Shimura-Varietäten I

Ulrich Görtz
http://www.math.uni-bonn.de/people/ugoertz/shimura.html

4. Mai 2006

. Einführung Alg. Gruppen Herm.-symm. Bereiche BB-Komp. Hodge-Str.

Was sind Shimura-Varietäten

- $\mathrm{Sh}(G, X) = \varprojlim_K G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K$
- Beschreibung als (endl. disj. Ver. von) Quotient eines hermitesch symmetrischen Bereichs nach einer diskreten Gruppe
- Beschreibung als Modulraum (von abelschen Var./Hodge-Strukturen)
- Gruppenoperation von $G(\mathbb{A}_f)$
- Modelle über Zahlkörpern ($\to$ Galois-Darstellungen)

Literatur

- **P. Deligne, Variétés de Shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques, in: Corvallis proceedings, 1979**
- P. Deligne, *Travaux de Shimura*, Sém. Bourbaki, exp. 389, Springer LNM 244
- G. Shimura
- **J. Milne, Introduction to Shimura varieties, http://www.jmilne.org/math/**
- J. Milne, *Canonical models of Shimura curves*, http://www.jmilne.org/math/

Benötigte Kenntnisse für Shimura-Varietäten

J. Milne, *Canonical models of Shimura curves*:

> *I once wrote to Deligne to point this out, and noted that there were three changes of sign between his Bourbaki talk and his Corvallis article. He responded: "Mea culpa, mea maxima culpa. My sign is wrong, and your explanation ... plausible: I could not count to three."*
>
> *Thus it appears that the prerequisite for understanding Shimura varieties is being able to count to two—three would be useful, but not strictly necessary.*

Die obere Halbebene

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im} z > 0\}$$

$SL_2(\mathbb{R})$ operiert auf $\mathbb{H}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d},$$

der Stabilisator von i ist SO_2, und wir erhalten Homöomorphismus $SL_2(\mathbb{R})/SO_2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}$.

Riemannsche Metrik, $SL_2(\mathbb{R})$-invariant: $\frac{dxdy}{y^2}$

$\mathbb{H} \cong \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ durch $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$.

Modulkurven

Definiere

$$\Gamma(N) = \{g \in SL_2(\mathbb{Z});\ g \equiv E_2 \mod N\} \subseteq SL_2(\mathbb{Z}), \quad N \geq 1.$$

Definition

Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$ heißt Kongruenzuntergruppe, wenn ein N mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$ existiert.

$\Gamma\backslash\mathbb{H}$ Riemannsche Fläche.

Modulkurven sind algebraisch

Kompaktifizierung

$X_\Gamma = \Gamma\backslash\mathbb{H} \cup \{\text{Spitzen}\}$ kompakte Riemannsche Fläche, also projektive algebraische Kurve $/\mathbb{C}$

Modulformen (zur Stufe Γ, von geradem Gewicht $2k$) sind Elemente von $H^0(X_\Gamma, \omega^{\otimes k})$.

Modell über Zahlkörper

Modulraum elliptischer Kurven

Elliptische Kurve über $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}/\Lambda$
Die Abbildung $\mathbb{H} \longrightarrow \mathrm{Ell}_{\mathbb{C}}/\cong$, $\tau \mapsto \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ induziert Bijektion

$$SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \longrightarrow \mathrm{Ell}_{\mathbb{C}}/\cong .$$

Fixiere primitive N-te Einheitswurzel $\zeta \in \mathbb{C}$. Haben Bijektion

$$\begin{aligned}\Gamma(N)\backslash\mathbb{H} \quad \xrightarrow{\cong} \quad & \{(E,\eta);\ E \text{ ell. K.}/\mathbb{C},\\ & \eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{\cong} E[N],\\ & \text{so dass } e_N(\eta(1,0),\eta(0,1)) = \zeta\}\end{aligned}$$

Lineare algebraische Gruppen

Sei k ein Körper.

Definition

Eine lineare algebraische Gruppe über k ist eine Gruppenvarietät G über k, die die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- G ist affin
- G ist isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppenvarietät von $GL_{n,k}$, n geeignet.

Beispiele

$$
\begin{aligned}
GL_n(k) &= \{A \in M_{n\times n}(k);\ A \text{ invertierbar}\}\\
SL_n(k) &= \{A \in GL_n(k);\ \det A = 1\}\\
GSp_{2n}(k) &= \{A \in GL_{2n}(k);\ \exists c(A) \in k^\times : {}^tAJA = c(A)J\},\\
&\qquad J = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix}\\
O_n(k) &= \{A \in GL_n(k);\ {}^tAA = E_n\}\\
\mathbb{G}_m &= GL_1
\end{aligned}
$$

Tori

Definition

Ein algebraischer Torus ist eine lineare algebraische Gruppe, die die folgenden äquivalenten Eigenschaften hat:

- $T_{\overline{k}} \cong (\mathbb{G}_{m,\overline{k}})^r$, r geeignet
- T zusammenhängend und alle Elemente von $T(\overline{k})$ sind halbeinfach
- T zusammenhängend und (über $\overline{k}$) diagonalisierbar

Theorem

Haben Äquivalenz von Kategorien

$$
\begin{aligned}
(\textit{algebraische Tori}/k) &\xrightarrow{\cong} (\textit{freie } \mathbb{Z}-\textit{Moduln}\\
&\qquad \textit{mit } \mathrm{Gal}(k^{sep}/k)-\textit{Operation})\\
T &\mapsto X^*(T) = \mathrm{Hom}(T_{k^{\mathrm{sep}}}, \mathbb{G}_{m,k^{\mathrm{sep}}})
\end{aligned}
$$

Darstellungen von Tori

Satz

Sei T ein Torus über k, $\rho\colon T \longrightarrow GL(V)$ eine Darstellung. Dann ist $\rho(T)$ über k^{sep} konjugiert zu einer Untergruppe der Gruppe der Diagonalmatrizen.

