Reihe in einem Banachraum V. Wenn diese Reihe absolut konvergiert, dann konvergiert sie auch, und es gilt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung*

$$\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} v_j\Big\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|v_j\|. \tag{6.3}$$

Beweis. Das Cauchy-Kriterium für Reihen besagt dass die Reihe $\sum_j v_j$ genau dann konvergiert wenn gilt

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, n' \in \mathbb{N} : n_0 < n \leq n')\Big\|\sum_{j=n}^{n'} v_j\Big\| < \epsilon. \tag{6.4}$$

Die Dreiecksungleichung für die Norm von V impliziert für alle $n \leq n'$ (per Induktion) die Ungleichung

$$\Big\|\sum_{j=n}^{n'} v_j\Big\| \leq \sum_{j=n}^{n'} \|v_j\|.$$

Also folgt (6.4) aus

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, n' \in \mathbb{N} : n_0 < n \leq n') \sum_{j=n}^{n'} \|v_j\| < \epsilon,$$

und das ist nach dem Cauchy-Kriterium äquivalent zur Konvergenz der Reihe $\sum_j \|v_j\|$.

Um die verallgemeinerte Dreiecksungleichung zu zeigen wählen wir ein $\epsilon > 0$. Nach Definition der Konvergenz einer Reihe existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\Big\|\sum_{j=0}^{\infty} v_j - \sum_{j=0}^{n} v_j\Big\| < \epsilon.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\Big\|\sum_{j=0}^{\infty} v_j\Big\| \leq \Big\|\sum_{j=0}^{\infty} v_j - \sum_{j=0}^{n} v_j\Big\| + \Big\|\sum_{j=0}^{n} v_j\Big\| < \epsilon + \sum_{j=0}^{n} \|v_j\| \leq \epsilon + \sum_{j=0}^{\infty} \|v_j\|.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung (6.3). □

[10: 2020-12-07]
[11: 2020-12-09]

Lemma 6.15 (Majorantenkriterium). *Sei (v_j) eine Folge in einem Banachraum V und (c_j) eine Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Wenn die Reihe $\sum_j c_j$ konvergiert und für ein j_0 und alle $j \geq j_0$ stets $\|v_j\| \leq c_j$ gilt, dann ist die Reihe $\sum_j v_j$ absolut konvergent, und insbesondere konvergent.*

Beweis. Für die Partialsummen der Folge $(\|v_j\|)$ gilt

$$\sum_{j=0}^{n} \|v_j\| \leq \sum_{j=0}^{j_0} \|v_j\| + \sum_{j=j_0}^{n} c_j \leq \sum_{j=0}^{j_0} \|v_j\| + \sum_{j=0}^{\infty} c_j$$

Insbesondere ist diese Partialsummenfolge beschränkt, und nach Lemma 6.6 konvergent. □

Beispiel. Die Reihe $\sum_k 1/(k!)$ ist absolut konvergent, weil für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $k! \geq 2^{k-1}$ (Induktion), sodass $1/k! \leq 2/2^k$. Die Reihe $\sum_k 2/2^k$ konvergiert als Produkt einer Konstante und einer geometrischen Reihe. Die *Eulersche Zahl* ist der Wert der o.g. Reihe:

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Lemma 6.16 (Vergleichskriterium). *Sei (v_j) eine Folge in einem Banachraum V und (a_j) eine Folge in $\mathbb{R}_{>0}$. Wenn die Reihe $\sum_j a_j$ konvergiert und*

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{\|v_j\|}{a_j} < +\infty,$$

dann konvergiert auch die Reihe $\sum_j v_j$ absolut.

Beweis. Aus $\limsup_{j\to\infty} \|v_j\|/a_j < +\infty$ folgt auch

$$r := \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\|v_j\|}{a_j} < +\infty.$$

Wir können also das Majorantenkriterium mit der Reihe $\sum_j r a_j$ benutzen. □

Lemma 6.17 (Quotientenkriterium). *Sei (v_j) eine Folge in einem Banachraum mit $v_j \neq 0$ für alle j und*

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{\|v_{j+1}\|}{\|v_j\|} < 1.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_j v_j$ absolut.

Beweis. Per Definition von lim sup existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$ sodass $a := \sup_{j \geq j_0} \|v_{j+1}\|/\|v_j\| < 1$. Für $j \geq j_0$ bekommen wir also $\|v_j\| \leq a^{j-j_0} \|v_{j_0}\|$. Die Konvergenz von $\sum_j v_j$ folgt nun aus dem Vergleichskriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe. □

Beispiel. Die Reihe $\sum_j j^2 2^{-j}$ konvergiert weil

$$\frac{(j+1)^2 2^{-(j+1)}}{j^2 2^{-j}} = \frac{1}{2}(1 + 1/j)^2 \to \frac{1}{2} < 1.$$

Proposition 6.18 (Wurzelkriterium). *Eine Reihe $\sum_j v_j$ in einem Banachraum ist*

(i) konvergent falls

$$\limsup_{j \to \infty} \|v_j\|^{1/j} < 1,$$

(ii) divergent falls

$$\limsup_{j \to \infty} \|v_j\|^{1/j} > 1.$$

Beweis. (i) Per Definition von lim sup existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$ sodass $a := \sup_{j \geq j_0} \|v_j\|^{1/j} < 1$. Für $j \geq j_0$ bekommen wir also $\|v_j\| \leq a^j$. Die Konvergenz von $\sum_j v_j$ folgt nun aus dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe.

(ii) In diesem Fall gilt für jedes n stets $\sup_{j \geq n} \|v_j\|^{1/j} > 1$. Deshalb ist die Reihe divergent nach Korollar 6.12 □

Beispiel. Betrachte die Folge (a_j) in $\mathbb{R}$ mit

$$a_{2k} = 2^{-k}, \quad a_{2k+1} = 3^{-k}.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert diese Reihe, das Quotientenkriterium ist auf sie aber nicht anwendbar.

Bei der Anwendung des Wurzelkriteriums ist die folgende Aussage gelegentlich hilfreich:

Lemma 6.19. $\lim_{n \to \infty} n^{1/n} = 1$.

Beweis. Da $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} \geq 1$, gilt

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt[n]{n} - 1)^k \geq 1 + \binom{n}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2,$$

sodass

$$(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \leq (n-1) \binom{n}{2}^{-1} = \frac{2}{n} \to 0.$$

Nach dem Sandwich-Lemma folgt $(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \to 0$. In den Übungsaufgaben wurde gezeigt dass das $\sqrt[n]{n} - 1 \to 0$ impliziert. □

Bemerkung. Das Wurzelkriterium liefert keine Aussage falls $\limsup_{n \to \infty} \|v_j\|^{1/j} = 1$. Wir wissen z.B. aus Lemma 6.10 dass die Reihe $\sum_j 1/j^\alpha$ je nach dem Wahl von α konvergent oder divergent sein kann. Nach Lemma 6.19 gilt aber stets $(1/j^\alpha)^{1/j} = (j^{1/j})^{-\alpha} \to 1$ wenn $j \to \infty$.

Das Wurzelkriterium ist stärker als das Quotientenkriterium, in dem Sinn dass es auf jede Reihe anwendbar ist auf die das Quotientenkriterium anwendbar ist. Dies folgt aus dem nächsten Lemma.

Lemma 6.20. *Sei (a_j) eine Folge in $\mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt in $\overline{\mathbb{R}}$ stets*

$$\liminf_{j \to \infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} \leq \limsup_{j \to \infty} a_j^{1/j} \leq \limsup_{j \to \infty} \frac{a_{j+1}}{a_j}.$$

Beweis. Übung. □

6.3 Potenzreihen

Eine *Potenzreihe* ist eine Reihe der Form

$$\sum_n a_n z^n,$$

wobei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$.

Beispiel. Ein *Dezimalbruch* $a_{-k} \dots a_0.a_1 a_2 \dots$ mit Ziffern $a_{-k}, \dots \in \{0, \dots, 9\}$ ist der Wert der Reihe

$$\sum_{n=-k}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}.$$

Jede positive reelle Zahl kann als ein Dezimalbruch der obigen Form dargestellt werden. Man kann statt 10 eine andere Basis verwenden, z.B. werden $2, 8, 16, 64$ und andere Zweierpotenzen in Computerprogrammen häufig verwendet. Man kann die Basis sogar für jede Stelle verändern, z.B. gilt 29 Knut = 1 Sickel und 17 Sickel = 1 Galleone, sodass man Bruchteile von Galleonen wie folgt darstellen kann:

$$g + s \cdot 17^{-1} + k \cdot 17^{-1} \cdot 29^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n 17^{-1} \cdot 29^{-1} \cdot 10^{-n}.$$

Wer das zu abwegig findet, denke an Zeiteinheiten oder imperiale Maße.

Da Dezimal-/Binärbruchdarstellung auch in AlMa behandelt wird, verzichten wir auf Beweise. Es sei aber angemerkt dass in den Beweisen Rundung benutzt wird; diese wird mit Hilfe der Archimedischen Eigenschaft der reellen Zahlen definiert: für $a \in \mathbb{R}$ sind die *Abrundung* $\lfloor a \rfloor$ und die *Aufrundung* $\lceil a \rceil$ als die eindeutigen Elemente von $\mathbb{Z}$ definiert für die gilt

$$a - 1 < \lfloor a \rfloor \le a, \quad a \le \lceil a \rceil < a + 1.$$

Die Existenz und Eindeutigkeit solcher Zahlen wurde in Lemma 3.30 gezeigt.

Eine systematische Untersuchung von Potenzreihen ist Gegenstand der komplexen Analysis. An dieser Stelle bauen wir nur so viel Theorie auf wie nötig ist um die Exponentialfunktion zu verstehen.

Satz 6.21 (Konvergenzradius)**.** *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und*

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \in \overline{\mathbb{R}}_{\ge 0},$$

mit der Konvention $1/0 = +\infty$ und $1/(+\infty) = 0$.

(i) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$ konvergiert die Reihe $\sum_n a_n z^n$ absolut.

(ii) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \rho$ ist die Folge $(a_n z^n)$ unbeschränkt und die Reihe $\sum_n a_n z^n$ divergent.

Beweis. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n z^n|^{1/n} = |z| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = |z|/\rho.$$

Beide Behauptungen folgen also aus dem Wurzelkriterium. □

So wie das Wurzelkriterium zum handlicheren Quotientenkriterium abgeschwächt werden kann, kann die Berechnung des Konvergenzradius unter zusätzlichen Annahmen vereinfacht werden.

Lemma 6.22. *Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ für die $\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert. Dann gilt für den Konvergenzradius ρ der Reihe $\sum_k a_k z^k$*

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}.$$

Beweis. Mit den Konventionen für Division durch 0 und $+\infty$ gilt

$$\frac{1}{\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}.$$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 6.20. □

Definition 6.23 (Exponentialfunktion). *Für $z \in \mathbb{C}$ setzen wir*

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \tag{6.5}$$

Die Exponentialreihe (6.5) hat nach Lemma 6.22 Konvergenzradius

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{1/k!}{1/(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} (k+1) = +\infty,$$

sodass (6.5) tatsächlich für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert ist.

Man das mit dem folgenden Aurgument auch einfacher sehen. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|\frac{z^k}{k!}| = 2^{-k} \frac{|2z|^k}{k!}.$$

Die Folge $\frac{|2z|^k}{k!}$ ist beschränkt nach Lemma 4.11. Also konvergiert die Reihe (6.5) nach dem Vergleichkriterium mit der geometrischen Reihe.

[11: 2020-12-09]

[12: 2020-12-14]

6.4 Vertauschung von Reihen und Grenzwerten

Im Gegensatz zu endlichen Summen vertauschen unendliche Summen im Allgemeinen nicht mit Grenzwerten. In der Tat, sei für $j, n \in \mathbb{N}$

$$a_{j,n} = \mathbf{1}_{j=n} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } j = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = \sum_{j=0}^{\infty} 0 = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{j,n}.$$

Die folgende Aussage liefert eine hinreichende Bedingung unter der Summen und Grenzwerte vertauscht werden können.

Satz 6.24 (Dominierte Konvergenz für Reihen). *Sei $\sum_j a_j$ eine konvergente positive Reihe und V ein Banachraum. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ sei $(v_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in V mit*

$$\lim_{n\to\infty} v_{j,n} = v_j, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|v_{j,n}\| \leq a_j.$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} v_{j,n} = \sum_{j=0}^{\infty} v_j. \tag{6.6}$$

Beweis. Die Reihen $\sum_j v_{j,n}$ und $\sum_j v_j$ sind nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent, sodass die Reihenwerte in (6.6) Sinn machen.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Aufgrund der Konvergenz von $\sum_j a_j$ existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $\sum_{j=j_0}^{\infty} a_j < \epsilon/4$. Für jedes $j \in \mathbb{N}_{<j_0}$ sei n_j so, dass $n \geq n_j \implies \|v_{j,n} - v_j\| < \epsilon/(2j_0)$. Dann gilt für jedes $n \geq \max\{n_0, \dots, n_{j_0-1}\}$ stets

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{j=0}^{\infty} v_{j,n} - \sum_{j=0}^{\infty} v_j\Big\| &= \Big\|\sum_{j=0}^{\infty}(v_{j,n} - v_j)\Big\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \|v_{j,n} - v_j\| \\
&= \sum_{j=0}^{j_0-1} \|v_{j,n} - v_j\| + \sum_{j=j_0}^{\infty} \|v_{j,n} - v_j\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{j_0-1} \frac{\epsilon}{2j_0} + \sum_{j=j_0}^{\infty} 2a_j \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Der folgende Satz wird oft benutzt um die Konvergenzvoraussetzung an $\sum_j a_j$ im Satz über dominierte Konvergenz zu verifizieren.

Satz 6.25 (Monotone Konvergenz für Reihen)**.** *Für jedes j sei $(a_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge in $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ und $a_j := \lim_{n\to\infty} a_{j,n}$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,n} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j. \tag{6.7}$$

Beweis. Wenn $\sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty$, dann ist jede Folge $a_{j,n}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$, und die Behauptung folgt aus dem Satz über dominierte Konvergenz.

Wenn $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \infty$, dann benutzen wir die Monotonie des Grenzwerts und die Vertauschbarkeit des Grenzwerts mit endlichen Summen:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,n} \geq \sup_{J\in\mathbb{N}} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{J} a_{j,n} = \sup_{J\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{J} \lim_{n\to\infty} a_{j,n} = \sup_{J\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{J} a_j = \infty.$$

□

6.5 Partition und Umordnung von Reihen

Im Gegensatz zu endlichen Summen kann die Summationsordnung in einer unendlichen Summe im Allgemeinen nicht beliebig geändert werden. Wir verwenden hier ein Beispiel mit zwei verschachtelten Summen; es gibt ähnliche Beispiele mit nur einer Summe, die aber etwas komplizierter sind (Stichwort: Riemannscher Umordnungssatz).

Beispiel. Für $n, m \in \mathbb{N}$ sei

$$a_{n,m} := \begin{cases} 1, & n = m+1, \\ -1, & m = n+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = \begin{cases} -1, & n = 0 \\ 0, & n > 0, \end{cases} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m > 0, \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = -1 \neq 1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}.$$

In diesem Kapitel zeigen wir dass die Summationsordnung in *absolut konvergenten* Reihen geändert werden kann.

Notation 6.26 (Charakteristische Funktion). *Für eine Teilmenge $X' \subseteq X$ und $x \in X$ schreiben wir*

$$\mathbf{1}_{x\in X'} = \mathbf{1}_{X'}(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in X', \\ 0, & \text{wenn } x \notin X'. \end{cases}$$

Satz 6.27 (Partition einer Reihe). *Sei $(J_k)_{k=0}^{\infty}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen von $\mathbb{N}$, das heißt, für alle $k \neq k'$ gilt $J_k \cap J_{k'} = \emptyset$. Sei $J := \cup_{k\in\mathbb{N}} J_k$.*

(i) Sei (a_j) eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. Dann gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{j\in J} a_j = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{j\in J_k} a_j \Big).$$

(ii) Sei (v_j) eine Folge in einem Banachraum V. Wenn die Reihe $\sum_j \mathbf{1}_{j\in J} v_j$ absolut konvergiert, dann konvergiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Reihe $\sum_j \mathbf{1}_{j\in J_k} v_j$ auch absolut, die Reihe

$$\sum_k \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{j\in J_k} v_j \Big)$$

konvergent ebenfalls absolut, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{j\in J_k} v_j \Big) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{j\in J} v_j. \tag{6.8}$$

Beweis. (i) ObdA können wir annehmen dass für alle $j \in \mathbb{N}$ stets $a_j < \infty$ gilt.

Aufgrund der endlichen Additivität von Grenzwerten gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{j\in J_k} a_j = \sup_{K\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{K} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{j\in J_k} a_j = \sup_{K\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{K} \mathbf{1}_{j\in J_k} a_j = \lim_{K\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{j\in J_0\cup\ldots J_K} a_j.$$

Für jedes $j \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(\mathbf{1}_{j\in J_0\cup\ldots J_K} a_j)_{K\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und konvergiert gegen $\mathbf{1}_{j\in J} a_j$. Satz 6.25 impliziert

$$\cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{j\in J} a_j.$$

(ii) Absolute Konvergenz aller Reihen in (6.8) folgt aus Teil (i) mit $a_j = \|v_j\|$. Aufgrund der endlichen Additivität von Grenzwerten gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{j\in J_k} v_j = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{j\in J_k} v_j = \lim_{K\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{K} \mathbf{1}_{j\in J_k} v_j = \lim_{K\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{j\in J_0\cup\ldots J_K} v_j.$$

Für jedes $j \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(\mathbf{1}_{j\in J_0\cup\ldots J_K} v_j)_{K\in\mathbb{N}}$ durch $\|\mathbf{1}_{j\in J} v_j\|$ beschränkt und konvergiert gegen $\mathbf{1}_{j\in J} v_j$. Satz 6.24 impliziert

$$\cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{j\in J} v_j.$$

□

Korollar 6.28 (Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen). *Sei $\sum_j v_j$ eine absolut konvergente Reihe in einem Banachraum V. Sei $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann ist die Reihe $\sum_j v_{\psi(j)}$ ebenfalls absolut konvergent, und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_{\psi(k)} = \sum_{j=0}^{\infty} v_j. \tag{6.9}$$

Beweis. Satz 6.27 mit $J_k = \{\psi(k)\}$ liefert

$$\sum_{j=0}^{\infty} v_j = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{j\in J_k} v_j\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{\psi(k)}. \qquad \square$$

Bemerkung. Die Eigenschaft (6.9) (dass die Konvergenzeigenschaft und der Wert einer Reihe nicht von der Ordnung der Summanden abhängen) heißt *unbedingte Konvergenz.*

Definition 6.29 (abzählbare Summe). *Sei I eine abzählbare Menge und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie in einem Banachraum V die durch I indiziert ist (also, formal gesehen, eine Abbildung $I \to V$). Wenn $\phi : I \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung ist und die Reihe $\sum_k v_{\phi^{-1}(k)}$ absolut konvergiert, dann nennen wir die Familie (v_i)* absolut summierbar *und wir definieren*

$$\sum_{i\in I} v_i := \sum_{k=0}^{\infty} v_{\phi^{-1}(k)}.$$

Wenn I endlich ist und $\phi : I \to \mathbb{N}_{<N}$ eine Bijektion, dann definieren wir

$$\sum_{i\in I} v_i := \sum_{k=0}^{N-1} v_{\phi^{-1}(k)}.$$

Die Wohldefiniertheit der abzählbaren Summen folgt aus dem Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen:

Lemma 6.30. *Definition 6.29 hängt nicht von der Wahl der Abbildung ϕ ab.*

Ebenso ohne Beweis lassen wir die folgende Tatsache, deren Beweis ähnlich wie der des Umordnungssatzes funktioniert:

Lemma 6.31. *Seien $I' \subseteq I$ abzählbare Mengen und $(v_i)_{i\in I}$ eine absolut summierbare Familie in einem Banachraum V. Dann gilt*

$$\sum_{i\in I'} v_i = \sum_{i\in I} \mathbf{1}_{i\in I'} v_i.$$

Satz 6.27 kann für abzählbare Summen so formuliert werden.

Satz 6.32 (Partition einer abzählbaren Summe). *Sei I eine abzählbare Menge und $(I_k)_{k\in\mathcal{K}}$ eine abzählbare Partition von I, d.h., $\mathcal{K}$ ist eine abzählbare Menge, für jedes k ist $I_k \subseteq I$, und für alle $k \neq k'$ gilt $I_k \cap I_{k'} = \varnothing$.*

Wenn $(v_i)_{i\in I}$ eine absolut summierbare Familie in einem Banachraum ist, dann gilt

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{i\in I_k} v_i = \sum_{i\in I} v_i. \tag{6.10}$$

Korollar 6.33 (Doppelreihen). *Sei $(v_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ eine absolut summierbare Familie in einem Banachraum V die von zwei Parametern abhängt. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} v_{j,k-j} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} v_{n,m} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} v_{n,m} = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} v_{n,m},$$

wobei alle Reihen absolut konvergieren.

Erinnerung: wir haben in Lemma 2.44 gezeigt dass $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ abzählbar ist. Die Bijektion dort entspricht genau der Ordnung der Summanden in $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} v_{j,k-j}$.

Korollar 6.34 (Cauchy-Produkt). *Seien $\sum_n a_n$ und $\sum_m b_m$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

Beweis. Wir müssen lediglich überprüfen dass die Folge $(a_n b_m)_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ absolut summierbar ist. Mit den Rechenregeln für Reihen (man beachte dass wir stets nur Konstanten ausklammern) bekommen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}|a_n b_m|\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(|a_n|\sum_{m=0}^{\infty}|b_m|\Big) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty}|b_m|\Big) < \infty.$$

Die absolute Konvergenz folgt nun aus dem positiven Teil des Partitionssatzes 6.27. □

Lemma 6.35 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z)\exp(w) = \exp(z+w) \tag{6.11}$$

Beweis. Nach der Cauchy-Produktformel gilt

$$\begin{aligned}
\exp(z)\exp(w) &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{w^m}{m!}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{z^j}{j!}\frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} z^j w^{k-j}\binom{k}{j} && \text{(Lemma 2.42)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(z+w)^k && \text{(Binomialformel)} \\
&= \exp(z+w).
\end{aligned}$$

□

6.6 Partielle Summation

Es gibt auch konvergente Reihen die nicht absolut konvergent sind. In diesem Abschnitt geben wir ein Kriterium an mit dem Konvergenz einiger solcher Reihen gezeigt werden kann.

