Aufgabe 1 (Limes inferior und Limes superior). Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt die Ungleichung

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(b) Falls $a_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \to a$, dann gilt die Gleichheit

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(c) Es gelten die Ungleichungen

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_j\right) \le \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_j\right) \le \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Lösung. (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sup_{m\ge n}(a_m + b_m) \le \sup_{m\ge n} a_m + \sup_{m\ge n} b_m$. Es folgt

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}\sup_{m\ge n}(a_m + b_m) &\le \lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{m\ge n} a_m + \sup_{m\ge n} b_m\Big)\\ &\le \lim_{n\to\infty}\sup_{m\ge n} a_m + \lim_{n\to\infty}\sup_{m\ge n} b_m = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$

Wir haben benutzt dass alle obigen Folgen der Suprema konvergieren. Das war notwendig: mit der Definition von lim sup als Infimum kommt man in der letzten Ungleichung nicht weiter.

(b) Wir nehmen einfachheitshalber an dass $\limsup_{n\to\infty} b_n \ge 0$. Dann gilt

$$\inf_{m\ge n} a_m \cdot \sup_{m\ge n} b_m \le \sup_{m\ge n}(a_m \cdot b_m) \le \sup_{m\ge n} a_m \cdot \sup_{m\ge n} b_m.$$

Dann nehmen wir $n \to \infty$ und benutzen wir dass a_n konvergiert.

(c) Wir beweisen die letzte Ungleichung (die erste ist ähnlich, und die mittlere ist klar). Für beliebige $k \le n$ gilt

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_j = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{k} a_j + \frac{1}{n+1}\sum_{j=k+1}^{n} a_j \le \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{k} a_j + \frac{n-k}{n+1}\sup_{j\ge k+1} a_j.$$

Es folgt

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_j \le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{k} a_j + \frac{n-k}{n+1}\sup_{j\ge k+1} a_j\right) = \sup_{j\ge k+1} a_j.$$

Aber dies gilt für beliebige k, und deshalb

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_j \le \limsup_{k\to\infty} a_k. \qquad \square$$

Aufgabe 2 (Konvergenz). (a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a.1) Wenn $b_n \to 0$ und $a_n b_n \to 0$, dann ist a_n beschränkt.

(a.2) Wenn $a_n \to a^*$, dann $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n a_j \to a^*$.

(a.3) Wenn $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n a_j \to a^*$, dann $a_n \to a^*$.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie für jede der nachfolgenden Aussagen je eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ an, so dass der entsprechende Fall eintritt. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(b.1) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

(b.2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$.

(b.3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

Lösung. (a) (a.1) Gegenbeispiel: $a_n = n$ und $b_n = \frac{1}{n^2}$.

(a.2) Die Aussage ist richtig: aus Aufgabe 1(c) und Lemma 4.18 folgt die Gleichheit

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_j\right) = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_j\right) = \limsup_{n\to\infty} a_n,$$

und deshalb konvergiert auch $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n a_j$ gegen $\lim_n a_n$.

(a.3) Gegenbeispiel: $a_n = (-1)^n$. Dann konvergiert $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n a_j$ gegen 0, obwohl a_n nicht konvergiert.

(b) (b.1) $b_n = (a_n)^{-1/2}$.

(b.2) $b_n = (a_n)^{-1}$.

(b.3) $b_n = (a_n)^{-2}$. □

Aufgabe 3 (Konvergenz und Grenzwerte). Entscheiden Sie für folgende Folgen in $\mathbb{R}$, ob sie konvergieren, und bestimmen Sie wenn ja den Grenzwert. Beweisen Sie Ihr Resultat.

(a) $a_n := \frac{n^3+3}{n^2-5}$.

(b) $b_n := \frac{n^4+3n^2}{5n^4-9n^3+7n}$.

(c) $c_n := x^n$ für $x \in \mathbb{R}$.

(d) $d_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Lösung. (a) Für $n \geq 3$ gilt $a_n \geq \frac{n^3+3}{n^2-5} \geq \frac{n^3+3}{n^2} \geq n$ und deswegen konvergiert die Folge nicht.

(b) $b_n = \frac{1+3/n^2}{5-9/n+7/n^3} \to \frac{1}{5}$ wegen $1/n \to 0$.

(c) Für $x = 0$ oder $x = 1$ ist die Folge konstant und insbesondere konvergent. Für $x = -1$ ist die Folge alternierend und deshalb nicht konvergent. Für $0 < x < 1$ gilt $x^n \to 0$ (Lemma 4.10). Das gleiche folgt dann für $-1 < x < 0$ (siehe auch Lemma 4.6). Für $x > 1$ und $x < -1$ ist die Folge unbeschränkt.

(d) Wir benutzen die Gleichheit $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ und berechnen

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0. \qquad \square$$

Aufgabe 4 (Konvergenz und Differenz). Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei $b_n := a_{n+1} - a_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null.

(b) Wenn die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert, dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Lösung. (a) Richtig: $|b_n| \le |a_{n+1} - a| + |a - a_n| \to 0$.