Es ist also

$$V(k^{\mathrm{sep}}) = \bigoplus_{\alpha \in X^*(T)} V_\alpha,$$

wobei

$$V_\alpha = \{v \in V(k^{\mathrm{sep}});\ tv = \alpha(t)v\}$$

den "Eigenraum" zum Charakter α bezeichnet.
Jedes Element $\sigma \in \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)$ induziert $V_\alpha \xrightarrow{\cong} V_{\sigma\alpha}$.

Umgekehrt induziert eine Zerlegung $(*)$ zusammen mit einer Galois-Operation wie oben eine Darstellung von T auf V.

Beispiel: Darstellungen von U_1

Charaktere von U_1: $z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{R}$. Also $X^*(T) = \mathbb{Z}$, und komplexe Konjugation operiert durch $n \mapsto -n$.

Eine Darstellung von U_1 auf V entspricht also einer Zerlegung

$$V(\mathbb{C}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n,$$

so dass $\overline{V_n} = V_{-n}$ für alle n.

Satz

Jede Darstellung von U_1 ist eine direkte Summe von Darst. der Form

1. *$V = \mathbb{R}$ mit trivialer U_1-Operation,*
2. *$V = \mathbb{R}^2$, so dass $V(\mathbb{C}) = V^n \oplus V^{-n}$.*

Weil-Restriktion

Sei K/k eine endliche Galois-Erweiterung. Sei G eine algebraische Gruppe über K. Können G als algebraische Gruppe über k auffassen.

Funktoriell:

$$\mathrm{Res}_{K/k} G(R) = G(R \otimes_k K)$$

Insbesondere gilt $(\mathrm{Res}_{K/k} G)_K = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)} G$

Ähnlich: B endlich-dimensionale k-Algebra. Können $B^\times$ als algebraische Gruppe über k auffassen:

$$B^\times(R) = (B \otimes_k R)^\times.$$

Halbeinfache Gruppen

Definition

Eine zushgd. algebraische Gruppe G über k heißt halbeinfach, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

1. Die maximale zusammenhängende auflösbare normale Untergruppe von G ist $\{1\}$
2. G hat keine zusammenhängende abelsche normale Untergruppe $\neq \{1\}$.

Beispiel

- SL_n, PGL_n, Sp_{2n} sind halbeinfach
- GL_n, $\mathbb{G}_m$, die Untergruppe der ob. Dreiecksmat. in GL_n sind nicht halbeinfach

Einfach zushg., adjungierte Gruppen

Definition

Eine halbeinfache Gruppe G heißt

- einfach zusammenhängend, wenn jede (zentrale) Isogenie $H \longrightarrow G$ ein Isomorphismus ist,
- adjungiert, wenn jede (zentrale) Isogenie $G \longrightarrow H$ ein Isomorphismus ist.

Beispiel

- SL_n, Sp_{2n} sind halbeinfach, einfach zusammenhängend
- PGL_n ist halbeinfach, adjungiert

Reduktive Gruppen

Definition

Eine zushgd. algebraische Gruppe G über k heißt reduktiv, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

1. Die maximale zusammenhängende unipotente normale Untergruppe von G ist $\{1\}$
2. G hat keine zusammenhängende unipotente abelsche normale Untergruppe $\neq \{1\}$.
3. (falls $\operatorname{char} k = 0$) G ist linear reduktiv, d. h. zu jeder Darstellung $\rho\colon G \longrightarrow GL(V)$ und jedem G-invarianten UVR $W \subseteq V$ existiert ein G-invariantes Komplement.

Beispiel

- GL_n, GSp_{2n}, halbeinfache Gruppen, Tori sind reduktiv
- $\mathbb{G}_a$, die UG der ob. Dreiecksmat. in GL_n sind nicht reduktiv

Sei G eine reduktive Gruppe. Haben exakte Sequenzen

$$1 \longrightarrow G^{\mathrm{der}} \longrightarrow G \xrightarrow{\nu} T \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow G \xrightarrow{\mathrm{ad}} G^{\mathrm{ad}} \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow Z' \longrightarrow Z \longrightarrow T \longrightarrow 1$$

Sei G eine algebraische Gruppe. Wir bezeichnen mit

$G(\mathbb{R})^+$ die Zusammenhangskomponente von 1 bzgl. der analytischen Topologie,

$G(\mathbb{R})_+$ das Urbild von $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$ in $G(\mathbb{R})$,

$G(\mathbb{Q})_+$ $= G(\mathbb{Q}) \cap G(\mathbb{R})_+$

Hermitesch-symmetrische Räume

Definition

Eine hermitesche Mf. ist eine komplexe Mf. M zusammen mit einer hermiteschen Metrik g.