Lemma 6.36 (Dirichlet-Kriterium). *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem Banachraum sodass die Partialsummenfolge $(\sum_{k=0}^{n} v_k)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Dann konvergiert die Reihe $\sum_k a_k v_k$.*

Beweis. Sei $B_n := \sum_{k=0}^{n} v_k$. Wir behaupten dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} a_k v_k = a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)B_k \tag{6.12}$$

gilt. Wir zeigen dies per Induktion über n.

IA $n = 0$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} a_k v_k = a_0 v_0 = a_0 B_0 = a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)B_k,$$

da die letzte Summe leer ist.

IS Die Behauptung sei für ein $n \in \mathbb{N}$ bekannt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} a_k v_k = a_{n+1}v_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k v_k &= a_{n+1}v_{n+1} + a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)B_k \\
&= a_{n+1}v_{n+1} + a_{n+1}B_n - (a_{n+1}-a_n)B_n - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)B_k \\
&= a_{n+1}B_{n+1} - \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)B_k.
\end{aligned}$$

Damit ist (6.12) gezeigt.

[12: 2020-12-14]
[13: 2020-12-16]

Nun verwenden wir die Voraussetzungen: da $a_n \to 0$ und B_n beschränkt ist, gilt $a_n B_n \to 0$. Da die Folge (a_k) monoton fallend und positiv ist, gilt

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{k+1} - a_k| = \sum_{k=0}^{n} a_k - a_{k+1} = a_0 - a_{n+1} \leq a_0.$$

Da die Folge B_n beschränkt ist, ist die Reihe

$$\sum_k (a_{k+1} - a_k) B_k$$

nach dem Vergleichskriterium absolut konvergent. □

Korollar 6.37 (Leibniz-Kriterium). *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_k (-1)^k a_k, \tag{6.13}$$

und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \geq 0$.

Beweis. Wir verwenden das Dirichlet-Kriterium mit $V = \mathbb{R}$ und $b_k = (-1)^k$. Die Partialsummenfolge $(\sum_{k=0}^{n} b_k)$ ist beschränkt, da sie abwechselnd die Werte 1 und 0 annimmt.

Die Positivität des Werts der Reihe zeigt man indem man die Reihe als eine positive Reihe schreibt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{2K+1} (-1)^k a_k &= \lim_{K\to\infty} \sum_{j=0}^{K} \big((-1)^{2j} a_{2j} + (-1)^{2j+1} a_{2j+1}\big) \\ &= \lim_{K\to\infty} \sum_{j=0}^{K} \big(a_{2j} - a_{2j+1}\big) \geq 0.\end{aligned}$$ □

7 Stetigkeit

Anschaulich gesprochen, nennem wir eine Funktion stetig in einem Punkt a wenn sie sich in einer Umgebung von a wenig ändert. Das wird in der folgenden Definition präzisiert.

Definition 7.1 (Stetigkeit in einem Punkt). *Seien X, Y metrische Räume (mit Metriken d_X, d_Y). Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt* stetig im Punkt $a \in X$ *wenn*

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x \in X) d_X(a, x) < \delta \implies d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon.$$

Sie heißt (überall) stetig *wenn sie in jedem $a \in X$ stetig ist.*

Wir kürzen $d_X, d_Y, \ldots$ zu d ab wenn man den Raum $X, Y, \ldots$ an den Argumenten der Metrik ablesen kann.

Beispiel. Die Funktion $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, +1\}$ gegeben durch

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkt 0 nicht stetig, aber stetig in jedem $a \neq 0$.

Beispiel. Seien X, Y metrische Räume und $y \in Y$ fest. Dann ist die konstante Funktion $f : X \to Y$, $f(x) = y$, in jedem $a \in X$ stetig. In der Definition können wir δ beliebig wählen.

Beispiel. Für jeden metrischen Raum X und jede Teilmenge $X' \subseteq X$ ist die Identitätsfunktion $\mathrm{id} : X' \to X$, $\mathrm{id}(x) = x$, in jedem $a \in X'$ stetig. In der Definition können wir $\delta = \epsilon$ wählen.

Beispiel. Die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ ist in keinem Punkt von $\mathbb{R}$ stetig (Übung: die irrationalen Zahlen sind in $\mathbb{R}$ dicht, d.h., für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert ein $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $a < c < b$).

Die Definition der Stetigkeit sieht ähnlich wie die Definition der Konvergenz aus. Tatsächlich kann Stetigkeit mit Hilfe von Konvergenz charakterisiert werden.

Definition 7.2 (Folgenstetigkeit in einem Punkt)**.** *Seien X, Y metrische Räume (mit Metriken d_X, d_Y). Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt* folgenstetig im Punkt *$a \in X$ wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gilt*

$$x_n \to a \implies f(x_n) \to f(a).$$

Lemma 7.3. *Seien X, Y metrische Räume und $a \in X$. Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann in a stetig, wenn sie in a folgenstetig ist.*

Beweis. $\implies$: Sei $f : X \to Y$ in a stetig und $x_n \to a$. Wir müssen zeigen dass $f(x_n) \to f(a)$.

Sei $\epsilon > 0$ fest. Nach Definition der Stetigkeit existiert ein $\delta > 0$ mit $d_X(a, x) < \delta \implies d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon$. Nach Definition der Konvergenz $x_n \to a$ existiert ein n_0 mit $n \geq n_0 \implies d_X(a, x_n) < \delta$. Also gilt für alle $n \geq n_0$ auch $d_Y(f(a), f(x_n)) < \epsilon$, und damit ist $f(x_n) \to f(a)$ gezeigt.

$\impliedby$: Sei $f : X \to Y$ eine in a folgenstetige Funktion. Man nehme an dass f in a nicht stetig ist. Das heißt

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in X) d_X(a, x) < \delta \wedge d_Y(f(a), f(x)) \geq \epsilon. \tag{7.1}$$

Wir konstruieren eine Folge (x_n) die zum Widerspruch führen wird. Sei $\epsilon > 0$ so, dass die Aussage (7.1) gilt. Für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ benutzen wir die innenstehende Aussage mit $\delta = 1/n$ und erhalten ein x_n mit $d_X(a, x_n) < 1/n$ und $d_Y(f(a), f(x_n)) \geq \epsilon$. Für die so konstruierte Folge gilt $x_n \to a$ und $f(x_n) \not\to f(a)$, im Widerspruch zur Annahme. □

Lemma 7.4. *Die Abbildung $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \mapsto x^{-1}$ ist überall stetig.*

Beweis. Rechenregeln für Grenzwerte zeigen dass diese Funktion folgenstetig ist. □

Lemma 7.5. *Die Abbildung $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist überall stetig.*

Beweis. In den Übungen wurde gezeigt dass diese Funktion folgenstetig ist. □

Wir werden nun sehen wie stetige Funktionen zu neuen stetigen Funktionen kombiniert werden können.

Lemma 7.6 (Stetigkeit der Verkettung)**.** *Seien X, Y, Z metrische Räume, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen, und $a \in X$ so, dass f in a stetig ist und g in $f(a)$ stetig ist. Dann ist $g \circ f$ in a stetig.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Per Definition der Stetigkeit von g existiert ein $\epsilon' > 0$ mit $d_Y(f(a), y) < \epsilon' \implies d_Z(g(f(a)), g(y)) < \epsilon$. Per Definition der Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$ mit $d_X(a, x) < \delta \implies d_Z(f(a), f(x)) < \epsilon$. Wir bekommen also

$$d_X(a, x) < \delta \implies d_Z(f(a), f(x)) < \epsilon' \implies d_Z(g(f(a)), g(f(x))) < \epsilon.$$ □

Viele interessante Operationen, wie z.B. Addition, sind auf Produktmengen definiert. Um über ihre Stetigkeit zu sprechen brauchen wir eine Metrik auf Produkträumen.

Definition 7.7 (Produkt metrischer Räume). *Seien X_1, X_2 metrische Räume. Dann versehen wir $X_1 \times X_2$ mit der Metrik*

$$d((x_1, x_2), (x_1', x_2')) := d(x_1, x_1') + d(x_2, x_2'). \tag{7.2}$$

Bemerkung. Für Folgen in einem Produktraum mit der Metrik (7.2) gilt

$$\lim_{n\to\infty} (x_{1,n}, x_{2,n}) = (x_1, x_2) \iff \lim_{n\to\infty} x_{1,n} = x_1 \wedge \lim_{n\to\infty} x_{2,n} = x_2.$$

Lemma 7.8. *Für $i = 1, 2$ seien X_i, Y_i metrische Räume und $f_i : X_i \to Y_i$ Abbildungen die in $a_i \in X_i$ stetig sind. Dann ist die Produktabbildung*

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (f(x_1), f(x_2)), \tag{7.3}$$

im Punkt (a_1, a_2) stetig.

Beweis. Für $\epsilon > 0$ und $i = 1, 2$ seien $\delta_i > 0$ so, dass $d(a_i, x_i) < \delta_i \implies d(f_i(a_i), f(x_i)) < \epsilon/2$. Dann gilt für alle (x_1, x_2) mit $d((a_1, a_2), (x_1, x_2)) < \min(\delta_1, \delta_2)$ stets

$$\begin{aligned} d_{X_1\times X_2}((f_1(a_1), f_2(a_2)), (f_1(x_1), f_2(x_2))) &= d_{X_1}(f_1(a_1), f_1(x_1)) + d_{X_2}(f_2(a_2), f_2(x_2)) \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 7.9. *Sei X ein metrischer Raum. Dann ist die* Diagonaleinbettung

$$\iota : X \to X \times X, \quad \iota(x) = (x, x), \tag{7.4}$$

überall stetig.

Beweis. Wähle $\delta = \epsilon/2$ in der Definition der Stetigkeit. □

Korollar 7.10. *Seien X, Y_1, Y_2 metrische Räume und $f_i : X \to Y_i$ Funktionen die in einem $a \in X$ stetig sind. Dann ist die Abbildung $(f_1, f_2) : X \to Y_1 \times Y_2$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ in a stetig.*

Beweis. Wir schreiben die Abbildung (f_1, f_2) als Verkettung der Diagonaleinbettung (7.4) und der Produktabbildung (7.3):

$$X \xrightarrow{\iota} X \times X \xrightarrow{f_1\times f_2} Y_1 \times Y_2$$

und benutzen die Stetigkeit der Verkettung (Lemma 7.6). □

Proposition 7.11 (Stetigkeit der Vektorraumoperationen). *Sei V ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$.*

(i) Die Abbildung $V \times V \to V$, gegeben durch $(v, w) \mapsto v + w$, ist stetig.

(ii) Die Abbildung $\mathbb{R} \times V \to V$, gegeben durch $(a, v) \mapsto av$, ist stetig.

Lemma 7.11 folgt zwar aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen. Da wir letztere nur im Fall $V = \mathbb{R}$ gezeigt haben, schadet es nicht einen direkten Beweis zu geben.

Beweis. (i) Wir wählen $\delta = \epsilon$ in der Definition der Stetigkeit.

(ii) Seien $a, a' \in \mathbb{R}$ und $v, v' \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|av - a'v'\| = \|(a - a')v + a'(v - v')\| &= \|(a - a')v + a(v - v') + (a' - a)(v - v')\| \\ &\leq |a - a'|\|v\| + |a|\|v - v'\| + |a' - a|\|v - v'\|. \end{aligned}$$

Es folgt dass die Definition der Stetigkeit im Punkt (a, v) mit $\delta = \min(\frac{\epsilon}{2(\|a\|+\|v\|)}, \epsilon, 1/3)$ erfüllt ist. □

Proposition 7.12. *Sei X ein metrischer Raum und seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ Funktionen die in einem Punkt $a \in X$ stetig sind. Dann sind folgende Funktionen im Punkt $a \in X$ auch stetig:*

(i) $x \mapsto f(x) + g(x)$,

(ii) $x \mapsto f(x)g(x)$,

(iii) $x \mapsto f(x)/g(x)$, *falls* g *den Wert* 0 *nicht annimmt.*

Beweis. Wir zeigen beispielhaft (iii), andere Teile sind ähnlich aber einfacher. Wir schreiben die Abbildung $x \mapsto f(x)/g(x)$ als Verkettung

$$x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto (f(x), 1/g(x)) \mapsto f(x)/g(x),$$

wobei die einzelnen Abbildungen stetig sind aufgrund von Korollar 7.10 (Stetigkeit des Paars (f, g)), Lemma 7.4 (Stetigkeit der Abbildung $y \mapsto 1/z$), Lemma 7.8 (Stetigkeit der Abbildung $(x, y) \mapsto (x, 1/y)$), und Lemma 7.11 (Stetigkeit von $(x, y) \mapsto xy$). □

[13: 2020-12-16]
[14: 2020-12-21]

Proposition 7.13 (Stetigkeit der Metrik)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige Abbildung.*

Beweis. Wir erinnern daran dass aus der Dreicksungleichung die sogenannte „umgekehrte Dreiecksungleichung“ folgt:

$$(\forall x, x', x'' \in X) \quad |d(x, x') - d(x', x'')| \leq d(x, x'').$$

Wir werden für die Metrik zeigen dass man $\delta = \epsilon$ in der Definition der Stetigkeit in jedem Punkt $(a, a') \in X \times X$ nehmen kann. Für alle $(a, a'), (x, x') \in X \times X$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} |d(a, a') - d(x, x')| &\leq |d(a, a') - d(x, a')| + |d(x, a') - d(x, x')| \quad (\Delta\text{-Ungl. für Betrag}) \\ &\leq d(a, x) + d(a', x') \quad (\text{Umgekehrte } \Delta\text{-Ungl. für die Metrik}) \\ &= d((a, a'), (x, x')). \end{aligned}$$

□

Korollar 7.14 (Stetigkeit des Betrags)**.** *Die Abbildung* $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ *ist stetig.*

Beweis. Es ist die Verkettung der stetigen Abbildungen

$$x \mapsto (x, 0) \mapsto |x| = d(x, 0).$$

□

Korollar 7.15. *Die Abbildung* $\max : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \max(x, y)$ *ist stetig.*

Beweis. Wr schreiben max als Verkettung stetiger Abbildungen:

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|).$$

□

Korollar 7.16. *Sei X ein metrischer Raum und $f, g : X \to \mathbb{R}$ Funktionen die in einem $a \in X$ stetig sind. Dann sind folgende Funktionen auch in a stetig:*

(i) $x \mapsto \max(f(x), g(x))$,

(ii) $x \mapsto \min(f(x), g(x))$.

Beweis. (i) Dies ist die Verkettung stetiger Funktionen:

$$x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto \max(f(x), g(x)).$$

(ii) Dies ist die folgende Verkettung stetiger Funktionen:

$$x \mapsto (-f(x), -g(x)) \mapsto \max(-f(x), -g(x)) \mapsto -\max(-f(x), -g(x)) = \min(f(x), g(x)).$$

□

Um die Bedeutung der Propositionen 7.11 und 7.13 noch einmal zu betonen, warnen wir dass die Stetigkeit einer Funktion auf einem Produktraum etwas anderes ist als Stetigkeit in jeder Variable getrennt.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 2xy/(x^2+y^2), & (x,y) \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Dann ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ stetig, und analog für $x \mapsto f(x,y)$, aber f ist in $(0,0)$ nicht stetig, denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(1/n,1/n) = 1 \neq 0 = f(0,0) = \lim_{n\to\infty} f(0,1/n).$$

Dieses Beispiel wird Ihnen auch in Analysis 2 begegenen wenn es um den Unterschied zwischen totaler und partieller Ableitung geht.

7.1 Konvergenz von Funktionenfolgen

In diesem Kapitel vergleichen wir verscheidene Konvergenzbegriffe für Folgen von Funktionen. Viele interessante Beispiele sind Funktionen die auf Intervallen definiert sind.

Notation 7.17 (Intervalle). *Für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ schreiben wir*

$$[a,b] := \{c \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq c \leq b\}, \quad (a,b) := \{c \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < c < b\},$$

$$[a,b) := \{c \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq c < b\}, \quad (a,b] := \{c \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < c \leq b\}.$$

Sei X eine Menge und Y ein metrischer Raum. Wir sagen dass eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : X \to Y$ *punktweise konvergiert* (gegen eine Funktion $f : X \to Y$) wenn für jedes $x \in X$ stets $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ gilt.

Beispiel. Sei (f_n) eine Folge stetiger Funktionen $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f_n(x) = x^n$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Insbesondere sehen wir dass Stetigkeit unter punktweiser Konvergenz i.A. nicht erhalten bleibt.

Definition 7.18 (Gleichmäßige Konvergenz). *Sei X eine Menge und Y ein metrischer Raum. Wir sagen dass eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : X \to Y$* gleichmäßig *gegen eine Funktion $f : X \to Y$ konvergiert falls*

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}) \sup_{x\in X} d(f(x), f_n(x)) < \epsilon.$$

Proposition 7.19. *Seien X, Y metrische Räume und (f_n) eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : X \to Y$ die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : X \to Y$ konvergiert. Dann ist die Funktion f auch stetig.*

Beweis. Seien $a \in X$ und $\epsilon > 0$. Per Definition der gleichmäßigen Konvergenz existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N \implies \sup_{x\in X} d(f(x), f_n(x)) < \epsilon/3$. Per Definition der Stetigkeit von f_N existiert ein $\delta > 0$ mit $d(a,x) < \delta \implies d(f_N(a), f_N(x)) < \epsilon/3$. Es folgt dass für alle x mit $d(a,x) < \delta$ gilt

$$d(f(a), f(x)) \leq d(f(a), f_N(a)) + d(f_N(a), f_N(x)) + d(f_N(x), f(x)) < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon.$$

$\square$

Beispiel. Wir betrachten wieder die Funktionen $f_n(x) = x^n$, aber diesmal definiert auf dem Intervall $[0, q]$ mit $q < 1$. Dann gilt

$$\sup_{x \in [0,q]} |f_n(x) - 0| = q^n \to 0,$$

sodass die Folge (f_n) gleichmäßig gegen die konstante Funktion 0 konvergiert.

Es ist sinnvoll die Menge aller stetigen Funktionen zwischen zwei gegebenen metrischen Räumen wieder als einen metrischen Raum aufzufassen.

Satz 7.20. *Seien X, Y metrische Räume. Wir bezeichnen mit $C(X, Y)$ die Menge aller stetigen Funktionen von X nach Y. Für $f, g \in C(X, Y)$ sei*

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}.$$

Dies ist eine (erweiterte) Metrik auf $C(X, Y)$.

Wenn der Raum Y weiterhin vollständig ist, dann ist auch der (erweiterte) metrische Raum $(C(X, Y), d_\infty)$ vollständig.

Unter eine erweiterten Metrik verstehen wir eine Abbildung mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$, die ansonsten die Axiome einer Metrik erfüllt. Konvergente und Cauchy-Folgen bzgl. einer erweiterten Metrik sind genauso definiert wie bzgl. einer Metrik.

Beweis. Dass d_∞ eine erweiterte Metrik definiert heißt dass für alle $f, g, h \in C(X, Y)$ gilt

(i) $f = g \iff d_\infty(f, g) = 0$,

(ii) $d_\infty(f, g) = d_\infty(g, f)$ (Symmetrie),

(iii) $d_\infty(f, h) \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h)$ (Subadditivität).

Alle diese Eigenschaften sind leicht zu sehen.

Sei nun Y vollständig. Die behauptete Vollständigkeit bedeutet dass jede Cauchyfolge in $(C(X, Y), d_\infty)$ konvergent ist. Sei also (f_n) eine Cauchyfolge von Funktionen $f_n : X \to Y$. Sei $x \in X$ fest. Da für alle $m, n \in \mathbb{N}$ stets $d(f_n(x), f_m(x)) \leq d_\infty(f_n, f_m)$ gilt, ist die Folge von Funktionenwerten $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y. Da Y vollständig ist, existiert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Dies definiert eine Funktion $f : X \to Y$.

Wir wollen nun zeigen dass die Folge (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, also dass $d_\infty(f_n, f) \to 0$. Für jedes $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} d(f_n(x), f(x)) &\leq \limsup_{m\to\infty} \big(d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f(x)) \big) \\ &\leq \limsup_{m\to\infty} d(f_n(x), f_m(x)) + \limsup_{m\to\infty} d(f_m(x), f(x)) \leq \sup_{m \geq n} d(f_n(x), f_m(x)) + 0. \end{aligned}$$

Indem wir Suprema in x und m vertauschen, bekommen wir

$$d_\infty(f_n, f) \leq \sup_{x \in X} \sup_{m \geq n} d(f_n(x), f_m(x)) = \sup_{m \geq n} d_\infty(f_n, f_m) \to 0,$$

da (f_n) eine Cauchyfolge bzgl. der (erweiterten) Metrik d_∞ ist. □

Reellwertige stetige Funktionen können addiert und mit Konstanten multipliziert werden, bilden also einen Vektorraum. Um einen normierten Vektorraum zu erhalten, beschränken wir und auf die beschränkten Funktionen mit der Supremumsnorm.

Definition 7.21. *Für einen metrischen Raum X sei $C_b(X)$ der Vektorraum der beschränkten stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm*

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\sup} = \|f\|_{C_b(X)} := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Damit diese Definition Sinn macht müssen wir überprüfen dass die Vektorraum- und die Normaxiome erfüllt sind. Die Tatsache dass $C_b(X)$ ein Vektorraum ist folgt aus Proposition 7.12. Dass die Supremumsnorm eine Norm ist haben wir bereits in einigen anderen Fällen gezeigt, hier geht es genauso.

Korollar 7.22. *Sei X ein metrischer Raum. Dann ist der Raum $C_b(X)$ ein Banachraum.*

Beweis. Die Vollständigkeit folgt aus Satz 7.20 mit $Y = \mathbb{R}$. □

Lemma 7.23. *Sei $\sum_k a_k z^k$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten a_k und Konvergenzradius $\rho \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. Dann ist die Funktion $f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) := \sum_k a_k x^k$$

stetig.

Beweis. Sei $0 \leq r < \rho$. Jede Funktion $g_k(x) := a_k x^k$ ist eine stetige Funktion von $[-r, r]$ nach $\mathbb{R}$, und $\|g_k\|_\infty = |a_k| r^k$. Es gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \|g_k\|_\infty^{1/k} = r \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = r/\rho < 1.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_k g_k$ im Banachraum $C_b([-r, r])$ nach dem Wurzelkriterium. Der Grenwert $f|_{[-r,r]}$ ist also eine stetige Funktion. Wir müssen daraus noch folgern dass f eine stetige Funktion auf $(-\rho, \rho)$ ist.

