Analysis 3

10.12.2018
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 18.12.2018 in der Vorlesung

Übungsblatt 10

Aufgabe 1: Lebesgue-Messbarkeit **3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 Punkte**

(a) Sei $C \subset \mathbb{R}^d$ nichtleer und konvex. Zeigen Sie, dass das Innere C° ebenfalls konvex ist.

Sei nun $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex, beschränkt mit nichtleerem Inneren, so dass $0 \in K^\circ$.

(b) Schließen Sie aus (a), dass für $0 < \varepsilon < 1$ gilt: $K^\circ \subset \frac{1}{1-\varepsilon}K^\circ$.

(c) Zeigen Sie, dass für $0 < \varepsilon < 1$ gilt:

$$\partial K \subset \left(\frac{1}{1-\varepsilon}K^\circ\right) \setminus K^\circ.$$

(d) Schließen Sie aus (b) und (c), dass $m(\partial K) = 0$, wobei m das d-dimensionale Lebesguemaß ist.

(e) Schließen Sie aus (d), dass jede konvexe, beschränkte Menge mit nichtleerem Inneren Lebesgue-messbar ist.

Zusatz für Motivierte: Zeigen Sie, dass *jede* (!) konvexe Menge Lebesgue-messbar ist.

Aufgabe 2: Areaformel **10 Punkte**

Sei $\mathbb{S}^3 := \{x \in \mathbb{R}^4 \colon\ |x| = 1\}$. Stellen Sie $\mathbb{S}^3$ als Vereinigung von Graphen zweier geeigneter Funktionen dar und bestimmen Sie damit $\mathcal{H}^3(\mathbb{S}^3)$. Sie dürfen dabei die aus den vorausgegangenen Übungsblättern bekannte Relationen zwischen Beta- und Gammafunktion nutzen.

Aufgabe 3: Areaformel **3 + 6 + 6 = 15 Punkte**

Die spezielle unitäre Gruppe ist gegeben durch

$$\mathrm{SU}(2) := \Big\{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \colon\ AA^* = A^*A = E_2,\ \det(A) = 1\Big\},$$

wobei $A^* := \overline{A}^\top$ und $E_2 \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ die Einheitsmatrix ist. Im Folgenden betten wir $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ in den $\mathbb{R}^8$ ein.

(a) Geben Sie zuerst den kanonischen Isomorphismus $j \colon M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^8$ an, der $M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^8$ induziert.

(b) Zeigen Sie, dass $j(\mathrm{SU}(2))$ eine dreidimensionale glatte Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^8$ ist. Zeigen Sie hierzu, dass sich jedes Element $x \in \mathrm{SU}(2)$ darstellen lässt als

$$x = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$ so dass $|a|^2 + |b|^2 = 1$. In der letzten Gleichung bedeutet $|\cdot|$ den komplexen Betrag.

(c) Bestimmen Sie $\mathcal{H}^3(j(\mathrm{SU}(2)))$. *Tipp:* Aufgabe 2.