Definition

Eine hermitesch symmetrischer Raum ist eine zusammenhängende hermitesche Mannigfaltigkeit (M, g), so dass gilt

- (M, g) ist homogen, d. h. die Gruppe $\mathrm{Aut}(M, g)$ der holomorphen Isometrien operiert transitiv
- Existenz von Symmetrien: zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine holomorphe Isometrie s von M, so dass $s^2 = \mathrm{id}$ und so dass p ein isolierter Fixpunkt von s ist.

Grobe Einteilung

Typ	Krümmung	Automorphismengp.	Beispiel
Kompakt	pos.	adjungiert, kompakt	$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
Nicht kompakt	neg.	adjungiert, nicht-kompakt	$\mathbb{H}$
Euklidisch	0		$\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n/\Gamma$

Jeder hermitesch symmetrische Raum M zerfällt als Produkt $M_c \times M_{nc} \times M_0$, wobei M_c von kompaktem Typ, M_{nc} von nicht-kompaktem Typ, M_0 euklidisch.

Definition

Ein hermitesch symmetrischer Bereich ist ein hermitesch symmetrischer Raum von nicht-kompaktem Typ.

Beispiele: Reelle Lie-Gruppen

$$SO(p,q) = \{A \in SL(n,\mathbb{R});\ {}^tA \begin{pmatrix} -E_p & \\ & E_q \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -E_p & \\ & E_q \end{pmatrix}\}$$

$$SO^*(2n) = \{A \in SL_{2n}(\mathbb{C});\ {}^tAA = E_{2n},\ {}^tA \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \overline{A} = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix}\}$$

$$Sp_{2n}(\mathbb{R}) = \{A \in GL_{2n}(\mathbb{R});\ {}^tA \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix}\}$$

$$U(p,q) = \{A \in SL_n(\mathbb{C});\ {}^tA \begin{pmatrix} -E_p & \\ & E_q \end{pmatrix} \overline{A} = \begin{pmatrix} -E_p & \\ & E_q \end{pmatrix}\}$$

Beispiele: hermitesch symmetrische Räume

	$\dim_{\mathbb{R}}$
$SU(p,q)/S(U_p \times U_q)$	$2pq$
$SO(n,2)^+/SO(n) \times SO(2)$	$2n$
$Sp_{2n}(\mathbb{R})/U(n)$	$n(n+1)$
$SO^*(2n)/U(n)$	$n(n-1)$

Beispiel

- $\mathbb{H} \cong Sp_2(\mathbb{R})/U(1) \cong SU(1,1)/S(U_1 \times U_1)$

Beschränkte symmetrische Bereiche

Theorem

Jeder beschränkte Bereich kann in kanonischer Weise mit einer hermiteschen Metrik (der sog. Bergmann-Metrik) ausgestattet werden. Diese Metrik hat negative Krümmung.

Theorem

Jeder hermitesch-symmetrische Bereich läßt sich, als komplexe Mf., mit einem beschränkten Bereich in einem geeigneten $\mathbb{C}^n$ identifizieren.

Automorphismen hermitesch-symmetrischer Bereiche

Theorem

Sei M ein hermitesch-symmetrischer Bereich.

1. $\mathrm{Aut}(M)^+$ *operiert transitiv auf* M
2. *Ist* $p \in M$, *so ist der Stabilisator* K_p *von* p *in* $\mathrm{Aut}(M)^+$ *kompakt, und*

   $$\mathrm{Aut}(M)^+/K_p \xrightarrow{\cong} M, \quad g \mapsto gp$$

   ist ein Isomorphismus glatter Mf.
3. *Es existiert eine zusammenhängende reelle algebraische Gruppe* $G \subseteq GL(\mathrm{LieAut}(M))$ *mit* $G(\mathbb{R})^+ = \mathrm{Aut}(M)^+ = G(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Aut}(M)$.

Beispiel

Die Abbildung $z \mapsto \overline{z}^{-1}$ ist eine anti-holomorphe Isometrie von $\mathbb{H}$, und jede Isometrie ist entweder holomorph, oder unterscheidet sich von $z \mapsto \overline{z}^{-1}$ um eine holomorphe Isometrie. Es ist $G = PGL_{2,\mathbb{R}}$, $PGL_2(\mathbb{R})$ op. holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, und $PGL_2(\mathbb{R})^+$ ist der Stabilisator von $\mathbb{R}$.

Der Homom. $u_p\colon U_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(D)$

Sei $U_1 = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ (als reelle Lie-Gruppe).

Theorem

Sei D ein hermitesch-symmetrischer Bereich. Zu jedem Punkt $p \in D$ existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $u_p\colon U_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(D)$, so dass $u_p(z)$ den Punkt p fixiert und auf dem Tangentialraum durch Multiplikation mit z operiert.

Beweis.

