Aufgabe 1 (Taylorpolynome von Polynomen)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion vom Grad $n \in \mathbb{N}$, d.h., p besitzt die Darstellung

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k, \qquad x \in \mathbb{R},$$

wobei $c_k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle $x, a \in \mathbb{R}$ gilt

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Lösung. Für $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ existiert nach Satz 9.40 ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{p^{(m)}(\xi)}{m!}(x-a)^m.$$

Aber da p ein Polynom vom Grad n ist, gilt für alle $m > n$ dass $p^{(m)} = 0$. Setzen wir also $m = n+1$, dann folgt die Behauptung direkt. □

Aufgabe 2 (Taylorpolynome)**.** Berechnen Sie für folgende offene Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ und Punkte $a \in I$ das Taylorpolynom zweiten Grades von f an der Stelle a.

(a) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin x$, $a = \pi/2$.

(b) $I = (-1, 1)$, $f(x) = \arcsin x$, $a = 0$.

(c) $I = (0, \infty)$, $f(x) = \ln(x^2 + x)$, $a = 1$.

Lösung. (a) Wir berechnen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin x + x^2 \cos x, \\ f''(x) &= 2 \sin x + 2x \cos x + 2x \cos x - x^2 \sin x = (2 - x^2) \sin x + 4x \cos x. \end{aligned}$$

Für $a = \pi/2$ ist $\sin a = 1$ und $\cos a = 0$, und es folgt

$$f(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4}, \qquad f'(\pi/2) = \pi, \qquad f''(\pi/2) = 2 - \frac{\pi^2}{4}.$$

Dann ist das Taylorpolynom zweiten Grades von f an der Stelle a gegeben durch

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{\pi^2}{4} + \pi\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) + \frac{1}{2}\Big(2 - \frac{\pi^2}{4}\Big)\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2 = \Big(1 - \frac{\pi^2}{8}\Big)x^2 + \frac{\pi^3}{8}x - \frac{\pi^4}{32}.$$

(b) Die Ableitung von $f = \arcsin$ ist auf $(-1, 1)$ gegeben durch (Übungsblatt 11, Aufgabe 4(e))

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Wir berechnen zunächst mit der Kettenregel

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(1 - x^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-3/2}(-2x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}^3}.$$

An der Stelle $a = 0$ gilt dann

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 0.$$

Dann ist das Taylorpolynom zweiten Grades von f an der Stelle $a = 0$ gegeben durch

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = 0 + x + 0 = x.$$

(c) Mit der Kettenregel und der Quotientenregel berechnen wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x+1}{x^2+x}, \\ f''(x) &= \frac{2(x^2+x)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x)^2} = -\frac{2x^2+2x+1}{(x^2+x)^2}. \end{aligned}$$

An der Stelle $a = 1$ gilt dann

$$f(1) = \ln 2, \qquad f'(1) = \frac{3}{2}, \qquad f''(1) = -\frac{5}{4}.$$

Dann ist das Taylorpolynom zweiten Grades von f an der Stelle $a = 1$ gegeben durch

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \ln 2 + \frac{3}{2}(x-1) - \frac{5}{8}(x-1)^2 = -\frac{5}{8}x^2 + \frac{11}{4}x + \ln 2 - \frac{17}{8}. \qquad \square$$

Aufgabe 3 (Extremstellen)**.** Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremstellen der Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \frac{5}{2}\ln x + (x-3)^2.$$

Lösung. Wir berechnen zuerst die erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{5}{2x} + 2(x-3).$$

Dann ist $f'(x) = 0$ genau dann wenn $2x^2 - 6x + \frac{5}{2} = 0$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$x_\pm = \frac{1}{4}\left(6 \pm \sqrt{36-20}\right) = \frac{1}{2}(3 \pm 2).$$

Die einzige Nullstelle von f' auf $(0,1]$ ist also in $x_- = \frac{1}{2}$. Die zweite Ableitung von f ist gegeben durch

$$f''(x) = -\frac{5}{2x^2} + 2.$$

Dann ist $f''(x_-) = -8 < 0$, und nach Lemma 9.42 hat f ein lokales Maximum in x_-. Da f' keine weiteren Nullstellen auf $(0,1]$ hat, ist f streng monoton steigend auf $(0, \frac{1}{2})$ und streng monoton fallend auf $(\frac{1}{2}, 1]$. Insbesondere hat f ein lokales Minimum im Randpunkt $x = 1$. Weiterhin ist das lokale Maximum in x_- auch ein globales Maximum. Wegen $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, hat f kein globales Minimum. $\square$

Aufgabe 4 (Integral von x^2)**.** In dieser Aufgabe integrieren Sie eine Funktion „von Hand“.
Sei $0 \le a < b < \infty$, und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x^2$. Für $J \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ betrachten wir die Zerlegungen $\mathfrak{Z}_J = (t_0, \dots, t_J)$ mit $t_j := a + j\frac{b-a}{J}$.

