Universität Bonn
PD Dr. Pavel Zorin-Kranich
Dr. Koen van den Dungen

Aufgabe 1 (Potenzen)**.** Für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $q \in \mathbb{Q}$ gilt

$$a^q = \exp(q \ln a).$$

Hinweis: die rationale Potenz a^q ist definiert in Aufgabe 2 vom Übungsblatt 5. Hier zeigen wir also, dass die Definition der reellen Potenzen (Definition 7.32) damit übereinstimmt.

Aufgabe 2 (Konvergenz von Funktionenfolgen)**.** Man betrachte die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, die wie folgt definiert ist:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x < \frac{1}{n+1}, \\ \sin^2(\frac{\pi}{x}), & \text{falls } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{falls } x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

(a) Konvergiert die Folge f_n punktweise auf $\mathbb{R}$?

(b) Konvergiert die Folge f_n gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

(c) Konvergiert die Reihe $\sum_n f_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

(d) Konvergiert die Folge der Partialsummen $S_k := \sum_{n=1}^k f_n$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 3 (Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit von Teilmengen)**.** Überprüfen Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ auf Offenheit, Abgeschlossenheit und (Folgen)Kompaktheit:

(a) $A := (0,1)^2$.

(b) $B := [0,1]^2$.

(c) $C := [0,1] \times (0,1)$.

(d) $D := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \wedge x_1 + x_2 \leq 1\}$.

(e) $E := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \wedge x_1 x_2 \leq 1\}$.

Aufgabe 4. Sei X ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie dass eine Teilmenge $A \subseteq X$ genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen ist.