- Jedes z mit $|z| = 1$ definiert einen Automorphismus von (T_pD, g_p). Es existiert eine eind. best. Isometrie $u_p(z)\colon D \longrightarrow D$, so dass $du_p(z)_p$ Multiplikation mit z ist. Diese ist holomorph, da $\mathbb{C}$-linear auf dem Tangentialraum.
- Wegen der Eindeutigkeit ist die resultierende Abbildung $U_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(D)$ ein Gruppenhomomorphismus.

$\square$

Beispiel

Sei $p = i \in \mathbb{H}$, und sei $h\colon \mathbb{C}^\times \longrightarrow GL_2(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$z = a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Dann operiert $h(z)$ auf dem Tangentialraum $T_i\mathbb{H}$ durch Multiplikation mit $z/\overline{z}$.

Sei nun $z \in U_1$ und $\sqrt{z} \in U_1$ eine Quadratwurzel von z und sei

$$u(z) = h(\sqrt{z}) \mod \pm E_2.$$

Erhalte Homom. $U_1 \longrightarrow PSL_2(\mathbb{R})$, und $u(z)$ operiert auf $T_i\mathbb{H}$ durch Multiplikation mit z.

Cartan-Involutionen

Sei G eine zusammenhgd. alg. Gruppe über $\mathbb{R}$. Haben komplexe Konjugation $g \mapsto \overline{g}$ auf $G(\mathbb{C})$.

Definition

Eine Involution $\theta\colon G \longrightarrow G$ heißt Cartan-Involution, wenn

$$G^{(\theta)}(\mathbb{R}) = \{g \in G(\mathbb{C});\ g = \theta(\overline{g})\}$$

kompakt ist.

Theorem

1. *Es existiert genau dann eine Cartan-Involution für G, wenn G reduktiv ist.*
2. *In diesem Fall sind je zwei Cartan-Involutionen unter einem Element von $G(\mathbb{R})$ konjugiert zueinander.*

Beispiel

Sei $G = SL_2(\mathbb{R})$, $\theta = \mathrm{int}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann

$$\theta\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$

also ist

$$SL_2^{(\theta)}(\mathbb{C}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R});\ d = \overline{a}, c = -\overline{b}\} = SU_2$$

kompakt.

. Einführung Alg. Gruppen Herm.-symm. Bereiche BB-Komp. Hodge-Str.

Beispiel

Sei V ein reeller VR, $G = GL(V)$. Durch Wahl einer Basis von V erhalte Cartan-Involution

$$M \mapsto ({}^tM)^{-1},$$

und alle Cartan-Involutionen von G entstehen auf diese Weise.

Satz

Sei G eine algebraische Gruppe $/\mathbb{R}$, θ eine Involution von G. Dann existiert eine eindeutig bestimmte reelle Form $G^{(\theta)}$ von $G_{\mathbb{C}}$, so dass die komplexe Konjugation auf $G^{(\theta)}$ durch $g \mapsto \theta(\overline{g})$ gegeben ist.
Also: Die Cartan-Involutionen von G entsprechen den kompakten Formen von $G_{\mathbb{C}}$.

C-Polarisierungen

Sei G eine zushg. alg. Gruppe $/\mathbb{R}$.

Satz

Ist $G(\mathbb{R})$ kompakt, so läßt sich jede Darstellung $G \longrightarrow GL_{n,\mathbb{R}}$ mit einem G-invarianten Skalarprodukt versehen.

Gibt es umgekehrt eine treue Darstellung mit einem G-invarianten Skalarprodukt, so ist G kompakt.

Definition

Sei $C \in G(\mathbb{R})$, so dass $C^2 \in Z(\mathbb{R})$. Eine C-Polarisierung auf einer Darstellung V von G ist eine G-invariante Bilinearform φ, derart dass die Form

$$\varphi_C\colon (u, v) \mapsto \varphi(u, Cv)$$

ein Skalarprodukt ist.

Satz

Ist $\operatorname{int}(C)$ *eine Cartan-Involution, so trägt jede Darstellung von G eine C-Polarisierung. Gibt es umgekehrt eine treue Darstellung mit einer C-Polarisierung, so ist* $\operatorname{int}(C)$ *eine Cartan-Involution.*

Theorem

Sei D ein hermitesch symmetrischer Bereich, und sei G die zugeh. reelle alg. Gruppe vom adjungierten Typ. Sei $p \in D$.
Der Homom. $u_p\colon U_1 \longrightarrow G$ hat die folg. Eigenschaften:

- *In der zugeh. Darst. von U_1 auf $\mathrm{Lie}(G)_{\mathbb{C}}$ treten nur die Charaktere z, 1, z^{-1} auf.*
- $\mathrm{int}(u_p(-1))$ *ist eine Cartan-Involution.*
- *$u_p(-1)$ wird unter keiner Proj. auf einen einfachen Quotient von G auf 1 abgebildet.*

Ist umgekehrt G eine reelle algebraische Gruppe vom adjungierten Typ, und ist $u\colon U_1 \longrightarrow G$ mit den obigen Eigenschaften gegeben, so trägt die Konjugationsklasse D von u unter $G(\mathbb{R})^+$ in natürlicher Weise die Struktur eines hermiteschen symmetrischen Bereichs mit $\mathrm{Aut}(D)^+ = G(\mathbb{R})^+$ und s. d. u(-1) die Symmetrie in $u \in D$ ist.