(a) Berechnen Sie $\overline{S}(f, \mathfrak{Z}_J)$ sowie $\underline{S}(f, \mathfrak{Z}_J)$.

Hinweis: Sie dürfen (ohne Beweis) die folgenden Potenzsummen benutzen:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(b) Beweisen Sie dass die folgenden Grenzwerte existieren und gleich sind:

$$\lim_{J\to\infty} \underline{S}(f, \mathfrak{Z}_J) = \lim_{J\to\infty} \overline{S}(f, \mathfrak{Z}_J).$$

(c) Zeigen Sie (direkt nach der Definition) dass f auf $[a,b]$ Darboux-integrierbar ist, und berechnen Sie $\int_a^b f(x)dx$.

Lösung. (a) Sei $J \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Wir berechnen zuerst die Untersumme

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f, \mathfrak{Z}_J) &= \sum_{j=1}^{J} (t_j - t_{j-1}) \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \\
&= \frac{b-a}{J} \sum_{j=1}^{J} \left(a + (j-1) \frac{b-a}{J} \right)^2 \\
&= \frac{b-a}{J} \sum_{j=1}^{J} \left(a^2 + 2(j-1) \frac{a(b-a)}{J} + (j-1)^2 \frac{(b-a)^2}{J^2} \right) \\
&= \frac{b-a}{J} \sum_{j=0}^{J-1} \left(a^2 + 2j \frac{a(b-a)}{J} + j^2 \frac{(b-a)^2}{J^2} \right) \\
&= \frac{b-a}{J} \left(Ja^2 + (J-1)J \frac{a(b-a)}{J} + \frac{(J-1)J(2J-1)}{6} \frac{(b-a)^2}{J^2} \right) \\
&= (b-a) \left(a^2 + \frac{(J-1)J}{J^2} a(b-a) + \frac{(J-1)J(2J-1)}{J^3} \frac{(b-a)^2}{6} \right).
\end{aligned}$$

Ebenso berechnen wir auch die Obersumme:

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \mathfrak{Z}_J) &= \sum_{j=1}^{J} (t_j - t_{j-1}) \sup_{[t_{j-1}, t_j]} f \\
&= \frac{b-a}{J} \sum_{j=1}^{J} \left(a + j \frac{b-a}{J} \right)^2 \\
&= \frac{b-a}{J} \sum_{j=1}^{J} \left(a^2 + 2j \frac{a(b-a)}{J} + j^2 \frac{(b-a)^2}{J^2} \right) \\
&= \frac{b-a}{J} \left(Ja^2 + J(J+1) \frac{a(b-a)}{J} + \frac{J(J+1)(2J+1)}{6} \frac{(b-a)^2}{J^2} \right) \\
&= (b-a) \left(a^2 + \frac{J(J+1)}{J} a(b-a) + \frac{J(J+1)(2J+1)}{J^3} \frac{(b-a)^2}{6} \right).
\end{aligned}$$

(b) Mit den Grenzwerten $\lim_{J\to\infty} \frac{J\pm 1}{J} = 1$ und $\lim_{J\to\infty} \frac{2J\pm 1}{J} = 2$ folgt aus den Rechenregeln für Grenzwerte dass

$$\begin{aligned}
S &:= \lim_{J\to\infty} \underline{S}(f, \mathfrak{Z}_J) = \lim_{J\to\infty} \overline{S}(f, \mathfrak{Z}_J) \\
&= (b-a) \left(a^2 + a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{3} \right) = (b-a) \left(a^2 + ab - a^2 + \frac{1}{3}(b^2 - 2ab + a^2) \right) \\
&= \frac{1}{3}(b-a)(a^2 + ab + b^2) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).
\end{aligned}$$

(c) Die Folge von Untersummen ist monoton steigend und die Folge von Obersummen ist monoton fallend, und insbesondere gilt $\sup_{J\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \underline{S}(f, \mathfrak{Z}_J) = S$ sowie $\inf_{J\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \overline{S}(f, \mathfrak{Z}_J) = S$. Für das Infimum und das Supremum über beliebige Zerlegungen folgt hieraus

$$\inf_{\mathfrak{Z}} \overline{S}(f, \mathfrak{Z}) \leq \inf_{J\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \overline{S}(f, \mathfrak{Z}_J) = S = \sup_{J\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \underline{S}(f, \mathfrak{Z}_J) \leq \sup_{\mathfrak{Z}} \underline{S}(f, \mathfrak{Z}).$$

Wegen Korollar 10.3 folgt $\inf_{\mathfrak{Z}} \overline{S}(f, \mathfrak{Z}) = \sup_{\mathfrak{Z}} \underline{S}(f, \mathfrak{Z})$ und somit ist f Darboux-integrierbar. Das Integral ist dann gegeben durch

$$\int_a^b f(x)dx = S = \frac{1}{3}(b^3 - a^3). \qquad \square$$