Sei nun $a \in (-\rho, \rho)$ und wähle $r \in \mathbb{R}$ mit $|a| < r < \rho$. Per Definition der Stetigkeit von $f|_{[-r,r]}$ gilt

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [-r, r])|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Wenn wir δ durch $\min(\delta, r - |a|)$ ersetzen, dann gilt die letzte Implikation auch für alle $x \in (-\rho, \rho)$. □

Korollar 7.24. *Die Funktionen* $\exp, \sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sind stetig.*

[14: 2020-12-21]

[15: 2020-12-23]

7.2 Zwischenwertsatz, Logarithmus, trigonometrische Funktionen

In diesem Kapitel benutzen wir Stetigkeit um inverse Funktionen zu konstruieren, insbesondere die Logarithmusfunktion.

Satz 7.25 (Zwischenwertsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(b) < 0 < f(a)$. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$.*

Eine stetige Funktion f kann den Wert 0 also nicht überspringen wenn sie sich von negativ zu positiv ändert.

Bemerkung. Der Zwischenwertsatz ist falsch für Funktionen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. Betrachte z.B. $f(x) = x^2 - 2$. Dann gilt $f(0) = -2$ und $f(2) = 2$, die Funktion f nimmt den Wert 0 aber nicht an da es keine rationale Wurzel der 2 gibt.

Beweis. ObdA nehmen wir $f(a) < 0 < f(b)$ an, sonst ersetzen wir f durch $-f$. Sei

$$c := \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}. \tag{*}$$

Wir werden durch Widerspruch zeigen dass $f(c) = 0$.

Angenommen, $|f(c)| > 0$. Aufgrund von Stetigkeit von f in c (mit $\epsilon = |f(c)|$) existiert ein $\delta > 0$ sodass $|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < |f(c)|$.

Wir unterscheiden nun die Fälle $f(c) > 0$ und $f(c) < 0$.

Angenommen, $f(c) > 0$. Dann ist $c > a$ und für alle $x > \max(c - \delta, a)$ gilt $f(x) > 0$. Damit ist c nicht die kleinste obere Schranke von (*). Widerspruch.

Angenommen, $f(c) < 0$. Dann ist $c < b$ und für alle x mit $c \le x < \min(c + \delta, b)$ gilt $f(x) < 0$. Damit ist c keine obere Schranke von (*). Widerspruch. □

Für die nächste wichtige Aussage, Proposition 7.28, benötigen wir noch kleine Vorbereitungen.

Als wir über injektive und surjektive Abbildungen gesprochen haben, habe ich vergessen zu zeigen dass bijektive Abbildungen eine eindeutige Inverse besitzen.

Lemma 7.26 (Umkehrabbildung)**.** *Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung. Dann hat f genau eine* linksinverse *Abbildung $g_L : Y \to X$ mit $g_L \circ f = \mathrm{id}_X$ und genau eine* rechtsinverse *Abbildung $g_R : Y \to X$ mit $f \circ g_R = \mathrm{id}_Y$. Die Links- und die rechtsinverse Abbildung stimmen überein, werden* Umkehrabbildung *oder* inverse Abbildung *von f genannt, und mit $f^{-1} = g_L = g_R$ bezeichnet.*

Beweis. In Lemma 2.33 bzw. Lemma 2.34 haben wir bereits die Existenz einer links- bzw. der rechtsinversen Abbildung gezeigt.

Seien nun g_L eine linksinverse und g_R eine rechtsinverse Abbildung zu f. Dann gilt

$$g_L = g_L \circ \mathrm{id}_Y = g_L \circ (f \circ g_R) = (g_L \circ f) \circ g_R = \mathrm{id}_X \circ g_R = g_R.$$

Dies impliziert insbesondere auch die Eindeutigkeit von g_L und g_R. □

Lemma 7.27. *Eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn gilt*

$$(\forall a, c \in I)(\forall b \in \mathbb{R}) \quad a < b < c \implies b \in I. \tag{7.5}$$

Beweis. $\implies$ folgt direkt aus Transitivität der Ordnung.

Die Idee um $\impliedby$ zu zeigen besteht darin, ein Intervall mit den Endpunkten $\inf I$ und $\sup I$ zu betrachten. Es ergeben sich 4 Fälle, je nach dem ob diese Punkte in I enthalten sind, die wir nicht weiter ausführen werden. □

Proposition 7.28 (Inverse einer streng monotonen stetigen Funktion)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monoton steigende Funktion, d.h.,*

$$(\forall x, x' \in I) \quad x < x' \implies f(x) < f(x').$$

Dann ist die Bildmenge $f(I)$ auch ein Intervall, f bildet I bijektiv auf $f(I)$ ab, und die inverse Funktion $f^{-1} : f(I) \to I$ ist streng monoton steigend und stetig.

Beweis. Da f streng monoton wachsend ist, ist f injektiv.

Wir zeigen dass $f(I)$ ein Intervall ist mittels der Charakterisierung in (7.5). Seien $a < b < c$ in $\mathbb{R}$ beliebig mit $a, c \in f(I)$. Der Zwischenwertsatz (Satz 7.25), angewandt auf die Funktion $f(\cdot) - b$ auf dem Intervall $[f^{-1}(a), f^{-1}(c)]$, zeigt dass b auch im Bild von f liegt.

Um zu sehen dass die Umkerhabbildung $f^{-1} : f(I) \to I$ streng monoton steigend ist, bemerken wir die strengen Monotonie impliziert dass für alle $x, x' \in I$ stets

$$x < x' \implies f(x) < f(x'), \quad x = x' \implies f(x) = f(x'), \quad x > x' \implies f(x) > f(x')$$

gilt. Da sowohl die Voraussetzungen als auch Konklusionen sich jeweils gegenseitig ausschließen, impliziert das auch die umgekehrte Implikationen

$$x < x' \impliedby f(x) < f(x'), \quad x = x' \impliedby f(x) = f(x'), \quad x > x' \impliedby f(x) > f(x').$$

Es bleibt noch zu zeigen dass die Umkehrfunktion f^{-1} stetig ist. Sei $a \in f(I)$ und $\epsilon > 0$. Sei $y := f^{-1}(a)$. Wir nehmen an dass $[y-\epsilon, y+\epsilon] \subseteq I$ (wenn a einer der Endpunkte von $f(I)$ ist, sodass dies für kein $\epsilon > 0$ gilt, dann muss man das nachfolgende Argument leicht verändern). Wir setzen

$$\delta := \min(a - f(y-\epsilon), f(y+\epsilon) - a).$$

Wir bekommen damit

$$\begin{aligned} |a-x| < \delta \implies f(y-\epsilon) < x < f(y+\epsilon) \implies y - \epsilon < f^{-1}(x) < y + \epsilon \\ \implies |f^{-1}(x) - y| < \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 7.29. *Die Einschränkung der Exponentialfunktion definiert ist eine streng monoton steigende bijektive Abbildung* $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty) = \mathbb{R}_{>0}$.

Beweis. Zuerst beobachten wir dass $\exp(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, da alle Summanden in der Potenzreihe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

reell sind für reelle Argumente. Es gilt $\exp(0) = 1$. Für $x > 0$ bekommen wir $\exp(x) > 1$, da alle Summanden strikt positiv sind. Für $x < 0$ folgt aus der Funktionalgleichung (6.11) dass $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$. Mit der Funktionalgleichung beklommen wir weiterhin für alle $x \in \mathbb{R}$ und $h > 0$ stets

$$\exp(x+h) = \exp(x)\exp(h) > \exp(x),$$

sodass exp streng monoton steigend ist. Stetigkeit wurde bereits in Korollar 7.24 gezeigt. Nach Proposition 7.28 ist $\exp(\mathbb{R}) \subseteq (0,\infty)$ ein Intervall. Es bleibt zu zeigen dass es beliebig kleine sowie beliebig große Zahlen enthält, und das gilt weil $e = \exp(1) > 1$ und

$$\exp(-n) = 1/e^n \to 0, \quad \exp(n) = e^n \to +\infty \quad \text{wenn } n \to \infty. \qquad \square$$

Definition 7.30 (Natürlicher Logarithmus). *Der* (natürliche) Logarithmus

$$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

ist die Umkehrabbildung von $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$.

Lemma 7.31 (Funktionalgleichung des Logarithmus). *Für alle* $x, y \in (0,\infty)$ *gilt*

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Insbesondere ist $\ln(1) = 0$.

Beweis. Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion folgt

$$\exp(\ln x + \ln y) = \exp(\ln x)\exp(\ln y) = xy.$$

Die Behauptung ergibt sich wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Funktion ln anwendet. $\square$

Definition 7.32 (Reelle Potenzen). *Für* $a \in \mathbb{R}_{>0}$ *und* $q \in \mathbb{R}$ *definieren wir*

$$a^q := \exp(q \ln a).$$

Bemerkung. Für $z \in \mathbb{C}$ schreibt man häufig auch

$$e^z := \exp(z).$$

Es gibt aber keine allgemeine Definition von komplexen Potenzen komplexer Zahlen, da z.B. $(-1)^{1/2}$ sowohl i als auch $-i$ sein könnte, und es keinen klaren Grund eine der Varianten zu bevorzugen. Wie man den Logarithmus außerhalb von $\mathbb{R}_{>0}$ fortsetzt wird in komplexer Analysis erklärt.

Die folgenden Aussagen ergeben sich direkt aus den Funktionalgleichungen für exp und ln.

Lemma 7.33. *Mit Definition 7.32 gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $q, r \in \mathbb{R}$ stets*

$$(ab)^q = a^q b^q, \quad a^{qr} = (a^q)^r.$$

Für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Wir sehen also dass diese Definition von Potenzen mit unserer früheren Definition mit Hilfe von Wurzeln übereinstimmt. Diese Konstruktion von Potenzen liefert auch einen neuen Beweis der Existenz von Wurzeln.

Lemma 7.34. *Die Abbildung $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $(a, q) \mapsto a^q$, ist stetig.*

Beweis. Folgt aus der Stetigkeit der Funktionen exp, ln, und der Multiplikation. □

Als Nächstes zeigen wir mit Hilfe von Stetigkeit eine allgemeinere Version der Bernoulli-Ungleichung.

Korollar 7.35 (Bernoulli-Ungleichung)**.** *Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und alle $q \in [0, 1]$ gilt*

$$(1 + x)^q \leq 1 + qx.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und alle $q \in [1, \infty)$ gilt

$$(1 + x)^q \geq 1 + qx.$$

Beweis. (i) Für $q \in \mathbb{Q}$ ist die Ungleichung bereits aus den Übungen bekannt. Sei nun $q \in [0, 1]$ beliebig und sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ mit $q_n \to q$. Dann gilt

$$0 \leq 1 + q_n x - (1 + x)^{q_n} \to 1 + qx - (1 + x)^q.$$

Da Ordnung unter Grenzwerten erhalten bleibt (Lemma 6.7), folgt daraus die Behauptung.

(ii) geht ähnlich (kann aber auch, wie in den Übungen, aus (i) gefolgert werden). □

Nun schauen wir uns trigonometrische Funktionen an und definieren die Zahl π.

Definition 7.36. *Für $z \in \mathbb{C}$ sei*

$$\cos z := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \sin z := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i},$$

Aus den Definitionen ergibt sich für alle $z \in \mathbb{C}$ die Funktionalgleichung

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1. \tag{7.6}$$

Indem man die Potenzreihendarstellung von exp einsetzt, bekommt man

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Insbesondere sehen wir dass $\sin(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ und $\cos(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Dies und die Funktionalgleichung implizieren zusammen dass für alle $x \in \mathbb{R}$ stets $|\cos(x)| \leq 1$ und $|\sin(x)| \leq 1$ gilt. (Für $x \in \mathbb{C}$ ist das i.A. falsch!)

Die Potezreihendarstellung impliziert für alle $z \in \mathbb{C}$ die Identitäteten

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

Lemma 7.37. *Es gibt ein $t \in [1/2, 1]$ mit $\cos t = 1/\sqrt{2}$.*

Beweis. Da cos durch eine alternierende Reihe gegeben ist, gilt für alle $x \in (0,1]$

$$1 - x^2/2 < \cos x < 1 - x^2/2 + x^4/4!. \tag{7.7}$$

Insbesondere gilt $\cos(1/2) > 1 - 1/8 = 7/8$ und $\cos(1) < 1 - 1/2 + 1/4! = 13/24$. Da $13/24 < 1/\sqrt{2} < 7/8$, folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz. □

Definition 7.38 (π). *Die Zahl π ist wie folgt definiert:*

$$\pi := 4 \inf\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \cos(x) = 1/\sqrt{2}\}. \tag{7.8}$$

Aus Lemma 7.37 folgt dass die Menge in (7.8) nichtleer ist. Aus der unteren Schranke in (7.7) folgt diese Menge durch $1/2$ von unten beschränkt ist, sodass $\pi \geq 2$. Da cos eine stetige Funktion ist, ist das Infimum in (7.8) in Wirklichkeit ein Minimum ist. Wir halten also fest dass $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ und $2 \leq \pi \leq 4$.

Da sin durch eine alternierende Riehe gegeben ist, gilt für $x \in (0,1]$ stets

$$\sin x > x - x^3/3! \geq x(1 - 1^2/3!) = x \cdot \frac{5}{6},$$

sodass $\sin(\pi/4) > 0$. Aus der Funktionalgleichung (7.6) folgt nun $\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.

Die Verdopplungssätze für sin, cos (bereits in einer Übung gezeigt: $\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1$, wird noch gezeigt: $\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x$) implizieren nun

$$\cos(\pi/2) = 0, \quad \sin(\pi/2) = 1,$$

und $\pi/2$ ist die kleinste Nullstelle von cos, da sonst $\pi/4$ nicht das Infimum in (7.8) wäre. Daraus folgt

$$\exp(i\pi/2) = i,$$

und mit Hilfe dieser Aussage folgen nun viele weitere Eigenschaften von sin, cos, z.B.

$$\exp(2\pi i) = 1, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x), \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x) = \sin(x + \pi/2).$$

[15: 2020-12-23]

[16: 2021-01-11]

8 Offene, abgeschlossene, und kompakte Mengen

In diesem Abschnitt charakterisieren wir metrische Räume in denen jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

8.1 Offene und abgeschlossene Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $a \in X$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sei

$$B_r(a) := \{x \in X \mid d(x,a) < r\}$$

die *offene Kugel* (oder *offener Ball*) von Radius r um a.

Definition 8.1. *Sei (X, d) ein metrischer Raum.*

(i) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt Umgebung *eines $a \in X$ falls ein $r > 0$ mit $B_r(a) \subseteq U$ existiert.*

(ii) Eine Teilmenge $G \subseteq X$ heißt offen *(Gebiet) falls sie Umgebung jedes ihrer Elemente ist.*

(iii) *Eine Teilmenge $F \subseteq X$ heißt* abgeschlossen *(fermé) falls ihr Komplement $F^{\complement} := X \setminus F$ offen ist.*

Beispiel. Sei $X = \mathbb{R}$ mit der Betragsmetrik. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist das Intervall (a, b) offen und nicht abgeschlossen. Das Intervall $[a, b]$ ist abgeschlossen und nicht offen.

Mengen sind keine Türen: Die Intervalle $(a, b]$ und $[a, b)$ sind weder offen noch abgeschlossen. Die Teilmengen $\varnothing$ und $\mathbb{R}$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen.

Bemerkung. Ob eine Menge offen oder abgeschlossen ist hängt sowohl vom Raum X als auch von der Metrik ab. Z.B. ist $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$ offen, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nicht offen wenn $\mathbb{R}$ mit der Betragsmetrik versehen ist, aber $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ offen wenn $\mathbb{R}$ mit der diskreten Metrik versehen ist.

Beispiel. In einem diskreten metrischen Raum sind alle Teilmengen offen und alle Teilmengen abgeschlossen.

In jedem metrischen Raum (X, d) sind die Teilmengen $\varnothing$ und X sowohl offen als auch abgeschlossen.

Lemma 8.2. *Seien X ein metrischer Raum, $a \in X$, und $r > 0$. Dann ist die offene Kugel $B_r(a)$ eine offene Menge, und die* abgeschlossene Kugel

$$\bar{B}_r(a) := \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$$

eine abgeschlossene Menge.

Beweis. Sei $y \in B_r(a)$. Mit $r' := r - d(a, y) > 0$ gilt dann $B_{r'}(y) \subseteq B_r(a)$. Also ist $B_r(a)$ offen.

Sei $y \in X \setminus \bar{B}_r(a)$. Mit $r' := d(a, y) - r > 0$ gilt dann $B_{r'}(y) \subseteq X \setminus \bar{B}_r(a)$. Also ist $X \setminus \bar{B}_r(a)$ offen, und damit $\bar{B}_r(a)$ abgeschlossen. □

Bemerkung. Offene Bälle können auch abgeschlossen sein. Abgeschlossene Bälle können auch offen sein. Beides ist z.B. in einem diskreten metrischen Raum der Fall.

Proposition 8.3 (Folgencharakterisierung der Abgeschlossenheit)**.** *Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *A ist abgeschlossen,*

(ii) *für jede X-konvergente Folge (x_n) in A gilt* $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$.

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei (x_n) eine Folge in A und $x \in X \setminus A$. Da $X \setminus A$ offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq X \setminus A$. Damit kann (x_n) nicht gegen x konvergieren. Also muss der Grenzwert in A liegen.

$\Longleftarrow$: Angenommen, A ist nicht abgeschlossen. Das heißt, $X \setminus A$ ist nicht offen, also existiert ein $a \in X \setminus A$ mit

$$(\forall r > 0) B_r(a) \nsubseteq X \setminus A,$$

Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ wähle $x_n \in B_{1/n}(a) \cap A$. Diese x_n's bilden eine Folge die gegen a konvergiert, im Widerspruch zur Annahme. □

Korollar 8.4. *Set X ein vollständiger metrischer Raum und $F \subseteq X$. Der Raum F mit der induzierten Metrik ist genau dann vollständig, wenn F in X abgeschlossen ist.*

Beweis. $\Longrightarrow$: Wenn F vollständig ist und (x_n) eine X-konvergente Folge in F, dann ist diese Folge insbesondere Cauchy, und da F vollständig ist ist sie in F konvergent. Der Grenzwert liegt also in F.

$\Longleftarrow$: Sei $F \subseteq X$ abgeschlossen und (x_n) eine Cauchy-Folge in F. Da X vollständig ist, ist (x_n) in X konvergent. Nach Proposition 8.3 liegt der Grenzwert in F. Also ist die Folge in F konvergent. □

8.2 Total beschränkte Mengen

In diesem Kapitel charakterisieren wir Räume in denen jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Diese Charakterisierung wird auch einen alternativen Beweis des Satzes von Bolzano–Weierstraß beinhalten.

Definition 8.5. *Ein metrischer Raum X heißt* total beschränkt *falls für jedes $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $X_\epsilon \subseteq X$ mit*

$$X \subseteq \bigcup_{a \in X_\epsilon} B_\epsilon(a)$$

existiert.

Beispiel. Jede beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist total beschränkt.

Beispiel. Die Menge der Folgen $\mathbb{N} \to [0,1]$ mit der Supremumsmetrik ist nicht total beschränkt.

Bemerkung. Wir sagen dass eine Teilmenge $X' \subseteq X$ eines metrischen Raums total beschränkt ist falls sie als metrischer Raum mit der induzierten Metrik total beschränkt ist.

Proposition 8.6 (Folgencharakterisierung der totalen Beschränktheit)**.** *Ein metrischer Raum X ist genau dann total beschränkt, wenn jede Folge in X eine Cauchy-Teilfolge besitzt.*

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei X total beschränkt und (x_n) eine Folge in X. Wir konstruieren rekursiv Teilfolgen von (x_n) beginnend mit $x_{0,n} := x_n$.

Für ein $N \in \mathbb{N}$ sei die Teilfolge $(x_{N,n})_n$ bereits konstruiert und $X_N \subseteq X$ eine endliche Teilmenge mit

$$X = \cup_{a \in X_N} B_{2^{-N}}(a).$$

Dann sind unendlich viele $x'_{N,n}s$ in einem dieser Bälle enthalten. Sei $(x_{N+1,n})_n$ die Teilfolge die aus den Elementen besteht die in einem dieser Bälle enthalten sind.

Am Ende betrachten wir die Diagonalfolge $(x_{n,n})_n$. Diese Teilfolge von $(x_n)_n$ ist dann eine Cauchyfolge.

$\Longleftarrow$: Sei nun X ein metrischer Raum in dem jede Folge eine Cauchy-Teilfolge besitzt. Wir nehmen an dass X nicht total beschränkt ist, also ein $\epsilon > 0$ existiert für das X nicht durch endlich viele ϵ-Bälle überdeckt werden kann.

Wir konstruieren rekursiv eine Folge die zum Widerspruch führen wird. Seien x_n für $n < N$ gegeben. Sei dann $x_N \in X \setminus \cup_{n<N} B_\epsilon(x_n)$ beliebig.

Mit dieser Konstruktion gilt $d(x_N, x_M) \geq \epsilon$ für alle $N \neq M$. Also kann die Folge $(x_N)_N$ keine Cauchy-Teilfolge haben. □

Definition 8.7. *Ein metrischer Raum X heißt* folgenkompakt *falls jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt.*

Proposition 8.8. *Ein metrischer Raum ist genau dann folgenkompakt, wenn er total beschränkt und vollständig ist.*

Beweis. $\Longleftarrow$: Sei X total beschränkt und vollständig. Sei (x_n) eine Folge in X. Nach Proposition 8.6 besitzt diese Folge eine Cauchy-Teilfolge. Nach Definition der Vollständigkeit ist diese Teilfolge konvergent.

$\Longrightarrow$: Sei X ein folgenkompakter metrischer Raum. Da jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt, besitzt sie auch eine Cauchy-Teilfolge, also ist X nach Proposition 8.6 total beschränkt.

Sei nun (x_n) eine Cauchy-Folge in X. Nach Annahme besitzt sie eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit einem Grenzwert x. Im Beweis von Satz 4.28 haben wir gesehen dass auch x_n gegen x konvergiert. Also ist X vollständig. □

Satz 8.9. *Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^N$ (mit der Euklidischen Metrik) ist folgenkompakt genau dann, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Nach Proposition 8.8 ist X folgenkompakt genau dann, wenn X total beschränkt und vollständig ist. Nach Korollar 8.4 ist X vollständig genau dann, wenn X in $\mathbb{R}^N$ abgeschlossen ist. Es reicht also zu zeigen dass X genau dann total beschränkt ist, wenn X beschränkt ist.