Korollar

Haben 1-1 Korrespondenz

- *Hermitesch-symmetrische Bereiche D mit $p \in D$*
- *Reelle Lie-Gruppen G vom adj. Typ mit $u\colon U_1 \longrightarrow G$ wie oben.*

Beispiel

Sei $u\colon U_1 \longrightarrow PSL_2(\mathbb{R})$ wie oben. Dann ist $u(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, und $\mathrm{int}(u(-1))$ ist eine Cartan-Involution von SL_2, also auch von PSL_2.

Kompaktifizierung der Modulkurve $\Gamma\backslash\mathbb{H}$

Erweitere $\mathbb{H}$ zu $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ mit Satake-Topologie:

Basis offener Umgebungen von ∞:

$$\{z \in \mathbb{H};\ \mathrm{Im} z > N\}$$

Γ operiert auf $\mathbb{H}^*$, $\Gamma\backslash\mathbb{H}^*$ ist kompakt.

Satz

Sei D ein hermitesch symmetrischer Bereich, und sei $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(D)^+$ eine diskrete Untergruppe. Ist Γ torsionsfrei, so operiert Γ frei auf D, und es existiert eine eindeutig bestimmte komplexe Struktur auf $\Gamma\backslash D$, derart dass die Projektion $\pi\colon D \longrightarrow \Gamma\backslash D$ ein lokaler Isomorphismus ist.

Arithmetische Untergruppen

Definition

Zwei Untergruppen H_1, H_2 einer (abstrakten) Gruppe G heißen kommensurabel, wenn $H_1 \cap H_2$ von endlichem Index in H_1 und in H_2 ist.

Definition

Sei G eine algebraische Gruppe über $\mathbb{Q}$. Eine arithmetische Untergruppe von $G(\mathbb{Q})$ ist eine Untergruppe $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$, die kommensurabel zu $G(\mathbb{Q}) \cap GL_n(\mathbb{Z})$ für eine geeignete Einbettung $G \longrightarrow GL_n$ ist.

Satz

Sei $\rho\colon G \longrightarrow G'$ ein surjektiver Homomorphismus und $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ eine arithmetische Untergruppe. Dann ist $\rho(\Gamma) \subset G'(\mathbb{Q})$ arithmetisch.

Theorem

Sei G eine reduktive algebraische Gruppe über $\mathbb{Q}$, und Γ eine arithmetische Untergruppe von $G(\mathbb{Q})$.

1. *Der Raum $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})$ hat genau dann endliches Volumen, wenn* $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m) = 0$.
2. *Der Raum $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})$ ist genau dann kompakt, wenn* $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m) = 0$ *und $G(\mathbb{Q})$ keine unipotenten Elemente $\neq 1$ hat.*

Definition

Sei H eine zusammenhängende reelle Lie-Gruppe. Eine Untergruppe $\Gamma \subset H$ heißt arithmetisch, wenn eine algebraische Gruppe G über $\mathbb{Q}$ und eine arithmetische Untergruppe $\Gamma_0 \subset G(\mathbb{Q})$ existieren, so dass $\Gamma_0 \cap G(\mathbb{R})^+$ unter einem surjektiven Homomorphismus $G(\mathbb{R})^+ \longrightarrow H$ mit kompaktem Kern surjektiv auf Γ abgebildet wird.

. Einführung Alg. Gruppen Herm.-symm. Bereiche BB-Komp. Hodge-Str.

Theorem (Baily, Borel)

Sei $\Gamma \backslash D$ der Quotient eines hermitesch symmetrischen Bereichs nach einer arithmetischen Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{Aut}(D)^+$.
Dann ist $\Gamma \backslash D$ in natürlicher Weise eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven algebraischen Varietät $(\Gamma \backslash D)^*$, und trägt insbesondere die Struktur einer quasi-projektiven algebraischen Varietät.

Theorem (Borel)

Seien D, Γ, $(\Gamma\backslash D)^*$ wie im Theorem von Baily-Borel, und sei Γ torsionsfrei.
Sei V eine glatte quasi-projektive Varietät über $\mathbb{C}$.
Dann ist jeder Morphismus $f\colon V^{\mathrm{hol}} \longrightarrow (\Gamma\backslash D)^{*,\mathrm{hol}}$ komplexer Varietäten algebraisch.

Bem.: Γ torsionsfrei! (Sonst z. B. $\Gamma\backslash D \cong \mathbb{C}$ möglich.)

Korollar

Ist Γ torsionsfrei, so ist die Struktur einer algebraischen Varietät auf $\Gamma\backslash D$ ist eindeutig bestimmt.

Hodge-Strukturen

Definition

Eine Hodge-Zerlegung eines reellen Vektorraums V ist eine Zerlegung

$$V(\mathbb{C}) := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}^2} V^{p,q},$$

so dass $\overline{V^{q,p}} = V^{p,q}$ für alle p, q.

Definition

Eine Hodge-Struktur (HS) ist ein reeller Vektorraum V zusammen mit einer Hodge-Zerlegung.