(b) Falsch: z.B. $a_n = \sqrt{n}$, siehe Aufgabe 3(d). $\square$

Aufgabe 5 (Monotone Konvergenz). Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ rekursiv durch

$$a_0 := \frac{1}{4}, \qquad a_{n+1} := a_n^2 + \frac{1}{4},\ n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge monoton und beschränkt ist. Schlussfolgern Sie daraus die Konvergenz der Folge und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Lösung. Wir beweisen zuerst mittels Induktion dass $a_{n+1} > a_n$:
<u>IA</u>: $a_1 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} = a_0$.
<u>IS</u>: $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + \frac{1}{4} \overset{\text{IH}}{>} a_n^2 + \frac{1}{4} = a_{n+1}$.
Die Gleichung $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ hat genau eine Lösung $x = \frac{1}{2}$, und wir beweisen zunächst mittels Induktion dass diese Lösung eine obere Schranke ist:
<u>IA</u> $a_0 < \frac{1}{2}$.
<u>IS</u> $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} \overset{\text{IH}}{<} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
Deshalb konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Proposition 4.13) gegen ein $0 < a \in \mathbb{R}$. Mithilfe von Lemma 4.9 konvergiert auch $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} \to a^2 + \frac{1}{4}$, und es folgt $a^2 + \frac{1}{4} = a$, also $a = \frac{1}{2}$. $\square$

Aufgabe 6 (Konvergenz auf $\bar{\mathbb{R}}$). Beweisen Sie, dass die Definition der Konvergenz auf $\bar{\mathbb{R}}$ in Abschnitt 4.3 und die Definition der Konvergenz in metrischen Räumen (wobei $\bar{\mathbb{R}}$ die im Skript beschriebenen Metrik hat) übereinstimmen.

Lösung. Wir beweisen zuerst dass die normale Konvergenz in $\mathbb{R}$ äquivalent ist mit Konvergenz in der Metrik

$$d(x,y) := \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|.$$

Sei beispielsweise $a > 0$. Dann ist auch $a_n > 0$ für n groß genug, und aus Lemma 4.9 folgt $1/a_n \to 1/a$ und

$$\frac{a_n}{1+a_n} = \frac{1}{1/a_n + 1} \to \frac{1}{1/a+1} = \frac{a}{1+a}.$$

Das heißt, Konvergenz in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ impliziert Konvergenz in $(\mathbb{R}, d)$. Die Umkehrung ist ähnlich und benutzt die Inverse $\iota^{-1}: (0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$.

Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\bar{\mathbb{R}}$ die gegen $+\infty$ konvergiert. Das heißt,

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}) a_n \geq M.$$

Für $\epsilon > 0$ nehmen wir dann M so, dass $\frac{1}{M+1} < \epsilon$, und dann gilt

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0})\ |1 - \frac{a_n}{1+a_n}| = |\frac{1}{1+a_n}| \leq \frac{1}{1+M} < \epsilon.$$

Dies bedeutet dass $d(\infty, a_n) \to 0$. Die Umkehrung ist wieder ähnlich. □

Aufgabe 7 (Cauchyfolgen)**.** Sei (M, d) ein metrischer Raum. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in M, und sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0$. Dann ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M so, dass für alle $\epsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(a_N, a_m) \leq \epsilon$ für alle $m \geq 2N$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M so, dass die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ beide gegen a konvergieren. Dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M so, dass die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(e) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in M mit einer konvergenten Teilfolge. Dann konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung. Alle Aussagen sind richtig:

(a) $d(b_n, b_{n'}) \leq d(b_n, a_n) + d(a_n, a_{n'}) + d(a_{n'}, b_{n'})$.

(b) Gegeben $\epsilon > 0$ existiert auch ein N so dass $d(a_N, a_m) \leq \frac{1}{2}\epsilon$ für alle $m \geq 2N$. Dann gilt mit $n_0 := 2N$ für alle $n, n' \geq n_0$ dass $d(a_n, a_{n'}) \leq d(a_n, a_N) + d(a_N, a_{n'}) \leq \epsilon$.

(c) Gegeben ϵ gibt es N und M so dass für alle $n \geq N$ und $m \geq M$ gilt $d(a_{2n}, a) < \epsilon$ und $d(a_{2m+1}, a) < \epsilon$. Dann nehmen wir $n_0 := \max(N, M)$.

(d) Eine Teilfolge einer konvergenten Folge hat denselben Grenzwert, und deshalb gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{6n} = \lim_{n\to\infty} a_{3n} = \lim_{n\to\infty} a_{6n+3} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}.$$

Dann folgt die Aussage aus (c).

(e) Sei $\epsilon > 0$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy ist, existiert $N \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n, m \geq N$ gilt $|a_n - a_m| < \frac{1}{2}\epsilon$. Ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a, so existiert $K \in \mathbb{N}$ sodass für alle $k \geq K$ gilt $|a - a_{n_k}| < \frac{1}{2}\epsilon$. Für $n \geq n_0 := \max\{N, n_K\}$ nehmen wir k mit $n_k \geq n_0$, und es folgt

$$|a - a_n| \leq |a - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_n| < \epsilon.$$

□