$\Longrightarrow$: Sei X total beschränkt. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $X_1 \subseteq X$ mit $X \subseteq \cup_{a \in X_1} B_1(a)$. Also ist X durch $1 + \max_{a \in X_1} \|a\|$ beschränkt.

$\Longleftarrow$: Sei X beschränkt und $\epsilon > 0$. ObdA ist X durch ein $A \in \mathbb{N}$ beschränkt und $\epsilon = 1/M$. Dann können wir X durch die (endlich vielen) Würfel der Form $(m+[0,1]^N)/(NM)$ mit $m \in \{-ANM, \dots, ANM\}^N$ überdecken (das sind Würfel mit Kantenlänge $1/(NM)$). Für jeden solchen Würfel Q der nichtleeren Durchschnitt mit X hat wählen wir einen Punkt $x \in X \cap Q$. Die Vereinigung der ϵ-Bälle um diese Punkte überdeckt dann X. □

8.3 Kompakte Mengen

Die folgende Definition ist formal stärker als totale Beschränktheit, impliziert aber überraschenderweise auch Vollständigkeit. Sie ist nicht nur auf metrische Räume anwendbar und von zentraler Bedeutung in Topologie.

Definition 8.10. *Eine* Überdeckung *einer Menge X ist eine Menge $\mathcal{G}$ von Teilmengen von X mit $X = \cup \mathcal{G}$.*

Ein metrischer Raum X heißt kompakt *wenn jede Überdeckung von X mit offenen Mengen eine endliche Teilüberdeckung besitzt (d.h., eine endliche Teilmenge die auch eine Überdeckung ist).*

Satz 8.11. *Ein metrischer Raum ist kompakt genau dann wenn er folgenkompakt ist.*

Beweis. $\Longrightarrow$ Sei X kompakt. Nach Proposition 8.8 reicht es zu zeigen dass X total beschränkt und vollständig ist.

Für ein festes $\epsilon > 0$ sei $\mathcal{G}$ die Menge der offenen ϵ-Bälle in X. Dies ist eine Überdeckung von X mit offenen Mengen, besitzt also eine endliche Teilüberdeckung. Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, ist X total beschränkt.

Sei nun (x_n) eine Cauchy-Folge in X. Wir müssen zeigen dass diese Folge einen Grenzwert besitzt. Indem wir eine Teilfolge betrachten, können wir annehmen dass für alle $n \leq m$ gilt $d(x_n, x_m) < 2^{-n-1}$. Sei nun $F_n := \bar{B}_{2^{-n}}(x_n)$. Diese Mengen sind abgeschlossen, und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $F_n \supseteq F_{n+1}$. Wenn $\cap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$, dann ist $\{X \setminus F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Überdeckung von X mit offenen Mengen, besitzt also nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung. Da die Mengen $X \setminus F_n$ verschachtelt sind, impliziert das dass $X \setminus F_N = X$ für ein $N \in \mathbb{N}$ ist, Widerspruch. Also existiert ein $x \in \cap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Dieses x ist dann ein Grenzwert von (x_n). Also ist X vollständig.

$\Longleftarrow$ Sei X folgenkompakt. Sei $\mathcal{G}$ eine Überdeckung von X mit offenen Mengen. Wir müssen zeigen dass $\mathcal{G}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Da X total beschränkt ist, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine endliche Teilmenge $X_n \subseteq X$ mit $X \subseteq \cup_{a \in X_n} B_{1/n}(a)$. Wenn ein n existiert sodass für jedes $a \in X_n$ ein $G_{a,n} \in \mathcal{G}$ mit $B_{1/n}(a) \subseteq G_{a,n}$ existiert, dann ist $\{G_{a,n} \mid a \in X_n\}$ eine endliche Teilüberdeckung von X.

Wenn das nicht der Fall ist, dann wählen wir für jedes $n \geq 1$ ein $a_n \in X_n$ mit $B_{1/n}(a_n) \nsubseteq G$ für jedes $G \in \mathcal{G}$. Da X folgenkompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_k$. Sei $a := \lim_{k \to \infty} a_{n_k}$. ObdA können wir $d(a_{n_k}, a) < 1/k$ und $n_k \geq k$ annehmen. Sei nun $G \in \mathcal{G}$ mit $a \in G$. Per Definition einer offenen Menge existiert ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(a) \subseteq G$. Nach dem Archimedischen Prinzip existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 2/\epsilon$. Es folgt

$$B_{1/n_k}(a_{n_k}) \subseteq B_{1/n_k + 1/k}(a) \subseteq B_\epsilon(a) \subseteq G,$$

Widerspruch. □

Satz 8.12 (Heine-Borel). *Für eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^N$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) X ist kompakt,

(ii) X ist folgenkompakt,

(iii) X ist beschränkt und abgeschlossen.

Beweis. Folgt direkt aus Satz 8.9 und Satz 8.11. □

Satz 8.13 (Satz vom Maximum). *Sei X ein nichtleerer kompakter metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und es existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = \sup_{x' \in X} f(x')$.*

Beweis. Sei $S := \sup_{x' \in X} f(x') \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Sei (x_n) eine Folge in X mit $f(x_n) \to S$. Nach Satz 8.11 hat sie eine konvergente Teilfolge, die wir wieder mit (x_n) bezeichnen. Sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Da f stetig ist, gilt $f(x_n) \to f(x)$. Da Grenzwerte eindeutig sind, gilt $S = f(x)$. □

Definition 8.14. *Seien X, Y metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* gleichmäßig stetig *falls*

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x, x' \in X) d(x, x') < \delta \implies d(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Der Unterschied zur Definition der Stetigkeit besteht darin, dass für ein gegebenes ϵ das gleiche δ für alle Punkte $a \in X$ funktioniert.

Beispiel. Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist nicht gleichmäßig stetig.

Satz 8.15. *Seien X, Y metrische Räume. Wenn X kompakt ist, dann ist jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Per Definition der Stetigkeit existiert für jedes $x \in X$ ein $\delta(x) > 0$ mit $f(B_{\delta(x)}(x)) \subseteq B_{\epsilon/2}(f(x))$. Die Familie

$$\{B_{\delta(x)/2}(x) \mid x \in X\}$$

ist eine offene Überdeckung von X. Per Definition der Kompaktheit besitzt sie eine endliche Teilüberdeckung, die also durch eine Teilmenge $X' \subseteq X$ indiziert ist. Wir behaupten dass $\delta := \min_{x \in X'} \delta(x)/2$ die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit verifiziert. Seien dazu $a, a' \in X$ mit $d(a, a') < \delta$. Per Definition einer Überdeckung existiert ein $x \in X'$ mit $d(a, x) < \delta(x)/2$. Mit Dreiecksungleichung folgt

$$d(a', x) \leq d(a', a) + d(a, x) < \delta + \delta(x)/2 \leq \delta(x).$$

Die Wahl von $\delta(x)$ impliziert nun

$$d(f(a), f(a')) \leq d(f(a), f(x)) + d(f(x), f(a')) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$ □

8.4 Allgemeines über offene und abgeschlossene Mengen

Der Satz von Heine-Borel ist eine Motivation um allgemein über offene und abgeschlossene Mengen zu sprechen.

Satz 8.16. *Sei (X, d) ein metrischer Raum.*

(i) Seien $G_1, G_2 \subseteq X$ offen. Dann ist auch $G_1 \cap G_2$ offen.

(ii) Sei $\mathcal{G}$ eine beliebige Menge offener Teilmengen von X. Dann ist auch $\cup\mathcal{G} = \cup_{G\in\mathcal{G}}G$ offen.

(iii) Seien $F_1, F_2 \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist auch $F_1 \cup F_2$ abgeschlossen.

(iv) Sei $\mathcal{F}$ eine beliebige Menge abgeschlossener Teilmengen von X. Dann ist auch $\cap\mathcal{F} = \cap_{F\in\mathcal{F}}F$ abgeschlossen.

Beweis. (i) Sei $a \in G_1 \cap G_2$. Per Definition der Offenheit sind G_1, G_2 Umgebungen von a. Das heißt, es gibt positive Radien $r_1, r_2 > 0$ mit $B_{r_1}(a) \subseteq G_1$ und $B_{r_2}(a) \subseteq G_2$. Für $r := \min(r_1, r_2) > 0$ gilt also

$$B_r(a) \subseteq G_1 \cap G_2,$$

was per Definition bedeutet dass $G_1 \cap G_2$ eine Umgebung von a ist.

Da dies für alle $a \in G_1 \cap G_2$ gilt, ist $G_1 \cap G_2$ offen.

(ii) Sei $a \in \cup\mathcal{G}$. Dann gibt es ein $G \in \mathcal{G}$ mit $a \in G$. Da G offen ist, ist es eine Umgebung von a. Deshalb existiert ein $r > 0$ mit $B_r(a) \subseteq G$. Da $B_r(a) \subseteq G \subseteq \cup\mathcal{G}$, ist $\cup\mathcal{G}$ eine Umgebung von a.

Da dies für alle $a \in \cup\mathcal{G}$ gilt, ist $\cup\mathcal{G}$ offen.

(iii) Die Menge

$$(F_1 \cup F_2)^\complement = F_1^\complement \cap F_1^\complement$$

ist nach Teil (i) offen.

(iv) Die Menge

$$(\cap\mathcal{F})^\complement = \cup_{F\in\mathcal{F}}F^\complement$$

ist nach Teil (ii) offen. □

Definition 8.17. *Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Das* Innere *von A ist definiert durch*

$$A^\circ := \bigcup\{G \subseteq X \mid G \text{ offen und } G \subseteq A\}.$$

Der Abschluss *von A ist definiert durch*

$$\overline{A} := \bigcap\{F \subseteq X \mid F \text{ abgeschlossen und } A \subseteq F\}.$$

Der Rand *von A ist definiert durch*

$$\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ.$$

Aus Satz 8.16 folgt dass der Abschluss $\overline{A}$ eine abgeschlossene Menge und das Innere A° eine offene Menge ist. Es gilt stets $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$. Der Abschluss $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge die A enthält, und das Innere A° ist die größte offene Menge die in A enthalten ist.

Beispiel. In $\mathbb{R}$ gilt $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}^\circ = \varnothing$ (Übung).

Lemma 8.18. *Es gilt stets $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$.*

Beweis. Mit der Substitution $G = X \setminus F$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\overline{X \setminus A} &= \cap\{F \supseteq X \setminus A \text{ abgeschlossen}\} \\
&= \cap\{F \supseteq X \setminus A \mid X \setminus F \text{ offen}\} \\
&= \cap\{X \setminus G \mid G \subseteq A \text{ und } G \text{ offen}\} \\
&= X \setminus \cup\{G \mid G \subseteq A \text{ und } G \text{ offen}\} \\
&= X \setminus A^\circ.
\end{aligned}$$

□

Lemma 8.19. *Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt*

$$A^\circ = \{x \in X \mid (\exists \epsilon > 0) B_\epsilon(x) \subseteq A\},$$
$$\overline{A} = \{x \in X \mid (\forall \epsilon > 0) B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset\}, \tag{8.1}$$
$$\partial A = \{x \in X \mid (\forall \epsilon > 0) B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset \text{ und } B_\epsilon(x) \cap A^\complement \neq \emptyset\}.$$

Beweis. $A^\circ \supseteq$: Wenn $B_\epsilon(x) \subseteq A$, dann ist $B_\epsilon(x) \subseteq A^\circ$ weil $B_\epsilon(x)$ nach Lemma 8.2 offen ist.

$A^\circ \subseteq$: Wenn $G \subseteq A$ offen und $x \in G$, dann existiert nach Definition 8.1 ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq G \subseteq A$.

$\overline{A}$: Mit Lemma 8.18 und der bereits bewiesenen Teilaussage erhalten wir

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= X \setminus (X \setminus A)^\circ \\
&= X \setminus \{x \in X \mid (\exists \epsilon > 0) B_\epsilon(x) \subseteq X \setminus A\} \\
&= \{x \in X \mid (\nexists \epsilon > 0) B_\epsilon(x) \subseteq X \setminus A\} \\
&= \{x \in X \mid (\forall \epsilon > 0) B_\epsilon(x) \not\subseteq X \setminus A\} \\
&= \{x \in X \mid (\forall \epsilon > 0) B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset\}.
\end{aligned}$$

∂A: Übung. □

9 Differentialrechnung

Differenzierbarkeit formalisiert die Vorstellung dass eine Funktion gut durch eine affin lineare Funktion approximiert werden kann. Es gibt mehrere Möglichkeiten das zu formulieren, und wir werden einige der wichtigsten kennenlernen.

9.1 Definitionen

Für die Definition der Ableitung müssen wir den Grenzwertbegriff erweitern.

Definition 9.1. *Seien X, Y metrische Räume, $A \subseteq X$, und $a \in \overline{A}$. Für eine Funktion $f : A \to Y$ und $y \in Y$ schreiben wir*

$$\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = y$$

falls

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in B_\delta(a) \cap A)\, d(f(x), y) < \epsilon.$$

Die Bedingung $a \in \overline{A}$ wird benötigt um Eindeutigkeit des Grenzwerts zu garantieren. Eindeutigkeit folgt aus der Characterisierung des Abschlusses in (8.1), die sicherstellt dass der innerste Quantor „$\forall x$“ nicht über die leere Menge genommen wird.

[17: 2021-01-13]

[18: 2021-01-18]

Rechenregeln die für Grenzwerte von Folgen gezeigt wurden gelten (mit den gleichen Beweisen) auch für Grenzwerte in Definition 9.1.

Definition 9.2. *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Seien $U \subseteq \mathbb{K}$ und $a \in U^\circ$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{K}$ heißt* differenzierbar *in a falls der Grenzwert*

$$f'(a) := \lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert heißt die Ableitung *von f in a.*

Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wird vor allem für die trigonometrischen Funktionen wichtig sein. Die nachfolgenden Beweise funktionieren für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ gleichermaßen weil sie lediglich benutzen dass $\mathbb{K}$ ein Körper und ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

Notation 9.3 (Landau-Symbol o). *Sei X ein metrischer Raum. Sei $A \subseteq X$ und $a \in \overline{A}$. Für Funktionen $f, g : A \to \mathbb{K}$ schreiben wir $f \in o_{x\to a}(g)$ (lies: „f hat kleinere Ordnung als g“) falls*

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Mit der Landau-Notation können wir die Idee der affin linearen Approximation wie folgt ausdrucken. Diese Formulierung ist wichtig weil sie sich besser für die Verallgemeinerung auf Funktionen in mehreren Veränderlichen eignet, was in Analysis 2 zu sehen sein wird.

Lemma 9.4 (Fehlerterm-Charakterisierung der Ableitung). *Seien $U \subseteq \mathbb{K}$ und $a \in U^\circ$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{K}$ ist genau dann in a differenzierbar, wenn*

$$f(a+h) = f(a) + Bh + R_{f,a}(h) \tag{9.1}$$

mit einer Zahl $B \in \mathbb{K}$ und einer Funktion $R_{f,a}(h) \in o(h) := o_{h\to 0}(h)$ gilt.

In diesem Fall ist B eindeutig bestimmt und es gilt $f'(a) = B$.

Beweis. Angenommen, (9.1) gilt. Dann ist

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - B\right| = \lim_{h\to 0} \frac{|R_{f,a}(h)|}{|h|} = 0,$$

also ist $f'(a) = B$. Für die Umkehrung liest man die Gleichungskette rückwärts. □

Für affin lineare Funktionen verschwindet der Fehlerterm R in (9.1) identisch, sodass wie die Ableitung unmittelbar bestimmen können. Bei dieser Gelegenheit führen wir auch die Notation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) := f'(x)$$

ein, die den Vorteil hat dass man kein Symbol für die Funktion f braucht.

Lemma 9.5. *Seien $b, c \in \mathbb{K}$ Für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(bx + c) = b.$$

9.2 Rechenregeln

Die nächsten zwei Hilfsaussagen werden wir für diverse Fehlerterme benutzen.

Lemma 9.6. *Wenn eine Funktion in einem Punkt differenzierbar ist, dann ist sie dort auch stetig.*

Beweis. Sei f in a differenzierbar. Dann gilt

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + R(h)$$

mit $R(h) \in o(h)$. Letzteres impliziert dass R in 0 stetig ist, also haben wir f als Summe von Funktionen geschrieben die in 0 stetig sind. □

Lemma 9.7. *Sei $U \subseteq \mathbb{K}$ eine Umgebung von 0. Wenn $R, \tilde{R}, f : U \to \mathbb{K}$ Funktionen sind sodass $R(h), \tilde{R}(h) \in o(h)$ und f in 0 stetig ist, dann gilt auch $(fR)(h), (R + \tilde{R})(h) \in o(h)$. Weiterhin gilt $h^2 \in o(h)$.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus Rechenregeln für Grenzwerte. □

Satz 9.8. *Seien $U \subseteq \mathbb{K}$ und $a \in U^\circ$. Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $a \in U$. Dann sind folgende Funktionen ebenfalls an der Stelle a differenzierbar:*

(i) $f + g$, und $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

*(ii) fg, und $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ (*Produkt- *oder* Leibnizregel*).*

Beweis. (i)

$$(f+g)(a+h) = f(a) + g(a) + f'(a)h + g'(a)h + \underbrace{R_{f,a}(h) + R_{g,a}(h)}_{\in o(h)}.$$

(ii)

$$\begin{aligned}(fg)(a+h) &= (f(a) + f'(a)h + R_{f,a}(h))(g(a) + g'(a)h + R_{g,a}(h)) \\ &= (fg)(a) + f(a)g'(a)h + f'(a)hg(a) + \underbrace{\cdots}_{\in o(h)}.\end{aligned}$$ □

Satz 9.9 (Kettenregel)**.** *Seien $U, \tilde{U} \subseteq \mathbb{K}$, $f : U \to \tilde{U}$ und $g : \tilde{U} \to \mathbb{K}$ Funktionen. Wenn f in einem $a \in U^\circ$ differenzierbar, $f(a) \in \tilde{U}^\circ$ liegt, und g in $f(a)$ differenzierbar ist, dann ist die Verkettung $g \circ f$ in a differenzierbar, und es gilt*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Beweis. Wir benutzen die Fehlertermdarstellung

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a+h) &= g(f(a) + f'(a)h + R_{f,a}(h)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)h + R_{f,a}(h)) + R_{g,a}(f'(a)h + R_{f,a}(h)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)h + \underbrace{\cdots}_{\in o(h)},\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben dass für alle $b \in \mathbb{K}$ aus $R(h), \tilde{R}(h) \in o(h)$ stets $R(bh + \tilde{R}(h)) \in o(h)$ folgt. Letzteres rechnet man wie folgt nach. Sei $\epsilon > 0$. Aus $R(h), \tilde{R}(h) \in o(h)$ folgt dass ein $\delta > 0$ existiert sodass

$$|h| < \delta \implies |R(h)|/|h| < \epsilon \wedge |\tilde{R}(h)|/|h| < 1.$$

Damit gilt

$$|h| < \delta/(1 + |b|) \implies |bh + \tilde{R}(h)| < |b||h| + |h| < \delta \implies R(bh + \tilde{R}(h)) < \epsilon.$$ □

Bemerkung. Ähnlich wie bei Stetigkeit, kann die Kettenregel benutzt werden um die Summen- und Produktregel auf die Ableitungen der Körperoperationen zurückzuführen. Wir tun das nicht in Analysis 1, weil wir die Differentialrechnung nur in einer Variable entwickeln, die Körperoperationen aber Funktionen von 2 Variablen sind.

Lemma 9.10. *Die multiplikative Inverse* $\mathrm{inv} : \mathbb{K} \setminus \{0\} \to \mathbb{K}$, $\mathrm{inv}(x) = 1/x$, *ist differenzierbar, und es gilt* $\mathrm{inv}'(x) = -1/x^2$.

Beweis. Für $|h| < |x|$ gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{inv}(x+h) &= \frac{1}{x+h} = \frac{1}{x}\frac{1}{1-(-h/x)} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}(-h/x)^k \\ &= \mathrm{inv}(x) - \frac{1}{x^2}h + \underbrace{h^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-h)^{k-2}}{x^{k+1}}}_{\in o(h)}.\end{aligned}$$ □

Lemma 9.11 (Quotientenregel). *Seien $U \subseteq \mathbb{K}$ und $a \in U^\circ$. Seien $f : U \to \mathbb{K}$ und $g : U \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ differenzierbar an der Stelle a. Dann ist auch f/g differenzierbar an der Stelle a, und es gilt*

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Beweis. Nach der Kettenregel gilt

$$(1/g)'(a) = (\operatorname{inv} \circ g)(a) = \operatorname{inv}'(g(a))g'(a) = (-1/g(a)^2)g'(a) = -g'(a)/g^2(a).$$

Nach der Produktregel gilt

$$(f/g)'(a) = (f(1/g))'(a) = f'(a)(1/g)(a) + f(a)(1/g)'(a) = f'(a)/g(a) - f(a)g'(a)/g(a)^2.$$

Das Ergebnis kann man noch auf einen gemeinsamen Nenner bringen um die Behauptung zu erhalten. □

Lemma 9.12. *Für $n \in \mathbb{Z}$ und $x \neq 0$ gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = nx^{n-1}$. Für $n \geq 0$ gilt das auch für $x = 0$.*

Beweis. Für $n = 0, 1$ ist dies bereits bekannt. Für andere positive n benutzen wir Induktion über n und die Produktregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{n+1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n \cdot x) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n) \cdot x + x^n(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x) = (nx^{n-1})x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Für negative n benutzen wir die Quotientenregel: für $n \geq 1$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{-n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{x^n} = (-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n)/(x^n)^2 = (-nx^{n-1})/x^{2n} = -nx^{-n-1}.$$ □

Proposition 9.13 (Ableitung der Umkehrfunktion). *Seien $U, \tilde{U} \subseteq \mathbb{K}$, $a \in U^\circ$, $b \in \tilde{U}^\circ$. Sei $f : U \to \tilde{U}$ eine bijektive Funktion mit $f(a) = b$ die in a differenzierbar ist. Wenn $f'(a) \neq 0$ und die Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle b stetig ist, dann ist f^{-1} an der Stelle b differenzierbar, und es gilt*

$$(f^{-1})'(f(a)) = 1/f'(a). \tag{9.2}$$

Bemerkung. Wenn die Umkehrfunktion differenzierbar ist, dann folgt die Identität (9.2) aus der Kettenregel. Die Existenz einer Umkehrfunktion folgt aber nicht aus Differenzierbarkeit in einem Punkt, z.B. ist

$$f(x) = x + x^2 \sin(1/x^2)$$

in 0 reell differenzierbar mit $f'(0) = 1$, aber auf keiner Umgebung von 0 injektiv.