Reine Hodge-Strukturen

Definition

Eine reine HS vom Gewicht n ist eine HS, so dass

$$V(\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}.$$

Allgemein: Gewichtszerlegung $V = \bigoplus_n V_n$, wo

$$V_n(\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}.$$

Definition

Eine ganze (rationale) HS ist ein endl. erz. freier $\mathbb{Z}$-Modul ($\mathbb{Q}$-Vektorraum) V mit einer Hodge-Zerlegung von $V(\mathbb{R})$, so dass die Gewichtszerlegung über $\mathbb{Q}$ definiert ist.

Beispiel

HS auf Kohomologie $H^*(X, \mathbb{Q})$ einer kompakten Kähler-Mf.

Beispiel

Sei $\mathbb{Q}(m)$ die HS vom Gewicht $-2m$ auf $\mathbb{Q}$,
d. h. $(\mathbb{Q}(m))(\mathbb{C}) = \mathbb{Q}(m)^{-m,-m}$. Analog: $\mathbb{R}(m)$, $\mathbb{Z}(m)$.

Beispiel

V Vektorraum $/\mathbb{R}$

Sei $J \in \mathrm{End}(V)$ eine kompl. Struktur, d. h. $J^2 = -1$.
$V^{-1,0}, V^{0,-1} \subseteq V(\mathbb{C})$ die Eigenräume von $J_{\mathbb{C}}$ zum EW i, $-i$.

Diese Konstruktion liefert $1-1$-Korrespondenz zwischen

- HS vom Typ $(-1,0),(0,-1)$ auf V und
- komplexen Strukturen J auf V.

Rationale HS vom Typ $(-1,0),(0,-1)$ entspricht $\mathbb{Q}$-VR V mit kompl. Struktur auf $V(\mathbb{R})$.

Ganze HS vom Typ $(-1,0),(0,-1)$ entspricht $\mathbb{C}$-VR V mit Gitter $\Lambda \subseteq V$.

Hodge-Filtrierung

Definition

Sei V eine HS vom Gewicht n. Dann ist

$$F^\bullet : \cdots \supseteq F^p \supseteq F^{p+1} \supseteq \cdots, \qquad F^p = \bigoplus_{r \geq p} V^{r,s} \subseteq V(\mathbb{C})$$

die zugehörige Hodge-Filtrierung.

Die Hodge-Filtrierung bestimmt die Hodge-Zerlegung:

$$V^{p,q} = F^p \cap \overline{F^q}.$$

Der Deligne-Torus $\mathbb{S}$

Definition

Sei $\mathbb{S} := \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$, d. h. $\mathbb{S}$ ist die algebraische Gruppe über $\mathbb{R}$, s. d. für alle $\mathbb{R}$-Alg. R gilt

$$\mathbb{S}(R) = (R \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^{\times}.$$

Insbesondere: $\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^{\times}$, $\mathbb{S}(\mathbb{C}) = (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^{\times}$.

Können $\mathbb{S}$ identifizieren mit $\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})\}$.

Fixiere Isom. $\mathbb{S}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^{\times} \times \mathbb{C}^{\times}$, so dass

$$\mathbb{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{S}(\mathbb{C}) \text{ geg. durch } z \mapsto (z, \bar{z}).$$

Charaktere von $\mathbb{S}$

- Charaktere von $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$: $(z_1, z_2) \mapsto z_1^p z_2^q$, $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$.
- Also $X^*(\mathbb{S}) = \mathbb{Z}^2$, kompl. Konj. operiert durch $(p, q) \mapsto (q, p)$.

Also: $\mathbb{S}$-Darstellung auf $\mathbb{R}$-VR ist das gleiche wie eine HS auf V!
Normierung: Zu $h \colon \mathbb{S} \longrightarrow GL(V)$ korrespondiert die HS mit

$$h_{\mathbb{C}}(z_1, z_2)v = z_1^{-p} z_2^{-q} \text{ für } v \in V^{p,q}.$$

Beispiel

V VR $/\mathbb{R}$, $J \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ komplexe Struktur. Dann ist $h = J|_{\mathbb{C}^{\times}} \colon \mathbb{C}^{\times} \longrightarrow GL(V)$ die zugehörige Darstellung von $\mathbb{S}$.

Beispiel

$\mathbb{Q}(1)$ entspricht Normcharakter $\mathbb{S} \to \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$, $z \mapsto z\bar{z}$.

Gewicht in Termen der $\mathbb{S}$-Darstellung

Definiere Gewichtshomomorphismus $w \colon \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{S}$ durch

$$\mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \quad r \mapsto r^{-1}$$

Eine Hodge-Struktur V ist genau dann rein vom Gewicht n, wenn für den zugehörigen Morphismus $h \colon \mathbb{S} \longrightarrow GL(V)$ gilt: $(h \circ w)(r) = r^n \mathrm{id}$ für alle $r \in \mathbb{R}^\times$.

Eine rationale Hodge-Struktur entspricht einem $\mathbb{Q}$-VR V zusammen mit einem Homomorphismus $h \colon \mathbb{S} \longrightarrow GL(V(\mathbb{R}))$, so dass $h \circ w \colon \mathbb{G}_m \longrightarrow GL(V(\mathbb{R}))$ über $\mathbb{Q}$ definiert ist.