Beweis. ObdA $a = b = 0$ und $f'(a) = 1$ (sonst betrachte die Funktion $x \mapsto (f(x+a) - b)/f'(a)$).

Sei $g = f^{-1}$ die Umkehrfunktion von f. Wir schreiben

$$f(x) = x + R(x). \tag{9.3}$$

Indem wir $x = g(y)$ einsetzen, erhalten wir

$$g(y) = y - R(g(y)).$$

Wir müssen also zeigen dass der Fehlerterm $o(y)$ ist.

Sei $0 < \epsilon < 1$ fest. Da f differenzierbar in 0 ist, existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$|x| < \delta \implies |R(x)| \leq \epsilon |x|.$$

Da g stetig in 0 ist, existiert $\delta' > 0$ so, dass

$$|y| < \delta' \implies |g(y)| < \delta.$$

Sei $y \in \tilde{U}$ mit $|y| < \delta'$. Für $x = g(y)$ erhalten wir $|x| < \delta$ und $|R(x)| \leq \epsilon|x|$. Aus (9.3) folgt

$$|y| \geq |x| - |R(x)| \geq (1-\epsilon)|x|,$$

sodass

$$|R(x)| \leq \epsilon|x| \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}|y|. \qquad \square$$

Korollar 9.14. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende [Korrektur: stetige] Funktion. Wenn f in einem Punkt $a \in I$ differenzierbar ist [Korrektur: mit $f'(a) \neq 0$], dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} in $f(a)$ differenzierbar, und es gilt* (9.2).

Beweis. Die Umkehrfunktion existiert und ist stetig laut Proposition 7.28. Die Behauptung folgt nun aus Proposition 9.13. $\square$

[18: 2021-01-18]

[19: 2021-01-20]

9.3 Differenzierbarkeit auf einem Intervall

Bisher haben wir über Differenzierbarkeit in einem Punkt gesprochen. In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen in einer reellen Variable die auf einem Intervall differenzierbar sind.

Definition 9.15. *Sei I ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : I \to \mathbb{R}$ hat ein* lokales Maximum *in $a \in I$ falls ein $\epsilon > 0$ existiert sodass für alle $x \in B_\epsilon(a)$ stets $f(a) \geq f(x)$ gilt. Ein* lokales Minimum *von f ist ein lokales Maximum von $-f$. Ein* lokales Extremum *ist ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.*

Lemma 9.16. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$, und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung die in a ein lokales Extremum hat und in a differenzierbar ist. Dann gilt $f'(a) = 0$.*

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen $f'(a) \neq 0$ an. Wir schreiben

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + R_{f,a}(h)$$

mit $R_{f,a}(h) \in o(h)$. Wenn $f'(a) > 0$, dann existiert ein $\delta > 0$ sodass $|h| < \delta \implies |R_{f,a}(h)| < |f'(a)| \cdot |h|$. Damit gilt für alle $h \in (0,\delta)$ stets

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + R_{f,a}(h) > f(a) + f'(a)h - |f'(a)| \cdot |h| = f(a).$$

Also hat f in a kein lokales Maximum. Der Fall $f'(a) < 0$ geht analog. $\square$

Die Umkehrung von Lemma 9.16 ist falsch.

Beispiel. Für die Funktion $f(x) = x^3$ gilt $f'(0) = 0$, sie hat in 0 aber kein lokales Extremum.

Lemma 9.16 ist an den Endpunkten eines Intervalls falsch.

Beispiel. Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ hat ein Maximum in $x = 1$, aber $f'(1) = 1 \neq 0$.

Satz 9.17 (Satz von Rolle)**.** *Seien $a < b$ reelle Zahlen. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b) = 0$ und differenzierbar auf (a,b). Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Wenn die Funktion f konstant ist, dann verschwindet die Ableitung identisch.

Wenn die Funktion f nicht konstant ist, dann nimmt sie entweder einen Wert > 0 oder einen Wert < 0 an. ObdA betrachten wir den ersten Fall (sonst ersetze f durch $-f$). Nach dem Satz vom Maximum (Satz 8.13) hat f ein globales Maximum in einem Punkt $\xi \in [a, b]$. Da $f(\xi) > 0$, folgt $\xi \in (a, b)$. Nach Lemma 9.16 gilt $f'(\xi) = 0$. □

Satz 9.18 (Mittelwertsatz für zwei Funktionen)**.** *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) mit $g' \neq 0$ überall. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis. Aus dem Satz von Rolle folgt $g(b) - g(a) \neq 0$. Die Funktion

$$h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle, es gibt also ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi).$$

□

9.3.1 Monotonie

Korollar 9.19 (Mittelwertsatz für eine Funktion)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Benutze Satz 9.18 mit $g(x) = x$. □

Bemerkung. Der Mittelwertsatz ist falsch für komplexwertinge Funktionen. Beispiel: $f(x) = \exp(ix)$ auf $[0, 2\pi]$.

Korollar 9.20. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Dann ist f genau dann monoton steigend, wenn für alle $x \in (a, b)$ stets $f'(x) \geq 0$ gilt.*

Beweis. $\Longrightarrow$: Für jedes ξ gilt $f'(\xi) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$, und der Bruch ist immer ≥ 0 wenn f monoton steigend ist.

$\Longleftarrow$: Angenommen, $f' \geq 0$ überall. Für $a \leq a' < b' \leq b$ liefert Korollar 9.19 die Ungleichung

$$f(b') - f(a') = f'(\xi)(b' - a') \geq 0.$$

□

Bemerkung. Strenge Monotonie impliziert nicht dass $f'(x) > 0$. Beispiel: $f(x) = x^3$.

Korollar 9.21. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann ist f konstant genau dann wenn für alle $x \in (a, b)$ stets $f'(x) = 0$ gilt.*

Beweis. Die Funktion f ist genau dann konstant wenn sie monoton steigend und monoton fallend ist. Korollar 9.20 besagt dass diese Aussagen zu $f' \geq 0$ bzw. $f' \leq 0$ äquivalent sind. □

Korollar 9.21a (Beweis in der VL)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann sind äquivalent:*

(i) die Funktion f ist streng monoton steigend,

(ii) $f' \geq 0$ und es gibt kein nichtleeres offenes Intervall $I' \subseteq [a, b]$ auf dem f' identisch verschwindet.

9.3.2 Konvexität

Definition 9.22. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* (strikt) konvex *falls für alle $a, b \in I$ und $t \in (0,1)$ stets*

$$f((1-t)a + tb) \le (1-t)f(a) + tf(b)$$

gilt (bzw. $<$ statt $\le$). Eine Funktion f heißt (strikt) konkav *falls $-f$ (strikt) konvex ist.*

Lemma 9.23. *Eine Abbildung $f : I \to \mathbb{R}$ ist (strikt) konvex genau dann, wenn für alle $a, x, b \in I$ mit $a < x < b$ stets*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \tag{9.4}$$

gilt (bzw. $<$ statt $\le$).

Beweis. Mit dem Variablenwechsel $x = (1-t)a + tb$ bekommen wir

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{(1-t)a + tb - a}{b - (1-t)a - tb} = \frac{t(b-a)}{(1-t)(b-a)} = \frac{t}{1-t}$$

sowie

$$\begin{aligned} f((1-t)a+tb) \le (1-t)f(a) + tf(b) \iff f(x) \le (1-t)f(a) + tf(b) \\ \iff (1-t)(f(x) - f(a)) \le +t(f(b) - f(x)) \iff \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x}. \end{aligned}$$

Die strikten Ungleichungen sind ebenfalls äquivalent. □

Proposition 9.24. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f (strikt) konvex genau dann, wenn f' (streng) monoton wachsend ist.*

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei f konvex (den streng konvexen Fall behandeln wir später). Seien $a < b$ aus I und $h < (b-a)/2$. Indem wir (9.4) zwei mal benutzen, bekommen wir

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \le \frac{f(b-h) - f(a+h)}{b - a - 2h} \le \frac{f(b) - f(b-h)}{h}.$$

Wenn wir auf beiden Seiten $\lim_{h\to 0}$ nehmen, bekommen wir $f'(a) \le f'(b)$.

$\Longleftarrow$: Wenn f' (streng) monoton wachsend ist, dann folgt (9.4) (mit $<$) aus dem Mittelwertsatz.

Wenn f' monoton, aber nicht streng monoton wachsend ist, dann ist f' auf einem Teilintervall konstant. Aus dem Mittelwertsatz folgt dann (9.4) mit $=$ für a, x, b aus diesem Teilintervall. □

Beispiel. $f(x) = x^2$ ist strikt konvex.

Korollar 9.25. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' : I \to \mathbb{R}$ ebenfalls differenzierbar. Dann ist f konvex genau dann, wenn $f'' = (f')' \ge 0$.*

9.3.3 L'Hôpital-Regel

Lemma 9.26. *Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$. Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sodass g, g' nirgendwo verschwinden.*

Wenn $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ und $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ in $\mathbb{R}$ existiert, dann gilt

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x),$$

und insbesondere existiert der Grenzwert auf der linken Seite.

Beweis. Sei $\alpha := \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$\xi \in (a, x_0) \implies |f'(\xi)/g'(\xi) - \alpha| \le \epsilon.$$

Seien $x, y \in (a, x_0)$ mit $x < y$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (x,y)$ mit

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in [\alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon].$$

Indem wir $x \to a$ gehen lassen, bekommen wir

$$\frac{f(y)}{g(y)} \in [\alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon].$$

Da ϵ beliebig war, ist die Behauptung gezeigt. □

[19: 2021-01-20]
[20: 2021-01-25]

Beispiel. Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \lim_{x\to a} \frac{n x^{n-1}}{m x^{m-1}} = \frac{n}{m} a^{n-m}.$$

9.4 Vertauschung von Grenzwert und Ableitung

Satz 9.27 (Schrankensatz über $\mathbb{R}$). *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Für alle $x \in (a,b)$ gelte $|f'(x)| \le M$. Dann gilt $|f(a) - f(b)| \le M|a-b|$.*

Beweis. Aus dem Mittelwertsatz folgt $f(a) - f(b) = f'(\xi)(a-b)$ mit $\xi \in (a,b)$. □

Korollar 9.28 (Spezialfall des multidimensionalen Schrankensatzes). *Sei $U := B_r(0) \subseteq \mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Dann gilt für alle $a \in U$ stets*

$$|f(a) - f(0)| \le |a| \sup_{z\in U} |f'(z)|.$$

Beweis. ObdA $|a| \neq 0$. Indem wir f durch $\tilde f(z) := f(\frac{a}{|a|} z)$ ersetzen, können wir $a \in \mathbb{R}_{>0}$ annehmen.

ObdA $f(0) = 0$ (sonst ersetze f durch $f - f(0)$).

ObdA $f(a) \neq 0$. Indem wir f durch $\tilde f(z) = f(z) \cdot |f(a)|/f(a)$ ersetzen, können wir $f(a) \in \mathbb{R}$ annehmen.

Für $x \in [0,a]$ sei nun $g(x) := \Re f(x)$. Dann ist g eine stetige Funktion, und auf $(0,a)$ ist sie reell differenzierbar mit $g'(x) = \Re f'(x)$. Aud dem Mittelwertsatz folgt nun

$$|f(a)| = |g(a) - g(0)| = |g'(\xi)(a-0)| = |a||g'(\xi)| \le |a||f'(\xi)|$$

mit einem $\xi \in (0,a)$. □

Ein gleichmäßiger Grenzwert differentierbarer Funktionen muss im Allgemeinen nicht differenzierbar sein. Das folgende Resultat gibt eine hinreichende Bedingung an unter der dies doch der Fall ist.

Satz 9.29 (Vertauschung von Grenzwert und Ableitung). *Sei $U \subseteq \mathbb{K}$ offen. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von differenzierbaren Funktionen $f_n : U \to \mathbb{K}$. Man nehme an dass die Funktionen f_n gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergieren und die Ableitungen f_n' gleichmäßig gegen eine Funktion g konvergieren.*

Dann ist der Grenzwert f eine differenzierbare Funktion und es gilt $f' = g$.

Beweis. Sei $x \in U$ und $\epsilon > 0$ so, dass $B_\epsilon(x) \subseteq U$. Für $h \in B_\epsilon(0)$ und ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ schätzen wir den Restterm in der affin linearen Approximation von f ab:

$$\begin{aligned}
|R_{f,x}(h)| &= |f(x+h) - f(x) - g(x)h| \\
&\leq |f_n(x+h) - f_n(x) - f_n'(x)h| + |(f - f_n)(x+h) - (f - f_n)(x) - (g - f_n')(x)h| \\
&= |R_{f_n,x}(h)| + \lim_{m\to\infty} |(f_m - f_n)(x+h) - (f_m - f_n)(x) - (f_m' - f_n')(x)h| \\
&\leq |R_{f_n,x}(h)| + 2|h| \liminf_{m\to\infty} \sup_{x' \in B_\epsilon(x)} |(f_m' - f_n')(x')|, \quad \text{(Schrankensatz)} \\
&\leq |R_{f_n,x}(h)| + 2|h| \liminf_{m\to\infty} \|f_m' - f_n'\|_\infty.
\end{aligned}$$

Für ein gegebenes $\epsilon > 0$ wählen wir nun n so groß, dass für alle $m \geq n$ stets $\|f_m' - g\|_\infty < \epsilon/8$ gilt und $\delta > 0$ so klein, dass

$$|h| < \delta \implies |R_{f_n,x}(h)| \leq (\epsilon/2)|h|.$$

Dann bekommen wir für alle $h \in B_\delta(0)$ die Abschätzung

$$|R_{f,x}(h)| \leq |R_{f_n,x}(h)| + 2|h| \liminf_{m\to\infty} \big(\|f_m' - g\| + \|g - f_n'\|_\infty\big) < \epsilon|h|.$$ □

Satz 9.30 (Ableitungen von Potenzreihen)**.** *Sei $f(z) := \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ gegeben durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann gilt für alle $z \in B_\rho(0) \subseteq \mathbb{C}$ stets*

$$f'(z) = \sum_{k=1}^\infty k a_k z^{k-1}.$$

Beweis. Per Induktion über K bekommen wir aus den Rechenregeln für Ableitungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{k=0}^K a_k z^k = \sum_{k=1}^K k a_k z^{k-1}.$$

Die Reihe $\sum_k k a_k z^{k-1}$ hat aufgrund von Lemma 6.19 Konvergenzradius

$$1/\Big(\limsup_{k\to\infty} |k a_k|^{1/k}\Big) = 1/\Big(\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}\Big) = \rho.$$

Insbesondere konvergiert sie gleichmäßig auf jedem Ball $B_r(0)$ für $r < \rho$. Da die Partialsummen der zweiten Reihe die Ableitungen der Partialsummen der ersten Reihe sind, folgt die Behauptung aus Satz 9.29. □

Korollar 9.31. *Auf $\mathbb{C}$, und damit insbesondere auf $\mathbb{R}$, gilt* $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

Beweis. Für die Exponentialfunktion liefert Satz 9.30

$$\frac{d}{dz}\exp(z) = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^\infty \frac{k z^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^\infty \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \exp(z).$$

Für die trigonometrischen Funktionen benutzen wir die Formeln

$$\cos z := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \sin z := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i},$$

sowie die Rechenreglen für Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\cos z &= \frac{\exp'(iz)\frac{d}{dz}(iz) + \exp'(-iz)\frac{d}{dz}(-iz)}{2} = \frac{\exp(iz)i + \exp(-iz)(-i)}{2} = -\sin z, \\
\frac{d}{dz}\sin z &= \frac{\exp'(iz)\frac{d}{dz}(iz) - \exp'(-iz)\frac{d}{dz}(-iz)}{2i} = \frac{\exp(iz)i - \exp(-iz)(-i)}{2i} = \cos z.
\end{aligned}$$

□

Korollar 9.32. *Für $x > 0$ gilt $\ln'(x) = 1/x$.*

Beweis. Da ln die Umkehrfunktion von exp ist, liefert Korollar 9.14

$$\ln'(\exp(a)) = 1/\exp'(a) = 1/\exp(a).$$

Die Behauptung folgt mit der Substitution $x = \exp(a)$. □

Korollar 9.33. *Für $x > 0$ und $q \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{d}{dx}x^q = qx^{q-1}$.*

Beweis. Die Kettenregel liefert

$$\frac{d}{dx}x^q = \frac{d}{dx}\exp(q\ln x) = \exp'(q\ln x)\frac{d}{dx}(q\ln x) = \exp(q\ln x)q\frac{d}{dx}\ln x = x^q q/x = qx^{q-1}.$$

□

Korollar 9.34. *Der natürliche Logarithmus* ln *ist eine konkave Funktion.*

Beweis. Aus Korollar 9.32 folgt dass $-\ln'$ streng monoton ist. Aus Proposition 9.24 folgt dass $-\ln$ konvex ist. Also ist ln per Definition konkav. □

9.5 Höhere Ableitungen

Sei $U \subseteq \mathbb{K}$ und $f : U \to \mathbb{K}$ differenzierbar. Wenn die Ableitung f' wieder eine differenzierbare Funktion ist, dann heißt f *zweimal differenzierbar*, und

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f^{(2)} = f'' := (f')'$$

heißt *zweite Ableitung* von f. Rekursiv kann man Ableitungen beliebiger Ordnung definieren:

Definition 9.35. *Sei $U \subseteq \mathbb{K}$ offen und $f : U \to \mathbb{K}$. Sei $f^{(0)} := f$.*

*Sei $m \in \mathbb{N}$. Wenn $f^{(m)}$ definiert ist, dann nennen wir f eine m-*mal differenzierbare *Funktion. Wenn $f^{(m)}$ außerdem stetig ist, dann nennen wir f eine m-*mal stetig differenzierbare *Funktion. Wenn $f^{(m)}$ weiterhin differenzierbar ist, dann definieren wir*

$$D^{m+1}f = \frac{d^{m+1}f}{dx^{m+1}} = f^{(m+1)} := (f^{(m)})'.$$

Die Menge der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf U wird mit $C^m(U)$ bezeichnet. Die Menge der beliebig of differenzierbaren Funktionen wird auf U ist

$$C^\infty(U) := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C^m(U).$$

Nicht jede differenzierbare Funktion ist stetig differenzierbar.

Beispiel. Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$f(x) := \begin{cases} x^2\sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt $f'(0) = 0$ (Beweis: Übungsaufgabe) und für $x \neq 0$ gilt stets

$$f'(x) = 2x\sin(1/x) + x^2\cos(1/x)(-1/x^2) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Insbesondere ist f' in 0 nicht stetig.

Meistens arbeitet man mit stetig differenzierbare Funktionen, was man auch daran erkennt dass es keine allgemein gebräuchliche Notation für den Raum der m-mal differenzierbaren (nicht notwendigerweise stetig differenzierbaren) Funktionen gibt.

9.5.1 Rechenregeln

Die Rechenregeln für Ableitungen können auf höhere Ableitungen verallgemeinert werden.

Lemma 9.36. *Seien $f, g \in C^m(U)$. Dann ist $f + g \in C^m(U)$ und*

$$(f+g)^{(m)} = f^{(m)} + g^{(m)}.$$

Beweis. Induktion über m, wobei in jedem Induktionsschritt Satz 9.8, Teil (i) verwendet wird. □

Lemma 9.37 (Leibnizregel)**.** *Seien $f, g \in C^m(U)$. Dann ist $fg \in C^m(U)$, und es gilt*

$$(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(k)} g^{(m-k)}.$$

Die Leibnizregel sieht nicht zufällig wie die binomische Formel aus. Man kann die binomische Formel aus der Leibnizregel bekommen indem man $f(x) = ax^m/m!$ und $g(x) = bx^m/m!$ einsetzt.

Beweis. Induktion über m. Induktionsanfang $m = 0$ benutzt dass das Produkt stetiger Funktionen stetig ist.

IS: die Behauptung sei für m bekannt. Dann ist

$$\begin{aligned}
(fg)^{(m+1)} &= D \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(k)} g^{(m-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} D\big(f^{(k)} g^{(m-k)}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \big(f^{(k+1)} g^{(m-k)} + f^{(k)} g^{(m-k+1)}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\right) f^{(k)} g^{(m-k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} f^{(k)} g^{(m-k+1)}.
\end{aligned}$$

Wir haben die Rechenregeln aus Satz 9.8 benutzt, die insbesondere zeigen dass $(fg)^{(m)}$ differenzierbar ist. Die Stetigkeit von $(fg)^{(m+1)}$ folgt aus Stetigkeit der Ableitungen von f und g die in der obigen Formel auftauchen. □

Lemma 9.38 (Verkettung m-mal differezierbarer Funktionen)**.** *Seien $U, \tilde{U} \subseteq \mathbb{K}$ offen. Seien $f : U \to \tilde{U}$ und $g : \tilde{U} \to \mathbb{K}$ Funktionen die m-mal (stetig) differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ auch m-mal (stetig) differnzierbar.*

Es gibt auch eine Formel für die m-te Ableitung der Verkettung, die sogenannte *Formel von Faà di Bruno*. Aus Zeitmangel verzichten wir darauf sie zu zeigen.

Beweis. Per Induktion über m. Für $m = 0$ ist nur im stetigen Fall etwas zu zeigen, und die Stetigkeit der Verkettung ist aus Lemma 7.6 bekannt.

IS: Die Aussage sei nun für ein $m \in \mathbb{N}$ bekannt, und wir betrachten $(m+1)$-mal differenzierbare Funktionen. Nach der Kettenregel für Ableitungen (Satz 9.9) gilt

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) f'.$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind beide Faktoren auf der rechten Seite m-mal (stetig) differenzierbar. Die Behauptung folgt nun aus der Leibnizregel. □

Lemma 9.39 (Umkehrfunktion einer m-mal differenzierbaren Funktion). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^m(I)$ für ein $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $f' > 0$. Dann ist $f^{-1} : f(I) \to I$ ebenfalls m-mal stetig differenzierbar.*

Beweis. Die Bedingung $f' > 0$ impliziert nach Korollar 9.21a dass f streng monoton steigend ist. Nach Proposition 7.28 ist $f(I)$ auch ein offenes Intervall, und die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(I) \to I$ ist streng monoton steigend und stetig.

Wir zeigen die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung f^{-1} per Induktion über $m \geq 1$. IA: Im Fall $m = 1$ wissen wir aus Korollar 9.14 dass f^{-1} differenzierbar ist, und es gilt

$$(f^{-1})'(f(a)) = 1/f'(a).$$

Mit $\operatorname{inv}(x) = 1/x$ bekommen wir

$$(f^{-1})' = \operatorname{inv} \circ f' \circ f^{-1}. \tag{9.5}$$

IS: Die Behauptung sei für ein $m \geq 1$ bekannt. Sei nun $f \in C^{m+1}(I)$. Dann zeigen die Formel (9.5) und die Induktionsvoraussetzung dass $(f^{-1})'$ eine Verkettung von m-mal stetig differenzierbaren Funktionen ist. Nach Lemma 9.38 ist also $(f^{-1})' \in C^m$, also $f^{-1} \in C^{m+1}$. □

[20: 2021-01-25]
[21: 2020-01-27]

9.5.2 Taylor-Polynome

In (9.1) haben wir gesehen dass die Ableitung die beste affin lineare Approximation einer Funktion bestimmt. Ähnlich bestimmen höhere Ableitungen die beste polynomielle Approximation einer Funktion.

Satz 9.40 (Taylor-Polynom mit Lagrangeschem Restglied). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine m-mal differenzierbare Funktion. Für $a, x \in I$ mit $a \neq x$ sei $J = (a, x)$ falls $a < x$ bzw. $J = (x, a)$ falls $x < a$. Dann existiert ein $\xi \in J$ mit*

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{\text{Taylorpolynom vom Grad } m-1 \text{ an der Stelle } a} + \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x-a)^m.$$

Beweis. Für $t \in I$ sei

$$h(t) := \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k.$$

Diese Funktion ist auf I differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} h'(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}\big(f^{(k+1)}(t)(x-t)^k - f^{(k)}(t) \cdot k(x-t)^{k-1}\big) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \mathbf{1}_{k>0}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \\ &= \frac{f^{(m)}(t)}{(m-1)!}(x-t)^{m-1}. \end{aligned}$$

Nun benutzen wir den Mittelwertsatz für zwei Funktionen (Satz 9.18) mit den Funktionen h und $g(t) = (x-t)^m$. Wir erhalten dass es ein $\xi \in J$ gibt mit

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k &= h(x) - h(a) = \frac{g(x) - g(a)}{g'(\xi)} h'(\xi) \\ &= \frac{-(x-a)^m}{-m(x-\xi)^{m-1}} \frac{f^{(m)}(\xi)}{(m-1)!}(x-\xi)^{m-1} = (x-a)^m \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}. \quad \square \end{aligned}$$

Korollar 9.41 (Taylor-Polynom für C^m Funktionen)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^m(I)$. Dann gilt*

$$f(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \in o_{x\to a}(|x-a|^m). \tag{9.6}$$

Beweis. Aus Satz 9.40 folgt

$$\Big| f(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \Big| = \Big| \frac{f^{(m)}(\xi) - f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m \Big|$$

für ein ξ das zwischen a und x liegt. Da $f^{(m)}$ stetig ist, ist der Zähler auf der rechten Seite $o_{x\to a}(1)$. Multiplikation mit $(x-a)^m$ ergibt also eine Funktion die kleinere Ordnung hat als $|x-a|^m$. □

Die Abschätzung (9.6) zeigt dass Taylorpolynome höheren Grades an einer festen Stelle a die Funktion in einer kleinen Umgebung von a immer besser approximieren. Man könnte deshlab hoffen dass die *Taylorreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die Funktion f an der Stelle a auf einer Umgebung von a genau wiedergibt. Dies ist für C^∞ Funktionen im Allgemeinen falsch.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp(-1/x), & x > 0. \end{cases}$$

Da für jedes N stets $\lim_{x\to 0, x>0} x^{-N} \exp(-1/x) = 0$ gilt, sieht man per Induktion

$$D^n f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{p_n(x)}{x^{2n}} \exp(-1/x), & x > 0, \end{cases}$$

wobei p_n ein Polynom ist. Insbesondere verschwinden alle Koeffizienten der Taylorreihe der Funktion f in 0, sodass die Taylorreihe in keiner Umgebung von 0 mit f übereinstimmt.

Lemma 9.42 (Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $a \in I$, $f \in C^2(I)$ mit $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$. Dann hat f in a ein striktes lokales Minimum.*

Beweis. Mit Hilfe von (9.6) schreiben wir

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)h^2/2 + R(h)$$

mit $R(h) = o(|h|^2)$. Sei $\epsilon := f''(a)/4$ und $\delta > 0$ so, dass $|h| < \delta \implies |R(h)| \leq \epsilon|h|^2$. Dann gilt für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h| < \delta$ stets

$$f(a+h) \geq f(a) + f''(a)h^2/2 - \epsilon|h|^2 \geq f(a) + f''(a)h^2/4 > f(a).$$ □

10 Integration

Integration ist eine Verallgemeinerung der Summation und löst viele Probleme, wie z.B. einfache Differentialgleichungen (s. Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung). Intuitiv gesehen führen wir Integration als Methode ein, die Fläche unter einem Graphen zu berechnen, genau genommen definieren wir diese Fläche aber erst durch Integration. Ein Flächen- bzw. Volumenbegriff für allgemeinere Mengen wird in Maßtheorie (Analysis 3) formalisiert.

Wenn Sie das Modulhandbuch genau gelesen haben, wissen Sie dass es 2 Integralbegriffe gibt die in der Analysis 1 behandelt werden könnten, die beide ihre Vor- und Nachteile haben. Wir benutzen das allgemeinere der beiden, nämlich das Riemannsche Integral (bzw. das dazu äquivalente Darboux–Integral), weil es vom Ansatz her direkter ist.

Definition 10.1 (Ober-/Untersumme)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall das aus mehr als einem Punkt besteht. Eine* Zerlegung (engl. partition) *von I ist eine endliche strikt monoton steigende Folge $\mathfrak{Z} = (t_0, \dots, t_J)$ mit $\min I = t_0 < \dots < t_J = \max I$. Für eine beschränkte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von I definieren wir die* Ober- und Untersumme

$$\overline{S}(f, \mathfrak{Z}) := \sum_{j=1}^{J} (t_j - t_{j-1}) \sup_{[t_{j-1}, t_j]} f,$$

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) := \sum_{j=1}^{J} (t_j - t_{j-1}) \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f.$$

Auf der Menge der Zerlegungen eines Intervalls I ist die Mengeninklusion eine partielle Ordnungsrelation (wir identifizieren eine Zerlegung mit der Menge ihrer Teilungspunkte). Eine Zerlegung $\mathfrak{Z}'$ heißt *Verfeinerung* einer Zerlegung $\mathfrak{Z}$ falls $\mathfrak{Z}' \supseteq \mathfrak{Z}$.

Lemma 10.2 (Monotonie der Ober-/Untersummen)**.** *Seien $\mathfrak{Z} = (t_0, \dots, t_J) \subseteq \mathfrak{Z}' = (t'_0, \dots, t'_{J'})$ Zerlegungen von I und $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt*

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \le \underline{S}(f, \mathfrak{Z}') \le \overline{S}(f, \mathfrak{Z}') \le \overline{S}(f, \mathfrak{Z}).$$

Beweis. Die mittelere Ungleichung ist klar. Die beiden äußeren sind ähnlich, wir betrachten die linke. Es reicht den Fall $|\mathfrak{Z}'| = |\mathfrak{Z}| + 1$ zu betrachten, der allgemeine folgt dann per Induktion über $|\mathfrak{Z}'| - |\mathfrak{Z}|$. Sei j der kleinste Index mit $t'_j \neq t_j$. Dann gilt $t'_l = t_l$ für $l < j$ und $t'_{l+1} = t_l$ für $l \ge j$. Damit ist

$$\begin{aligned}\underline{S}(f, \mathfrak{Z}') - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) &= (t'_j - t'_{j-1}) \inf_{[t'_{j-1}, t'_j]} f + (t'_{j+1} - t'_j) \inf_{[t'_j, t'_{j+1}]} f - (t_j - t_{j-1}) \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \\ &\ge \Big((t'_j - t'_{j-1}) + (t'_{j+1} - t'_j) - (t_j - t_{j-1})\Big) \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f(\xi) = 0. \qquad \square\end{aligned}$$

Korollar 10.3. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}'$ Zerlegungen von I. Dann gilt*

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \le \overline{S}(f, \mathfrak{Z}').$$

Beweis. Die Vereinigung $\mathfrak{Z}'' := \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{Z}'$ ist eine gemeinsame Verfeinerung der Zerlegungen $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}'$. Aus Lemma 10.2 folgt dass

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \le \underline{S}(f, \mathfrak{Z}'') \le \overline{S}(f, \mathfrak{Z}'') \le \overline{S}(f, \mathfrak{Z}'). \qquad \square$$

Definition 10.4 (Darboux-Integral)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Das obere und das untere Darboux-Integral von f auf I sind definiert als*

$$\overline{\int_I} f := \inf_{\mathfrak{Z}} \overline{S}(f, \mathfrak{Z}), \qquad \underline{\int_I} f := \sup_{\mathfrak{Z}} \underline{S}(f, \mathfrak{Z}).$$

Die Funktion f heißt Darboux-integrierbar *auf I falls $\overline{\int_I} f = \underline{\int_I} f$. In diesem Fall ist das Darboux-Integral der Funktion f auf $I = [a,b]$ definiert als*

$$\int_I f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t := \overline{\int_I} f = \underline{\int_I} f.$$

Das Zeichen $\int$ ist vom Fraktur-‚s' für „Summe" abgeleitet. Die Notation dt soll eine unendlich kleine Differenz $t_j - t_{j-1}$ darstellen.

Aus Korollar 10.3 folgt dass für beliebige Funktionen f stets

$$\underline{\int_I} f \leq \overline{\int_I} f$$

gilt, sodass die Gleichheitsbedingung $\overline{\int_I} f = \underline{\int_I} f$ zu $\overline{\int_I} f \leq \underline{\int_I} f$ äquivalent ist.

Als nächstes wollen wir eine Charakterisierung der Integrierbarkeit zeigen die der Cauchy-Bedingung für Folgen ähnelt. Dafür definieren wir zuerst für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ die *Länge* $|I| = (b-a)$ falls $I = [a,b]$. Für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ definieren wir die *Oszillation*

$$\operatorname*{osc}_I f := \sup_{\xi,\xi' \in I} |f(\xi) - f(\xi')|.$$

Für ein Intervall I, eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = (t_0 < \cdots < t_J)$ von I, und eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ definieren wir weiterhin die *Fehlerschranke*

$$\Delta(f,\mathfrak{Z}) := \sum_{j=1}^{J} (t_j - t_{j-1}) \operatorname*{osc}_{[t_{j-1},t_j]} f.$$

Für reellwertige Funktionen gilt

$$\Delta(f,\mathfrak{Z}) = \overline{S}(f,\mathfrak{Z}) - \underline{S}(f,\mathfrak{Z}). \tag{10.1}$$

Definition 10.5. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* Riemann-integrierbar *falls*

$$\inf_{\mathfrak{Z}} \Delta(f,\mathfrak{Z}) = 0.$$

Die Definition 10.5 ist allgemeiner als Definition 10.4 und funktioniert ohne Weiteres für Funktionen mit Werten in Banachräumen. Für reellwertige Funktionen sind sie aber äquivalent; deshalb verzichten wir vorerst darauf das zur Definition 10.5 gehörende Integral zu definieren.

Proposition 10.6. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) f ist Darboux-integrierbar,

(ii) f ist Riemann-integrierbar.

Wenn die beiden Aussagen zutreffen, gilt für jede Zerlegung $\mathfrak{Z} = (t_0 < \ldots < t_J)$ von I und eine beliebige Wahl von Zwischenpunkten $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_J)$ *mit $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ stets*

$$\left| \int_I f - S(f,\mathfrak{Z},\xi) \right| \leq \Delta(f,\mathfrak{Z}),$$

wobei

$$S(f,\mathfrak{Z},\vec{\xi}) = \sum_{j=1}^{J} (t_j - t_{j-1}) f(\xi_j)$$

die Riemannsche Summe *mit Zerlegung $\mathfrak{Z}$ und Zwischenpunkten $\vec{\xi}$ ist.*

Ab sofort nennen wir Riemann- und Darboux-integrierbare Funktionen einfach integrierbar.

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Seien $(\underline{\mathfrak{Z}}_n)$ und $(\overline{\mathfrak{Z}}_n)$ Folgen von Partitionen mit $\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, \underline{\mathfrak{Z}}_n) = \sup_{\mathfrak{Z}} \underline{S}(f, \mathfrak{Z})$ bzw. $\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, \overline{\mathfrak{Z}}_n) = \inf_{\mathfrak{Z}} \overline{S}(f, \mathfrak{Z})$. Für die gemeinsame Verfeinerung $\mathfrak{Z}_n := \underline{\mathfrak{Z}}_n \cup \overline{\mathfrak{Z}}_n$ gilt nach Lemma 10.2 stets

$$\underline{S}(f, \underline{\mathfrak{Z}}_n) \leq \underline{S}(f, \mathfrak{Z}_n) \to \underline{\int_I} f, \quad \overline{S}(f, \overline{\mathfrak{Z}}_n) \geq \overline{S}(f, \mathfrak{Z}_n) \to \overline{\int_I} f.$$

Damit bekommen wir

$$\Delta(f, \mathfrak{Z}_n) = \overline{S}(f, \mathfrak{Z}_n) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}_n) \to \overline{\int_I} f - \underline{\int_I} f = 0.$$

(ii) $\implies$ (i): Superadditivität von Infima impliziert

$$\begin{aligned} 0 = \inf_{\mathfrak{Z}}(\overline{S}(f, \mathfrak{Z}) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z})) &\geq \inf_{\mathfrak{Z}} \overline{S}(f, \mathfrak{Z}) + \inf_{\mathfrak{Z}}(-\underline{S}(f, \mathfrak{Z})) \\ &= \inf_{\mathfrak{Z}} \overline{S}(f, \mathfrak{Z}) - \sup_{\mathfrak{Z}} \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) = \overline{\int_I} f - \underline{\int_I} f. \end{aligned}$$

Damit bekommen wir, wie gewünscht, $\overline{\int}_I f \leq \underline{\int}_I f$.

Wenn (i) und (ii) zutreffen, dann gilt für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ und Zwischenpunkte $\vec{\xi}$ stets

$$\{\int_I f, S(f, \mathrm{Z}, \xi)\} \subset [\underline{S}(f, \mathrm{Z}), \underline{S}(f, \mathrm{Z})].$$

Letzteres Intervall hat aufgrund von (10.1) Länge $\Delta(f, \mathrm{Z})$. □

Lemma 10.7. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion $f(x) = c$. Dann ist f integrierbar und es gilt*

$$\int_I f = c|I|.$$

Beweis. Sei $I = [a, b]$. Dann gilt für die Zerlegung $\mathfrak{Z} = (a < b)$ bereits $\Delta(f, \mathfrak{Z}) = 0$. Also ist

$$\int_I f = S(f, \mathfrak{Z}, \{a\}) = c|I|.$$ □

Lemma 10.8. *Jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.*

Beweis. Nach Satz 8.15 ist f gleichmäßig stetig. Das bedeutet dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \epsilon$$

existiert. Sei nun $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung mit $t_j - t_{j-1} < \delta$ (es ist leicht zu sehen dass eine solche Zerlegung existiert). Dann gilt

$$\Delta(f, \mathfrak{Z}) \leq \sum_j (t_j - t_{j-1})\epsilon = |I|\epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ist f auf I Riemann-integrierbar. □

[21: 2020-01-27]

[22: 2021-02-01]

Beispiel. Die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ ist auf $[0, 1]$ nicht integrierbar, weil für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[0, 1]$ aufgrund der Dichtheit von rationalen bzw. irrationalen Zahlen in den reellen Zahlen stets

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) = 0, \quad \overline{S}(f, \mathfrak{Z}) = 1$$

gilt, sodass

$$\underline{\int_I} f = \sup_{\mathfrak{Z}} \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) = 0 \neq 1 = \inf_{\mathfrak{Z}} \overline{S}(f, \mathfrak{Z}) = \overline{\int_I} f.$$

Lemma 10.9. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt und auf I° stetig. Dann ist f auf I integrierbar.*

Beweis. Sei $I = [a,b]$ und f sei durch $M > 0$ beschränkt. Seien $\epsilon > 0$ und $\delta = \min((b-a)/2, \epsilon/(4M))$. Aus Lemma 10.8 wissen wir dass eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[a+\delta, b-\delta]$ mit $\Delta(f,\mathfrak{Z}) < \epsilon/2$ existiert. Sei $\mathfrak{Z}' = \{a\} \cup \mathfrak{Z} \cup b$. Dann gilt

$$\Delta(f,\mathfrak{Z}') = \delta \operatorname*{osc}_{[a,a+\delta]} f + \Delta(f,\mathfrak{Z}) + \delta \operatorname*{osc}_{[b-\delta,b]} f < 4\delta M + \epsilon/2 \leq \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ist f auf I Riemann-integrierbar. □

Lemma 10.10. *Seien $a < b < c$ und $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) f ist auf $[a,c]$ integrierbar,

(ii) f ist auf $[a,b]$ und $[b,c]$ jeweils integrierbar.

Falls die obigen Aussagen zutreffen, dann gilt

$$\int_{[a,c]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f. \tag{10.2}$$

Beweis. (i) $\implies$ (ii): sei $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung von $[a,c]$ mit $\Delta(f,\mathfrak{Z}) < \epsilon$. Sei $\mathfrak{Z}' := \mathfrak{Z} \cup \{b\}$. Mit Lemma 10.2 bekommen wir

$$\Delta(f,\mathfrak{Z}' \cap [a,b]) \leq \Delta(f,\mathfrak{Z}') \leq \Delta(f,\mathfrak{Z}) < \epsilon.$$

Da ϵ beliebig war und $\mathfrak{Z}' \cap [a,b]$ eine Zerlegung von $[a,b]$ ist, ist f auf $[a,b]$ integrierbar. Für das Intervall $[b,c]$ funktioniert das gleiche Argument.

(ii) $\implies$ (i). Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Seien $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}'$ Zerlegungen von $[a,b]$ bzw. $[b,c]$ mit

$$\Delta(f,\mathfrak{Z}) < \epsilon/2, \quad \Delta(f,\mathfrak{Z}') < \epsilon/2.$$

Dann ist $\mathfrak{Z} \cup \mathfrak{Z}'$ eine Zerlegung von $[a,c]$ mit

$$\Delta(f,\mathfrak{Z} \cup \mathfrak{Z}') = \Delta(f,\mathfrak{Z}) + \Delta(f,\mathfrak{Z}') < \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ist f auf $[a,c]$ integrierbar. Für eine beliebige Wahl von Zwischenpunkten $\vec{\xi}$ für die Zerlegung $\mathfrak{Z} \cup \mathfrak{Z}'$ gilt weiterhin

$$\begin{aligned}\Big|\int_{[a,c]} f - \int_{[a,b]} f - \int_{[b,c]} f\Big| &\leq \big|S(f,\mathfrak{Z} \cup \mathfrak{Z}',\vec{\xi}) - S(f,\mathfrak{Z},\vec{\xi}) - S(f,\mathfrak{Z}',\vec{\xi})\big| \\ &\quad + \Delta(f,\mathfrak{Z} \cup \mathfrak{Z}') + \Delta(f,\mathfrak{Z}) + \Delta(f,\mathfrak{Z}') < 0 + \epsilon + \epsilon/2 + \epsilon/2.\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, bekommen wir (10.2). □

Korollar 10.11 (Stückweise stetige Funktionen sind integrierbar)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion die in höchstens endlich vielen Punkten unstetig ist. Dann ist f integrierbar.*

Beweis. Wir spalten I in endlich viele Intervalle in deren Inneren f jeweils stetig ist auf und benutzen Lemma 10.9 auf jedem Teilintervall. □

Für die nächste Aussage brauchen wir das Analog von Lemma 10.2 für Fehlerschranken.

Lemma 10.12 (Monotonie der Fehlerschranke)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{Z}'$ Zerlegungen von I. Dann gilt*

$$\Delta(f,\mathfrak{Z}') \leq \Delta(f,\mathfrak{Z}).$$

Beweis. Es reicht den Fall $|\mathfrak{Z}'| = |\mathfrak{Z}| + 1$ zu betrachten. Mit Notation wie in Lemma 10.2 gilt

$$\begin{aligned}\Delta(f,\mathfrak{Z}) - \Delta(f,\mathfrak{Z}') &= (t_j - t_{j-1}) \operatorname*{osc}_{[t_{j-1},t_j]} f - (t'_j - t'_{j-1}) \operatorname*{osc}_{[t'_{j-1},t'_j]} f - (t'_{j+1} - t'_j) \operatorname*{osc}_{[t'_j,t'_{j+1}]} f \\ &\geq \Big((t_j - t_{j-1}) - (t'_j - t'_{j-1}) - (t'_{j+1} - t'_j)\Big) \operatorname*{osc}_{[t_{j-1},t_j]} f = 0. \quad \square\end{aligned}$$

Nun zeigen wir dass Integration eine lineare Abbildung ist.

Satz 10.13 (Linearität der Integration)**.** *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist die Linearkombination $\alpha f + \beta g$ auch integrierbar, und es gilt*

$$\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g. \tag{10.3}$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Da f, g integrierbar sind, existieren Zerlegungen $\mathfrak{Z}_f, \mathfrak{Z}_g$ mit

$$\Delta(f,\mathfrak{Z}_f) < \epsilon, \quad \Delta(g,\mathfrak{Z}_g) < \epsilon.$$

Sei $\mathfrak{Z} := \mathfrak{Z}_f \cup \mathfrak{Z}_g$. Für jedes Intervall I' folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\operatorname*{osc}_{I'}(\alpha f + \beta g) \leq |\alpha| \operatorname*{osc}_{I'} f + |\beta| \operatorname*{osc}_{I'} g.$$

Das impliziert

$$\Delta(f+g,\mathfrak{Z}) \leq |\alpha|\Delta(f,\mathfrak{Z}) + |\beta|\Delta(g,\mathfrak{Z}) \leq |\alpha|\Delta(f,\mathfrak{Z}_f) + |\beta|\Delta(g,\mathfrak{Z}_g) < (|\alpha| + |\beta|)\epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ist die Linearkombination $\alpha f + \beta g$ Riemann-integrierbar.