Morphismen, Tensorprodukte von HS

Definition

Ein Morphismus $V \longrightarrow W$ von HS ist ein Vektorraumhomomorphismus, der für alle p, q, $V^{p,q}$ nach $W^{p,q}$ abbildet.

Lemma

Seien V, W HS vom Gewicht m bzw. n. Dann ist $V \otimes W$ mit

$$(V \otimes W)^{p,q} = \bigoplus_{r+r'=p, s+s'=q} V^{r,s} \otimes W^{r',s'}$$

eine HS vom Gewicht $m+n$. Die zugehörige Darstellung von $\mathbb{S}$ ist

$$h_V \otimes h_W \colon \mathbb{S} \longrightarrow GL(V \otimes W).$$

Polarisierungen von Hodge-Strukturen

Sei $V = (V, h\colon \mathbb{S} \longrightarrow GL(V))$ eine HS vom Gewicht n.

Definition

Eine Polarisierung von V ist eine Bilinearform $\Psi\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass

- die zugeh. Abb. $V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}(-n)$ ein Morphismus von HS ist
- die BLF $\Psi_{h(i)}(u, v) := \Psi(u, h(i)v)$ symmetrisch und pos. definit ist.

Allgemeiner: V HS über $R = \mathbb{Z}$ oder $= \mathbb{Q}$, $\Psi\colon V \times V \to R$ BLF, s. d. $\Psi_{\mathbb{R}}$ Polarisierung.

Beispiel Polarisierung

Beispiel

Polarisierung einer HS vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$.

Sei (V, h) eine R-HS vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$, $R = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$.
Sei $J = h(i)$.
Eine Polarisierung auf (V, h) ist eine alternierende Bilinearform

$$\Psi\colon V \times V \longrightarrow R,$$

so dass für $u, v \in V(\mathbb{R})$ gilt:

$$\Psi_{\mathbb{R}}(Ju, Jv) = \Psi_{\mathbb{R}}(u, v)$$
$$\Psi_{\mathbb{R}}(u, Ju) > 0 \text{ für } u \neq 0$$

Variationen von HS

Sei V ein $\mathbb{R}$-VR, $n \in \mathbb{Z}$. Wollen Familien von HS auf V über einer (zushgd.) kpl. Mf. S untersuchen.
Sei für jedes $s \in S$ eine HS $V(\mathbb{C}) = \bigoplus V_s^{p,q}$ vom Gewicht n mit Hodge-Filtrierung $F_s^\bullet$ gegeben.

Die Familie heißt stetig, wenn für alle p, q, der Unterraum $V_s^{p,q}$ stetig in s variiert, d. h. wenn $\dim V_s^{p,q}$ konstant und die Abbildung

$$S \longrightarrow \mathrm{Grass}_{\dim V^{p,q}}(V(\mathbb{C})), \quad s \mapsto V_s^{p,q} \quad \text{stetig ist.}$$

Eine stetige Familie heißt holomorph, wenn die Hodge-Filtrierung holomorph in s variiert, also wenn für alle p die Abbildung

$$S \longrightarrow \mathrm{Grass}_{d(p)}(V(\mathbb{C})), \quad s \mapsto F_s^p \quad \text{holomorph ist.}$$

Griffiths-Transversalität

Zu einer holomorphen Familie von HS betrachte

$$\varphi\colon S \longrightarrow \mathrm{Grass}_{d(p)}(V(\mathbb{C})), \quad s \mapsto F_s^p.$$

Sei $s \in S$. Wir identifizieren den Tangentialraum von $\mathrm{Grass}_{d(p)}$ in $\varphi(s)$ mit $\mathrm{Hom}(F_s^p, V/F_s^p)$. Die betrachtete Familie von HS heißt eine Variation von Hodge-Strukturen, wenn für alle s, p gilt:

$$\mathrm{im}\, d\varphi_s \subseteq \mathrm{Hom}(F_s^p, F_s^{p-1}/F_s^p).$$

Hodge-Tensoren

Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von $\mathbb{R}$-VR.

Seien s_j, $j \in J$ Elemente von Tensorprodukten von V_i's und $V_i^\vee$'s.

Sei $G \subseteq \prod GL(V_i)$ die Untergruppe der Elemente, die alle s_j fixieren.

Lemma

Sei $h\colon \mathbb{S} \longrightarrow \prod GL(V_i)$ eine HS. Genau dann sind alle s_j vom Typ $(0,0)$, wenn h über G faktorisiert.

Betrachten Familien von HS der folgenden Form:

G eine lineare algebraische Gruppe $/\mathbb{R}$, X eine Zusammenhangskomponente des Raums der Homomorphismen $\mathbb{S} \longrightarrow G$.

So dass für eine Einbettung $G \subseteq \prod GL(V_i)$ gilt:

Gewichtszerlegung Für alle i ist die Gewichtszerlegung von V_i unabh. von $h \in X$.

VarHS Für eine geeignete kpl. Str. auf X ist für alle i die Fam. $h \in X$ von HS auf V_i eine VarHS.

Polarisierung Ist V die Komp. vom Gewicht n eines V_i, so existiert $\Psi\colon V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}(-n)$, das für alle $h \in X$ eine Polarisierung der zugehörigen HS auf V ist.