Weiterhin gilt, mit der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ wie oben und einer beliebigen Wahl von Zwischenpunkten $\vec{\xi}$, stets

$$\begin{aligned}\Big|\int_I (\alpha f + \beta g) - \alpha \int_I f - \beta \int_I g\Big| &\leq \Big|S(\alpha f + \beta g, \mathfrak{Z}, \vec{\xi}) - \alpha S(f,\mathfrak{Z},\vec{\xi}) - \beta S(g,\mathfrak{Z},\vec{\xi})\Big| \\ &\quad + \Delta(\alpha f + \beta g, \mathfrak{Z}) + |\alpha|\Delta(f,\mathfrak{Z}) + |\beta|\Delta(g,\mathfrak{Z}) \leq 0 + 2(|\alpha| + |\beta|)\epsilon.\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt (10.3). $\square$

Lemma 10.14 (Integration erhält Ordnung)**.** *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $f \leq g$. Dann gilt*

$$\int_I f \leq \int_I g.$$

Beweis. Das folgt direkt aus der Tatsache dass für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von I stets $\underline{S}(f,\mathfrak{Z}) \leq \underline{S}(g,\mathfrak{Z})$ gilt. $\square$

Korollar 10.15 (Mittelwertsatz für Integrale)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $\phi : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stückweise stetig [Korrektur: und beschränkt]. Dann existiert für jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ein $\xi \in I$ mit*

$$\int_I f\phi = f(\xi) \int_I \phi.$$

Beweis. Stückweise Stetigkeit von ϕ impliziert dass ϕ und $f\phi$ R-integrierbar sind.

Seien $m := \min_I f, M := \max_I f$ (das Minimum und Maximum werden nach dem Maximumsatz 8.13 angenommen). Dann gilt

$$m \int_I \phi = \int_I m\phi \leq \int_I f\phi \leq \int_I M\phi = M \int_I \phi.$$

Also existiert ein $s \in [m, M]$ mit $s \int_I \phi = \int_I f\phi$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = s$. $\square$

Satz 10.16 (Dreiecksungleichung für Integrale). *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann is die Funktion $|f|$ auch integrierbar, und es gilt*

$$|\int_I f| \leq \int_I |f|.$$

Beweis. Aus der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt dass für jede Teilmenge $I' \subseteq I$ stets $\operatorname{osc}_{I'}|f| \leq \operatorname{osc}_{I'} f$ gilt. Es folgt dass für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von I stets $\Delta(|f|, \mathfrak{Z}) \leq \Delta(f, \mathfrak{Z})$ gilt. Also ist $|f|$ integrierbar. Die Dreiecksungleichung für Integrale folgt anschließend aus der Ordnungserhaltung (Lemma 10.14):

$$\pm \int_I f = \int_I (\pm f) \leq \int_I |f|. \qquad \square$$

Bemerkung. Der gleiche Beweis zeigt dass wenn f eine R-integrierbare Funktion ist und ϕ eine Lipschitzfunktion, dann ist die Verkettung $\phi \circ f$ auch R-integrierbar.

Man kann sogar zeigen dass $\phi \circ f$ für jede stetige Funktion ϕ R-integrierbar ist. Dies folgt aus der Charakterisierung R-integrierbarer Funktionen die in der Maßtheorie (Analysis 3) gezeigt wird: f ist genau dann R-integrierbar wenn die Menge $\{x \mid f$ in x nicht stetig$\}$ eine *Lebesgue-Nullmenge* ist.

Das ist aber letzlich nicht so wichtig, weil das allgemeinere Lebesgue-Integral bessere Eigenschaften in Bezug auf Verkettung und Grenzwerte hat als das Riemann-Integral.

10.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 10.17 (Hauptsatz für Riemannintegrale). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Für $x \in [a, b]$ sei*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(i) Die Funktion F ist auf $[a, b]$ stetig, auf (a, b) differenzierbar, und $F' = f$.

(ii) Für jede stetige Funktion $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $G' = f$ auf (a, b) gilt $F = G - G(a)$.

Beweis. (i) Für $x \in [a, b)$ und $0 < h < b - x$ gilt

$$\begin{aligned}
\Big|F(x+h) - F(x) - f(x)h\Big| &= \Big|\int_a^{x+h} f(y)\mathrm{d}y - \int_a^x f(y)\mathrm{d}y - \int_x^{x+h} f(x)\mathrm{d}y\Big| && \text{Lemma 10.7} \\
&= \Big|\int_x^{x+h} f(y)\mathrm{d}y - \int_x^{x+h} f(x)\mathrm{d}y\Big| && \text{Lemma 10.10} \\
&= \Big|\int_x^{x+h} (f(y) - f(x))\mathrm{d}y\Big| && \text{Satz 10.13} \\
&\leq \int_x^{x+h} |f(y) - f(x)|\mathrm{d}y && \text{Satz 10.13} \\
&\leq h \sup_{x \leq y \leq x+h} |f(y) - f(x)| && \text{Lemma 10.7} \\
&\in o(h),
\end{aligned}$$

da f stetig ist. Die Abschätzung für negative h geht ähnlich. Damit ist F auf (a, b) differenzierbar und auf $[a, b]$ stetig.

(ii) Da $G' = f = F'$, ist $(F - G)' = 0$. Nach Korollar 9.21 ist $F - G$ eine konstante Funktion. Die Behauptung folgt weil $F(a) = 0$ ist. $\square$

Definition 10.18 (Stammfunktion)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f, F : I \to \mathbb{R}$. Die Funktion F heißt* Stammfunktion von f *falls F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt. In diesem Fall schreibt man auch*

$$\int f = F.$$

Die Stammfunktion ist nicht eindeutig bestimmt, da die Ableitung sich bei der Addition einer Konstante nicht ändert. Die Notation $\int f = F$ müsste also formal „$F \in \int f$" lauten, also F ist Element der Menge der Stammfunktionen von f.

Es ist bequem für reelle Zahlen $a < b$

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

zu definieren. Mit dieser Notation kann man den Hauptsatz für Riemannintegrale (Satz 10.17) wie folgt formulieren: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in I$. Dann ist für jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ die Funktion $F(x) := \int_a^x f$ eine Stammfunktion, und jede weitere Stammfunktion ist von der Form $F + c$. Weitehin gilt für jede Stammfunktion G von f stets

$$\int_a^b f = G(b) - G(a) =: G(x)|_{x=a}^b.$$

Hier sind einige Beispiele von Stammfunktionen. Sie sollten die Korrektheit dieser Tabelle inzwischen nachweisen können.

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$x^a, a \neq -1$	$x^{a+1}/(a+1)$
$1/x$	$\ln x$
$e^{ax}, a \neq 0$	e^{ax}/a
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$1/(\cos x)^2$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
$1/(\sin x)^2$	$-\cot x = -\frac{\cos x}{\sin x}$
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$

[22: 2021-02-01]
[23: 2021-02-03]

10.2 Integrationsmethoden

Eine Stammfunktion zu finden ist in der Regel schwieriger als eine Funktion abzuleiten. Das liegt daran dass es keine Rechenregeln für Integrale von z.B. Produkten oder Verkettungen gibt. Dennoch kann man aus den Rechenregeln für Ableitungen entsprechende Rechenregeln für Integrale gewinnen.

10.2.1 Substitution

Satz 10.19 (Substitutionsformel)**.** *Seien g stetig differenzierbar auf $[a, b]$ und f stetig auf $g([a, b])$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\mathrm{d}t. \tag{10.4}$$

Beweis. Nach dem Zwischenwertsatz ist $I := g([a, b])$ ein Intervall, und nach dem Satz vom Maximum ist dieses Intervall kompakt. Indem wir f konstant über die Grenzen von I hinaus fortsetzen, können wir annehmen dass f auf $\mathbb{R}$ definiert und stetig ist. Sei F eine Stammfunktion von f auf $\mathbb{R}$, d.h., $F' = f$.

Mit der Kettenregel bekommen wir

$$(F \circ g)' = (f \circ g) \cdot g'$$

auf dem Intervall (a, b). Aus dem Hauptsatz für Riemannintegrale (Satz 10.17) mit $G = F \circ g$ folgt dass

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\mathrm{d}t. \qquad \square$$

Man sagt auch dass (10.4) den Variablenwechsel oder Substitution $t = g(x)$ ausdrückt.

Lemma 10.20 (Flächeninhalt des Kreises).

$$\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\mathrm{d}t = \pi/4.$$

Beweis. Wir verwenden die Substitution $t = \sin x$ mit $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, also die Formel (10.4) mit $g(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi/2$, $f(t) = \sqrt{1 - t^2}$. Wir bekommen

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\mathrm{d}t &= \int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/2)} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (\sin x)^2} \cos(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} (\cos(x))^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Es gibt nun mehrere Möglichkeiten dieses Integral zu berechnen. Eine davon benutzt die Subsitution $x = \pi/2 - y$:

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^2\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^0 (\cos(\pi/2 - y))^2(-1)\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^2\mathrm{d}x.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
2\int_0^{\pi/2} (\cos(x))^2\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} (\sin x)^2\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} ((\cos x)^2 + (\sin x)^2)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 1\mathrm{d}x = \pi/2. \qquad \square
\end{aligned}$$

10.2.2 Partielle Integration

Notation 10.21. *Für eine kompaktes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ schreiben wir $C^m(I)$ für die Menge der Funktionen f sodass stetige Funktionen $f_0, \ldots, f_m \in C(I)$ mit $f_0 = f$ und $f_j' = f_{j+1}$ auf I° existieren. In anderen Worten, $C^m(I)$ besteht aus denjenigen Funktionen in $C^m(I^\circ)$ deren Ableitungen $f^{(0)}, \ldots, f^{(m)}$ stetige Fortsetzungen auf I besitzen.*

Satz 10.22 (Partielle Integration)**.** *Seien $f, g \in C^1([a,b])$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Beweis. Folgt aus der Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

und dem Hauptsatz (Satz 10.17). □

Mit Hilfe von Stammfunktionen kann die Regel für partielle Integration wie folgt formuliert werden:

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

Wir betrachten kurz nur zwei der vielen Beispiele von Stammfunktionen die mit Hilfe von partieller Integration gefunden werden können.

Beispiel. Sei $f(x) = x$, $g(x) = e^x$. Dann bekommen wir

$$\int xe^x\mathrm{d}x = xe^x - \int 1 \cdot e^x\mathrm{d}x = xe^x - e^x.$$

Dieses Beispiel fuktioniert weil f' einfacher ist als f.

Beispiel. Sei $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = x$. Dann

$$\int \arcsin(x)\mathrm{d}x = x\arcsin x - \int x\arcsin'(x)\mathrm{d}x,$$

Mit dem Variablenwechsel $t = 1 - x^2$, $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = -2x$, bekommen wir

$$\int x\arcsin'(x)\mathrm{d}x = \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}.$$

Also ist

$$\int \arcsin(x)\mathrm{d}x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

Ein weiteres Beispiel für partielle Integration ist der Fehlerschranke für die Trapezregel. Die Trapezregel ist eines der einfachsten numerischen Integrationsverfahren; sie ist also eine (sehr kleine) Vorschau auf die Numerik-Vorlesung.

Lemma 10.23 (Trapezregel)**.** *Sei $f \in C^2([a,b])$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a) = \int_a^b \frac{(x-a)(b-x)}{2}f''(x)\mathrm{d}x = -(b-a)^3\frac{f''(\xi)}{12}$$

mit einem $\xi \in (a,b)$.

Korollar 10.24. *Sei $f \in C^2([a,b])$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann gilt*

$$\Big|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \Big(\frac{f(a)}{2} + \sum_{v=1}^{n-1} f(a + v\frac{b-a}{n}) + \frac{f(b)}{2}\Big)\frac{b-a}{n}\Big| \leq \frac{(b-a)^3\|f''\|_\infty}{12n^2}.$$

Beweis. Mit Lemma 10.10 spalten wir das Integral wie folgt auf:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{v=1}^{n} \int_{a+(v-1)(a-b)/n}^{a+v(a-b)/n} f(x)\mathrm{d}x.$$

Auf jedem Teilintervall benutzen wir Lemma 10.23 und summieren die erhaltenen Approximationen und Fehlerschranken. □

Beweis der Trapezregel, Lemma 10.23. Für $\phi(x) := (x-a)(b-x)/2$ gilt $\phi' = (b-x)/2 - (x-a)/2$, $\phi'' = -1$. Nach zweimaliger partieller Integration erhalten wir

$$\int f = -\int \phi'' f = -\phi' f + \int \phi' f' = -\phi' f + \phi f' - \int \phi f''.$$

Einsetzen der Integrationsgrenzen liefert

$$\int_a^b f = -\phi' f|_a^b + \phi f'|_a^b - \int_a^b \phi f'' = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \int_a^b \phi f''.$$

Der Mittelwertsatz für Integrale (Korollar 10.15) liefert schließlich

$$\int_a^b \phi f'' = f''(\xi) \int_a^b \phi = f''(\xi) \cdot \frac{(b-a)^3}{12}$$

für ein $\xi \in (a,b)$; die letzte Gleichheit sieht man mit dem Variablenwechsel $x = t(b-a) + a$:

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(x-a)(b-x)}{2} \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_0^1 t(b-a)\cdot(1-t)(b-a)\cdot(b-a)\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^3}{2} \int_0^1 (t-t^2)\mathrm{d}t \\ &= \frac{(b-a)^3}{2}(t^2/2 - t^3/3)|_{t=0}^1 = \frac{(b-a)^3}{2}(1/2-1/3) = \frac{(b-a)^3}{12}. \quad \square\end{aligned}$$

10.2.3 Partialbruchzerlegung

Als Nächstes zeigen wir wie *rationale Funktionen*, d.h., Quotiente von Polynomen, integriert werden können. Wir beginnen mit einem Beispiel in dem alle Schritte auftauchen die im Allgemeinen nötig sind:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^2-1}\mathrm{d}x &= \int 1 + \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = \int 1 + \frac{1}{(x+1)(x-1)}\mathrm{d}x \\ &= \int 1 + \frac{-1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1}\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1), \quad x > 1.\end{aligned}$$

Um eine ähnliche Zerlegung für allgemeine rationale Funktionen zu finden muss man zuerst den Nenner als Produkt linearer Faktoren schreiben. Das ist zwar immer möglich (nach dem Fundamentalsatz der Algebra, der mit Hilfe Komplexer Analysis gezeigt wird), aber nicht immer einfach. Wir nehmen aber an dass uns eine solche Zerlegung schon bekannt ist. Dann lässt sich der Bruch wie folgt zerlegen.

Satz 10.25 (Partialbruchzerlegung). *Seien p, q Polynome mit komplexen Koeffizienten mit* $\deg p < \deg q$ *und* $q(z) = \prod_{j=1}^n (z-z_j)^{m_j}$ *mit paarweise verschiedenen z_j's. Dann existiert eine Zerlegung*

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{jk}}{(z-z_j)^k}.$$

Der Beweis zeigt auch wie man die Zerlegung findet.

Beweis. Wir benutzen Induktion über n. Der Induktionsanfang ist $n = 0$, in diesem Fall besagt die Annahme an Grad von p dass $p = 0$ ist.

Die Behauptung sei für ein n bekannt, wir wollen sie mit $n+1$ an Stelle von n zeigen. Wir benutzen nun Induktion über m_{n+1}. Im Fall $m_{n+1} = 0$ benutzen wir die Aussage mit n Nullstellen. Die Aussage sei nun für ein m_{n+1} bekannt, und wir wollen sie mit $m_{n+1} + 1$ an Stelle von m_{n+1} zeigen, also für

$$q(z) = \prod_{j=1}^n (z-z_j)^{m_j} \cdot (z-z_{n+1})^{m_{n+1}+1}.$$

Setze dafür

$$a_{n+1,m_{n+1}+1} := \frac{p(z_{n+1})}{\prod_{j=1}^{n}(z_{n+1}-z_j)^{m_j}}.$$

Dann gilt

$$\frac{p(z)}{q(z)} - \frac{a_{n+1,m_{n+1}+1}}{(z-z_{n+1})^{m_{n+1}+1}} = \frac{p(z) - p(z_{n+1})\frac{\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)^{m_j}}{\prod_{j=1}^{n}(z_{n+1}-z_j)^{m_j}}}{q(z)}.$$

Der Zähler ist ein Polynom das in $z = z_{n+1}$ verschwindet, und aus der Linearen Algebra wissen Sie dass man es deshalb faktorisieren kann:

$$p(z) - \frac{\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)^{m_j}}{\prod_{j=1}^{n}(z_{n+1}-z_j)^{m_j}} = (z-z_{n+1})\tilde{p}(z)$$

mit $\deg \tilde{p} = \deg p - 1$. Damit bekommen wir

$$\frac{p(z)}{q(z)} - \frac{a_{n+1,m_{n+1}+1}}{(z-z_{n+1})^{m_{n+1}+1}} = \frac{(z-z_{n+1})\tilde{p}(z)}{q(z)} = \frac{\tilde{p}(z)}{\prod_{j=1}^{n+1}(z-z_j)^{m_j}}.$$

Auf diese rationale Funktion kann man die Induktionshypothese anwenden. □

10.3 Vertauschung von Grenzwert und Integral

In diesem Abschnitt geben wir eine hinreichende Bedingung für die Gleichheit

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x. \tag{10.5}$$

Beispiel. Sei $f_n(x) := \max(n - n^2|x-1/n|, 0)$ (der Graph dieser Funktion ist ein Dreick mit Breite $2/n$ und Höhe n). Dann gilt $f_n \to 0$ punktweise, aber

$$\int_0^2 f_n(x)\mathrm{d}x = 1 \not\to 0.$$

Wir sehen also dass punktweise Konvergenz nicht ausreicht um (10.5) zu garantieren.

Satz 10.26. *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $(f_n)_n$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$. Man nehme an dass die Funktionen f_n gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergieren. Dann ist die Funktion f auch Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x. \tag{10.6}$$

Beweis. Für jede Zerlegung $\mathfrak{Z} = (t_0 < \ldots < t_J)$ von $[a,b]$ und jedes n gilt

$$\begin{aligned}\Delta(f,\mathfrak{Z}) = \sum_{j=1}^{J}(t_j - t_{j-1}) \operatorname*{osc}_{[t_{j-1},t_j]} f \le \sum_{j=1}^{J}(t_j - t_{j-1})(2\|f-f_n\|_\infty + \operatorname*{osc}_{[t_{j-1},t_j]} f_n) \\ = 2(b-a)\|f-f_n\|_\infty + \Delta(f_n,\mathfrak{Z}).\end{aligned}$$

Um zu sehen dass f R-integrierbar ist wählen wir für ein $\epsilon > 0$ zuerst n so groß, dass $2(b-a)\|f-f_n\|_\infty < \epsilon/2$ und dann $\mathfrak{Z}$ so fein, dass $\Delta(f_n,\mathfrak{Z}) < \epsilon/2$. Wir erhalten damit $\Delta(f,\mathfrak{Z}) < \epsilon$.

Schließlich gilt nach der Dreiecksungleichung für Integrale

$$|\int_a^b f - \int_a^b f_n| \le \int_a^b |f - f_n| \le (b-a)\|f-f_n\|_\infty,$$

und da die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, folgt (10.6). □

Lemma 10.27 (Logarithmusreihe). *Für $x \in (-1,1)$ gilt*

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

Beweis. Da $\log(1+t)$ die Stammfunktion von $1/(1+t)$ ist, folgt aus der Formel für die geometrisce Reihe

$$\log(1+x) = \log(1+t)|_{t=0}^{x} = \int_0^x \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k \mathrm{d}t.$$

Die Reihe $\sum_k^\infty (-t)^k$ konvergiert gleichmäßig auf $[-|x|, |x|]$, sodass wir Satz (10.5) anwenden können. Es folgt

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-t)^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(-t)^{k+1}}{k+1}\Big|_{t=0}^{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(-x)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}. \qquad \square$$

[23: 2021-02-03]

[24: 2021-02-08]

10.4 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir Integrale beschränkter Funktionen auf kompakten Intervallen definiert. Nun entfernen wir diese Einschränkungen teilweise.

Definition 10.28 (uneigentliches Integral). *Seien $a < c < b$ in $\overline{\mathbb{R}}$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion die auf jedem kompakten Teilintervall Riemann-integrierbar ist. Dann definieren wir*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{\tilde{a} \to a+} \int_{\tilde{a}}^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\tilde{b} \to b-} \int_c^{\tilde{b}} f(x)\mathrm{d}x,$$

falls beide Grenzwerte in $\mathbb{R}$ existieren.

Da Integrale auf Teilintervalle aufgeteilt werden können (Lemma 10.10), hängt diese Definition nicht von der Wahl von c ab.

Wenn außerdem $a > -\infty$ und f auf $[a,c]$ Riemann-integrierbar ist (und insbesondere durch M beschränkt), dann folgt aus dem gleichen Lemma und der Dreiecksungleichung für Integrale

$$\Big|\int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_{\tilde{a}}^c f(x)\mathrm{d}x\Big| = \Big|\int_a^{\tilde{a}} f(x)\mathrm{d}x\Big| \le (\tilde{a} - a)M,$$

sodass

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\tilde{b} \to b-} \int_c^{\tilde{b}} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\tilde{b} \to b-} \int_a^{\tilde{b}} f(x)\mathrm{d}x.$$

Eine analoge Vereinfachung ist an der rechten Integrationsgrenze c möglich, und wir sehen dass das uneigentliche Integral mit dem bestimmten Riemann-Integral übereinstimmt falls $[a,b]$ kompakt und f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist.

Beispiel. Sei $s > 1$. Dann gilt

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \lim_{R \to \infty} \int_1^R \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \lim_{R \to \infty} \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\Big|_1^R = \lim_{R \to \infty} \frac{R^{-s+1} - 1}{-s+1} = \frac{1}{s-1}. \tag{10.7}$$

Beispiel. Sei $s > -1$. Dann gilt

$$\int_0^1 x^s \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 x^s \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{x^{s+1}}{s+1}\Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1-\epsilon^{s+1}}{s+1} = \frac{1}{s+1}. \tag{10.8}$$

Die nächste Aussage ist analog zum Majorantenkriterium für Reihen.