Sei X gegeben, und es gelte **Gewichtszerlegung**. Sei G_1 die kleinste algebraische Untergruppe von G mit $h(\mathbb{S}) \subseteq G_1$ für alle $h \in X$.

Theorem

1. *X besitzt eine eindeutig best. komplexe Struktur, für die $(h)_{h \in X}$ eine holomorphe Familie von HS ist.*
2. **VarHS** $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Lie}(G)$ *hat Typ* $(-1,1),(0,0),(1,-1)$ *(vermöge der adj. Darst.).*
3. **Polarisierung** $\Longleftrightarrow$ *G_1 reduktiv und* $\mathrm{int} h(i)$ *induziert Cartan-Involution auf G_1^{ad}.*

Korollar

Die Bedingungen sind unabhängig von der Einbettung $G \subseteq \prod GL(V_i)$.

ad 1

Die Abbildung

$$\varphi\colon X \longrightarrow \mathrm{Flag}(\bigoplus V_i), \quad h \mapsto F_h^\bullet$$

ist injektiv.

Sei $h_0 \in X$, $K_0 = \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})^+}(h_0)$. Es ist $X = G(\mathbb{R})^+ h_0$ und durch

$$G(\mathbb{R})^+/K_0 \xrightarrow{\cong} X$$

wird X zu einer reellen Mf.

h_0 induziert HS auf $\mathfrak{g}$ und $\mathrm{End}(\bigoplus V_i)$. Es ist

$$\mathrm{Lie}\, K_0 = \mathfrak{g}^{0,0}, \qquad \text{also } T_{h_0}X \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{0,0}.$$

Erhalte

$$T_{h_0}X \cong \begin{array}{ccc} \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{0,0} & \longrightarrow & \mathrm{End}(V)/\mathrm{End}(V)^{0,0} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathfrak{g}(\mathbb{C})/F^0 & \longrightarrow & \mathrm{End}(V(\mathbb{C}))/F^0 \end{array} \cong T_{h_0}\mathrm{Flag}$$

Die Abbildung von oben links nach unten rechts ist $d\varphi_{h_0}$, also ist X fast-komplexe Untermf. von Flag.

ad 2

Wegen **Gewichtszerlegung** ist die HS auf $\mathfrak{g}$ rein vom Gewicht 0.

Die Familie ist eine Variation von HS, wenn

$$\mathrm{im}\, d\varphi_{h_0} \subseteq \bigoplus \mathrm{Hom}(F^p_{h_0}, F^{p-1}_{h_0}/F^p_{h_0}),$$

also genau dann, wenn

$$\mathrm{im}\, d\varphi_{h_0} \subseteq F^{-1}\mathrm{End}(V(\mathbb{C}))/F^0\mathrm{End}(V(\mathbb{C})).$$

Das heißt gerade, dass $F^{-1}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ gelten muss.

ad 3

Sei $G_2 \subseteq G_1$ die kleinste algebraische Untergruppe, so dass $h(U_1) \subseteq G_2$ für alle $h \in X$.

Eine BLF $\Psi\colon V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}(-n)$ erfüllt genau dann **Polarisierung**, wenn $(2\pi i)^n\Psi\colon V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$ invariant unter G_2, und eine $h(i)$-Polarisierung ist.

Also äquivalent: $\operatorname{int}(h(i))$ ist Cartan-Involution von G_2.

Schließlich:

- G_1 ist Quotient von $G_2 \times \mathbb{G}_m$,
- $Z(G_2)$ ist kompakt,
- $G_1^{\mathrm{ad}} = G_2^{\mathrm{ad}}$.

Beziehung zu hermitesch-symmetrischen Bereichen

Satz

1. *X mit der komplexen Struktur aus dem Theorem ist ein hermitesch-symmetrischer Bereich.*
2. *Jeder irreduzible hermitesch symmetrische Bereich hat diese Form.*

Beweis.

ad 1 OE G einfach, vom adjungierten Typ, X eine $G(\mathbb{R})^+$-Konjugationsklasse von nicht-trivialen Morphismen $h\colon \mathbb{S}/\mathbb{G}_m \longrightarrow G$ mit den obigen Bedingungen.

G nicht kompakt, sonst wäre h trivial.
Sei $h \in X$, $X = G(\mathbb{R})^+/\mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})}(h)$.

$h(i)$ operiert auf dem Tangentialraum $T_hX = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{0,0}$ durch -1, also ist X symmetrische Riem. Mf. □

Beweis.

ad 2 Sei X ein hermitesch symmetrischer Raum. Für $x \in X$ sei h_x die Verkettung

$$\mathbb{S} \xrightarrow{z \mapsto z/\bar{z}} U_1 \xrightarrow{u_x} \mathrm{Aut}(X)^+.$$

Ist $K = \mathrm{Stab}(x)$, so ist $\mathrm{Lie}\, K$ vom Typ $(0,0)$, und $T_x X = \mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}(X)/\,\mathrm{Lie}\, K$ vom Typ $(-1,1),(1,-1)$.

Da $h(i) = u_x(-1)$, ist $\mathrm{int}\, h(i)$ eine Cartan-Involution. □