Proposition 10.29 (Majorantenkriterium für Integrale). *Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$. Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ integrierbar auf jedem kompakten Teilintervall mit $|f| \leq g$. Wenn das uneigentliche Integral $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ existiert, dann existiert auch das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.*

Beweis. Sei $a < c < b$. Für $b', b'' \in (c, b)$ gilt

$$\begin{aligned}\Big|\int_c^{b'} f(x)\mathrm{d}x - \int_c^{b''} f(x)\mathrm{d}x\Big| &= \Big|\int_{b'}^{b''} f(x)\mathrm{d}x\Big| \\ &\leq \Big|\int_{b'}^{b''} g(x)\mathrm{d}x\Big| = \Big|\int_c^{b'} g(x)\mathrm{d}x - \int_c^{b''} g(x)\mathrm{d}x\Big|. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Analog dazu, wie Konvergenz von Folgen in vollständigen Räumen durch die Cauchy-Eigenschaft charakterisiert wird, kann auch Konvergenz von Funktionen auf metrischen Räumen charakterisiert werden: wenn X, Y metrische Räume sind, Y vollständig, $A \subseteq X$, und $a \in \overline{A}$, dann existiert $\lim_{x\to a, x\in A} f(x)$ genau dann, wenn gilt

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in B_\delta(a) \cap A) d(f(x'), f(x')) < \epsilon. \tag{10.10}$$

Wir verzichten auf vertiefte Diskussion dieser Äquivalenz weil sie einerseits genauso gezeigt wird wie im Fall von Folgen, sodass kein großer Erkenntnisgewinn entsteht, und andererseits nur ein Spezialfall der allgemeineren Theorie von Filtern oder Netzen ist die in Topologie behandelt wird.

Wenn wir die Eigenschaft (10.10) mit „f ist Cauchy in a" bezeichnen, dann zeigt (10.9) dass aus „$b' \mapsto \int_c^{b'} g(x)\mathrm{d}x$ ist Cauchy in b" stets „$b' \mapsto \int_c^{b'} f(x)\mathrm{d}x$ ist Cauchy in b" folgt. □

Als Beispiel für den Umgang mit uneigentlichen Integralen besprechen wir kurz einige Eigenschaften der Γ-Funktion, die die Fakultät auf nicht-ganzzahlige Argumente verallgemeinert. Diese Funktion wird in der komplexen Analysis tiefer untersucht.

Definition 10.30. *Für $x > 0$ sei*

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

Die Konvergenz des uneigentlichen Integrals das Γ definiert folgt aus dem Majorantenkriterium und den Beispielen (10.7) und (10.8), weil

$$t^{x-1}e^{-t} \leq \begin{cases} t^{x-1}, & t \leq 1, \\ t^{x-1}/(t^{\lceil x\rceil+1}/(\lceil x\rceil+1)!), & t \geq 1. \end{cases}$$

Weiterhin gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty} (-e^{-t})|_0^R = \lim_{R\to\infty} (-e^{-R} + e^{-0}) = 1.$$

Für jedes $x > 0$ bekommen wir weiterhin mit Hilfe von partieller Integration

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^x e^{-t}\mathrm{d}t &= \lim_{R\to\infty} t^x(-e^{-t})|_{t=0}^R - \int_0^R x t^{x-1}(-e^{-t})\mathrm{d}t \\ &= \lim_{R\to\infty} (-R^x e^{-R} + 0) + x\int_0^R t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

Per Induktion folgt nun dass für $n \in \mathbb{N}$ stets $n! = \Gamma(n+1)$ gilt.

Als Nächstes zeigen wir die *logarithmische Konvexität* von Γ. Wir nehmen die Untersuchung von Γ zum Anlass um eine extrem nützliche Umgleichung zu zeigen.

Lemma 10.31 (Hölderungleichung für Summen). *Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_J \in (0,1]$ mit $\sum_{j=1}^J \lambda_j = 1$. Für jedes j sei $(x_{j,n})_{n=1}^N$ eine endliche Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^N \prod_{j=1}^J x_{j,n}^{\lambda_j} \leq \prod_{j=1}^J \Big(\sum_{n=1}^N x_{j,n}\Big)^{\lambda_j}.$$

Der Spezialfall $J = 2, \lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ ist die Cauchy–Schwarz-Ungleichung für Summen, Lemma 5.4.

Beweis. ObdA $X_j := \sum_{n=1}^N x_{j,n} \neq 0$ (sonst verschwinden beide Seiten). Sei $\tilde{x}_{j,n} := x_{j,n}/X_j$, dann folgt aus der Konkavität des Logarithmus (Blatt 11, Aufgabe 5)

$$\sum_{n=1}^N \prod_{j=1}^J \tilde{x}_{j,n}^{\lambda_j} \leq \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \lambda_j \tilde{x}_{j,n} = \sum_{n=1}^N \lambda_j = 1.$$

Multiplizieren dieser Ungleichung mit $\prod_{j=1}^J X_j^{\lambda_j}$ ergibt die Behauptung. □

Proposition 10.32 (Hölderungleichung für Integrale). *Seien λ_j wie in Lemma 10.31, $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f_1, \dots, f_J : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetige Funktionen. Dann gilt*

$$\int_I \prod_{j=1}^J f_j^{\lambda_j} \leq \prod_{j=1}^J \Big(\int_I f_j\Big)^{\lambda_j}.$$

Bemerkung. Nach einem weiteren Grenzübergang bekommt man die gleiche Aussage auch für uneigentliche Integrale.

Beweis. Sei $\mathfrak{Z} = (t_0 < \cdots < t_K)$ eine Zerlegung von I und $\vec{\xi}$ eine Wahl von Zwischenpunkten für $\mathfrak{Z}$. Für die Riemannschen Summen folgt aus Lemma 10.31

$$\begin{aligned} S\Big(\prod_{j=1}^J f_j^{\lambda_j}, \mathfrak{Z}, \vec{\xi}\Big) &= \sum_k (t_k - t_{k-1}) \prod_{j=1}^J f_j(\xi_k)^{\lambda_j} = \sum_k \prod_{j=1}^J (t_k - t_{k-1})^{\lambda_j} f_j(\xi_k)^{\lambda_j} \\ &\leq \prod_{j=1}^J \Big(\sum_k (t_k - t_{k-1}) f_j(\xi_k)\Big)^{\lambda_j} = \prod_{j=1}^J S(f_j, \mathfrak{Z}, \vec{\xi})^{\lambda_j}. \end{aligned}$$

Da die Zerlegung so gewählt werden kann dass diese Summen die jeweiligen Integrale beliebig gut approximieren, folgt die Ungleichung für Integrale. □

Korollar 10.33. *Die Funktion $x \mapsto \ln \Gamma(x)$ ist auf $\mathbb{R}_{>0}$ konvex.*

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\lambda \in (0,1)$. Dann folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda x + (1-\lambda) y) &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^{\lambda x + (1-\lambda) y - 1} e^{-t} \mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty} \int_0^R (t^{x-1} e^{-t})^{\lambda} (t^{x-1} e^{-t})^{1-\lambda} \mathrm{d}t \\ &\leq \lim_{R\to\infty} \Big(\int_0^R t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t\Big)^{\lambda} \Big(\int_0^R t^{y-1} e^{-t} \mathrm{d}t\Big)^{1-\lambda} = \Gamma(x)^{\lambda} \Gamma(y)^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Die Gehauptung folgt wenn man auf beide Seiten dieser Ungleichung den Logarithmus anwendet. □

Der *Satz von Bohr–Mollerup* (den wir nicht zeigen werden) besagt dass Γ die einzige log-konvexe Funktion auf $\mathbb{R}_{>0}$ mit $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ist.

Eine weitere interessante Anwendung der Hölder-Ungleichung ist die Tatsache dass p-Normen Normen sind. Für $v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ und $p \in (0, \infty)$ definiere

$$\|v\|_p := \Big(\sum_{j=1}^N |v_j|^p\Big)^{1/p}.$$

Lemma 10.34 (Minkowski-Ungleichung für Summen). *Für $1 \le p < \infty$ und $v, w \in \mathbb{R}^N$ gilt*

$$\|v + w\|_p \le \|v\|_p + \|w\|_p.$$

Beweis. Die Hölder-Ungleichung mit $\lambda_1 = (p-1)/p$ und $\lambda_2 = 1/p$ liefert

$$\begin{aligned}
\|v+w\|_p^p &= \sum_j |v_j + w_j|^{p-1} |v_j + w_j| \\
&\le \sum_j |v_j + w_j|^{p-1} |v_j| + \sum_j |v_j + w_j|^{p-1} |w_j| \\
&\le \Big(\sum_j |v_j + w_j|^p\Big)^{(p-1)/p} \Big(\sum_j |v_j|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_j |v_j + w_j|^p\Big)^{(p-1)/p} \Big(\sum_j |w_j|^p\Big)^{1/p} \\
&= \|v+w\|_p^{p-1} \|v\|_p + \|v+w\|_p^{p-1} \|w\|_p.
\end{aligned}$$

Wenn $\|v + w\|_p \neq 0$, dann kann man kürzen, und ansonsten ist die behauptete Ungleichung trivial erfüllt. □

Der gleiche Beweis funktioniert auch für Riemann-Integrale (und später, allgemeiner, Lebesgue-Integrale): für stetige Funktionen f, g auf einem kompakten Intervall I gilt

$$\Big(\int_I |f+g|^p\Big)^{1/p} \le \Big(\int_I |f|^p\Big)^{1/p} + \Big(\int_I |g|^p\Big)^{1/p}.$$

[24: 2021-02-08]

[25: 2021-02-10]

11 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Ein wichtiges Ziel der Analysis ist das Lösen von Differentialgleichungen.

Der Hauptsatz der Integralrechnung kann als Lösung des *Anfangswertproblems*

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = h(t), \quad f(0) = f^0, \tag{11.1}$$

wobei $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ gegeben und stetig, und $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und unbekannt, aufgefasst werden. Das bestimmte Integral

$$f(t) = f^0 + \int_0^t h(s)\mathrm{d}s$$

ist nach Satz 10.17 nämlich eine Lösung von (11.1).

11.1 Existenz von Lösungen von Anfangswertproblemen

Nicht jede Differentialgleichung besitzt eine Lösung. Es gibt z.B. keine Funktion f mit $f'(t) = \operatorname{sign}(t)$. In diesem Abschnitt zeigen wir ein recht allgemeines Existenzkriterium für Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Dafür konstruieren wir approximative Lösungen und zeigen dass sie zu einer echten Lösung konvergieren. Zuerst entwickeln wir ein Werkzeug zur Findung konvergenter Funktionenfolgen.

Definition 11.1. *Seien X, Y metrische Räume und $a \in X$. Eine Menge $\mathcal{F}$ von Funktionen $f : X \to Y$ heißt* gleichgradig stetig *in a falls*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall f \in \mathcal{F}, x \in B_\delta(a)) d(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Die Menge $\mathcal{F}$ heißt gleichgradig stetig *falls sie in jedem $a \in X$ gleichgradig stetig ist.*

Der Unterschied zur Definition von Stetigkeit ist also dass das gleiche δ für alle f funktioniert.

Satz 11.2 (Arzelà–Ascoli auf kompakten Räumen)**.** *Seien X, Y kompakte metrische Räume und $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ eine gleichgradig stetige Menge. Dann ist $\mathcal{F}$ mit der Supremumsmetrik total beschränkt.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ und sei $Y_\epsilon \subseteq Y$ eine endliche ϵ-dichte Teilmenge (d.h., $Y = \cup_{y \in Y_\epsilon} B_\epsilon(y)$). Für jedes $x \in X$ sei $\delta(x) > 0$ wie in der Definition der gleichgradigen Stetigkeit. Dann ist $X = \cup_{x \in X} B_{\delta(x)}(x)$ eine offene Überdeckung, und da X kompakt ist existiert eine endliche Teilmenge $X_\epsilon \subseteq X$ mit $X = \cup_{a \in X_\epsilon} B_{\delta(a)}(a)$. Es folgt dass

$$\mathcal{F} = \bigcup_{g : X_\epsilon \to Y_\epsilon} \mathcal{F}_g, \quad \mathcal{F}_g := \{f \in \mathcal{F} \mid \sup_{a \in X_\epsilon} d(f(a), g(a)) < \epsilon\}.$$

Für eine feste Funktion $g : X_\epsilon \to Y_\epsilon$, Funktionen $f, f' \in \mathcal{F}_g$, und $x \in X$ sei $a \in X_\epsilon$ so, dass $d(x, a) < \delta(a)$. Dann gilt

$$d(f(x), f'(x)) \leq d(f(x), f(a)) + d(f(a), g(a)) + d(g(a), f'(a)) + d(f'(a), f'(x)) < 4\epsilon.$$

Also haben wir $\mathcal{F}$ durch endlich viele Mengen $\mathcal{F}_g$ von Durchmesser

$$\operatorname{diam} \mathcal{F}_g := \sup_{f, f' \in \mathcal{F}_g} d_\infty(f, f') = \sup_{f, f' \in \mathcal{F}_g} \sup_{x \in X} d(f(x), f'(x)) \leq 4\epsilon$$

überdeckt. Da ϵ beliebig war, ist $\mathcal{F}$ total beschränkt. □

Satz 11.3 (Peano-Existenzsatz)**.** *Sei $f^0 \in \mathbb{R}$ und $g : [0, T] \times \bar{B}_r(f^0) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $T' \in (0, T]$ sodass das Anfangswertproblem*

$$f'(t) = g(t, f(t)), \quad f(0) = f^0 \tag{11.2}$$

eine Lösung $f \in C^1([0, T'])$ besitzt.

Beweis. Nach dem Maximumsatz (Satz 8.13) ist g beschränkt. Sei $M > 0$ eine obere Schranke für g. Definiere $T' := \min(T, r/M)$. Wir können T verkleinern und annehmen dass $T = T'$. Die Verkleinerung des Zeitintervalls ist nötig damit $f(t)$ im Definitionsbereich von h bleibt.

Wir benutzen das *Euler-Verfahren* um approximative Lösungen der Gleichung (11.2) zu konstruieren. Für einen reellen Parameter $h > 0$ konstruieren wir f_h beginnend mit $f_h(0) := f^0$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in (nh, (n+1)h] \cap [0, T]$ sei rekursiv $f_h(x) := f_h(nh) + (x - nh) g(nh, f_h(nh))$. Da g durch M beschränkt ist, ist f_h Lipschitz-stetig mit Konstante M. Insbesondere gilt $|f_h(t) - f_h(0)| \leq Mt$, sodass $g(nh, f_h(nh))$ in der obigen Konstruktion Sinn macht.

Die Funktionenmenge $\{f_h \mid h > 0\}$ ist gleichgradig stetig (man wähle $\delta = \epsilon/M$ in der Definition der gleichgradigen Stetigkeit). Insbesondere besitzt die Folge $(f_{1/m})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Teilfolge im Funktionenraum $C([0,T],\bar{B}_r(f^0))$. Dieser Funktionenraum ist nach Satz 7.20 vollständig, sodass diese Teilfolge zu einem Grenzwert $f \in C([0,T])$ konvergiert.

Wir werden zeigen dass f die Gleichung (11.2) erfüllt. Ein Problem dabei ist dass wir nicht einmal wissen ob f differenzierbar ist. Deshalb ist es nützlich die Gleichung (11.2) mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Integralrechnung in die äquivalente Form

$$f(t) = f^0 + \int_0^t g(s, f(s))\mathrm{d}s \tag{11.3}$$

zu bringen. Diese Integralgleichung hat den Vorteil dass wir nur wissen müssen dass f stetig ist um beide Seiten zu definieren.

Für die approximativen Lösungen verwenden wir die entsprechende Integraldarstellung

$$f_h(t) = f^0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{[0,t]\cap[nh,(n+1)h]} g(nh, f_h(nh))\mathrm{d}s. \tag{11.4}$$

Da die Funktion g auf einer kompakten Menge definiert ist, ist sie nach Satz 8.15 gleichmäßig stetig. Für jedes $\epsilon > 0$ existiert also ein $\delta \in (0,\epsilon)$ mit

$$(|s-s'| < \delta \wedge |x-x'| < \delta) \implies |g(s,x) - g(s',x')| < \epsilon.$$

Sei außerdem $h \in (0,\delta)$ mit

$$\|f - f_h\|_\infty + Mh < \delta.$$

Indem wir die Integraldarstellung (11.4) der entsprechenden approximativen Lösung f_h einsetzen, bekommen wir

$$\begin{aligned}
&\Big|f(t) - f^0 - \int_0^t g(s,f(s))\mathrm{d}s\Big| \\
&\le |f(t) - f_h(t)| + |f^0 - f^0| + \Big|\int_0^t g(s,f(s))\mathrm{d}s - \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{[0,t]\cap[nh,(n+1)h]} g(nh, f_h(nh))\mathrm{d}s\Big| \\
&\qquad \le |f - f_h|_\infty + 0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big|\int_{[0,t]\cap[nh,(n+1)h]} (g(s,f(s)) - g(nh, f_h(nh)))\mathrm{d}s\Big|. \qquad (11.5)
\end{aligned}$$

Nach der Wahl von h gilt für alle $s \in [0,t] \cap [nh,(n+1)h]$ stets $|s - nh| \le h < \delta$ und

$$|f(s) - f_h(nh)| \le |f(s) - f_h(s)| + |f_h(s) - f_h(nh)| \le \|f - f_h\|_\infty + Mh < \delta.$$

Nach der Wahl von δ bekommen wir $|g(s,f(s)) - g(nh, f_h(nh))| < \epsilon$. Die Dreiecksungleichung für Integrale liefert nun

$$(11.5) \le \epsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{[0,t]\cap[nh,(n+1)h]} \epsilon\mathrm{d}s = \epsilon(1+t).$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, bekommen wir die Integralgleichung (11.3). □

Unter den Voraussetzungen von Satz 11.3 muss die Lösung nicht eindeutig sein. Ein typisches Beispiel ist $g(t,x) = 2\sqrt{x}$: das Anfangswertproblem

$$f'(t) = 2\sqrt{f(t)}, \quad t > 0, \quad f(0) = 0$$

hat die Lösungen $f(t) = 0$ und $f(t) = t^2$. In Analysis 2 werden Sie sehen unter welchen Voraussetzungen das Anfangswertproblem (11.2) eine *eindeutige* Lösung besitzt, was bei der Beschreibung physikalischer Systeme wünschenswert ist.

Das oben beschriebene Euler-Verfahren für die Konstruktion approximativer Lösungen ist von geringer praktischer Relevanz, mit zusätzlichen Einschränkungen an die Funktion g lassen sich viel bessere Verfahren finden. Dafür verweise ich auf die Numerik-Vorlesungen.

11.2 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Literatur: Königsberger, Kapitel 13.

Die Lösungen der meisten Differentialgleichungen können nicht in Termen einfacherer Operationen, wie z.B. Integration, geschrieben werden. In diesem Abschnitt stelle ich eine Klasse von Differentialgleichungen vor für die eine solche Darstellung existiert.

Satz 11.4. *Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $g : I \to \mathbb{R}$, $h : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, und $t^0 \in I, f^0 \in J$. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$f'(t) = g(t)h(f(t)), \quad f(t^0) = f^0 \tag{11.6}$$

eine Lösung in einer Umgebung I' von t^0, also eine Funktion $f \in C^1(I')$ für die auf dem gesamten Definitionsbereich (11.6) *erfüllt.*

„Formal gesehen" (so bezeichnet man in der Analysis algebraische Manipulationen die durchgeführt werden ohne Konvergenz nachzuweisen) funktioniert die Lösung so: die Gleichung (11.6) lässt sich schreiben als

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = g(t)h(f) \iff \frac{\mathrm{d}f}{h(f)} = g(t)\mathrm{d}t \iff \int_{f^0}^{f(t)} \frac{\mathrm{d}\eta}{h(\eta)} = \int_{t^0}^{t} g(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Damit haben wir schon mal einen Kandidaten für eine Lösung, müssen aber noch überprüfen dass wir tatsächlich so eine Lösung definieren können.

Beweis. Wenn $h(f^0) = 0$, dann ist $f \equiv f^0$ eine Lösung. Wir können also $h(f^0) \neq 0$ annehmen, und in diesem Fall J so verkleinern, dass h nirgendwo auf J verschwindet. Sei nun

$$G(t) := \int_{t^0}^{t} g(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad H(s) := \int_{f^0}^{s} \frac{\mathrm{d}\eta}{h(\eta)}.$$

Die Funktionen G, H sind nach dem Hauptsatz der Differentialrechnung differentierbar. Da h den Wert 0 nicht annimmt, ist h nach dem Zwischenwertsatz entweder überall strikt positiv oder überall strikt negativ. In beiden Fällen ist H strikt monoton, und besitzt Korollar 9.14 eine differenzierbare Umkehrfunktion.

Wir behaupten dass $f(t) := H^{-1}(G(t))$ eine Lösung von (11.6) ist. Der Anfangswert ist $f(t^0) = H^{-1}(G(t^0)) = H^{-1}(0) = f^0$. Die Differentialgleichung lässt sich mit der Kettenregel überprüfen:

$$f'(t) = (H^{-1})'(G(t))G'(t) = \frac{G'(t)}{H'(H^{-1}(G(t)))} = \frac{g(t)}{h(f(t))}. \qquad \square$$

Beispiel (Logistisches Wachstum). Die Gleichung $f'(t) = f(t)(1-f(t))$ modelliert einen Wachstumsprozess mit begrenzten Ressourcen. Sei $t^0 = 0$ und $f^0 \in (0,1)$. Wenn wir im Beweis des Satzes 11.4 die Funktionen $g(t) = 1$ und $h(\eta) = \eta(1-\eta)$ einsetzen, bekommen wir mit Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} G(t) = t, \quad H(s) = \int_{f^0}^{s} \frac{\mathrm{d}\eta}{\eta(1-\eta)} &= \int_{f^0}^{s} \Big(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{1-\eta}\Big)\mathrm{d}\eta \\ &= \ln\eta - \ln(1-\eta)|_{\eta=f^0}^{s} = -\ln(1/s-1) - \ln\frac{f^0}{1-f^0}, \end{aligned}$$

$$-\ln(1/f(t)-1) - \ln\frac{f^0}{1-f^0} = G(t) = t, \quad 1/f(t)-1 = e^{-t}\frac{1-f^0}{f^0}, \quad f(t) = \frac{1}{1+\frac{1-f^0}{f^0}e^{-t}}.$$