

Semistabilität von gewichtet filtrierten Vektorräumen

Sascha Orlik

Vorgelegt als Diplomarbeit im Fachbereich Mathematik
Bergische Universität – Gesamthochschule Wuppertal
Sommersemester 1996

Inhaltsverzeichnis

1	Numerierte Filtrationen	4
1.1	Filtrationen	4
1.2	Numerische Invarianten + Stabilität	8
1.3	Harder-Narasimhan Filtrationen	11
1.4	Beziehungen zur GIT	16
1.5	Stratifikation von \mathcal{F}	24
2	Beispiele	32
2.1	$\mathcal{F} = \mathbb{P}(V)$	33
2.2	$\dim V = 3$	35
2.3	$\dim V = 4$	39
2.3.1	$\{\mu\} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$	39
2.3.2	$\{\mu\} = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $\{\mu\} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_3)$	80
2.3.3	$\{\mu\} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$	91
2.3.4	$\{\mu\} = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2)$ und $\{\mu\} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2)$	99
2.3.5	$\{\mu\} = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)$	101
2.4	V ist ein 4-dim. sympl. Vektorraum	103

Einleitung

Die von D. Mumford entwickelte „Geometrische Invariantentheorie (GIT)“ dient zur Konstruktion von algebraischen Quotientenvarietäten, für Aktionen von reduktiven Gruppen auf projektiven algebraischen Varietäten. Dabei bildet der semistabile Ort X^{ss} einer projektiven algebraischen Varietät X , hinsichtlich dieser Quotientenbildung, eine offene interessante Untervarietät.

Für holomorphe Vektorbündel auf einer kompakten Riemannschen Fläche existiert ein wesentlich elementarerer Begriff der Semistabilität, welcher auch von Mumford stammt. Dabei heißt ein Vektorbündel \mathcal{E} semistabil (bzw. stabil) $\Leftrightarrow \forall \mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ gilt: $\frac{\deg \mathcal{F}}{rk \mathcal{F}} \leq \frac{\deg \mathcal{E}}{rk \mathcal{E}}$ (bzw. $<$). Hierbei bezeichne \deg (bzw. rk) den Grad (bzw. den Rank) des jeweiligen Vektorbündels. Zwischen diesen Begriffen und denjenigen aus der GIT, bzgl. der Aktion der GL_n auf dem Produkt von gewissen Grassmannschen, existieren Beziehungen, welche benutzt werden um Modulräume von semistabilen (bzw. stabilen) Vektorbündel zu konstruieren.

Auf ein noch elementarerer Beispiel hat Faltings ([?]) hingewiesen. Man startet mit endlich-dimensionalen k -Vektorräumen V und betrachtet endlich viele absteigende \mathbb{Z} -Filtrationen $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_i^\bullet | i \in I\}$ auf V . Dabei heißt dann das Paar (V, \mathcal{F}) semistabil $\Leftrightarrow \mu(W) \leq \mu(V)$ für alle nichttrivialen Unterräume W von V . Hierbei sei $\mu(W) = \dim(W)^{-1} \sum_{i,n} n \dim(\mathcal{F}_i^n(W)/\mathcal{F}_i^{n+1}(W))$, wobei $\mathcal{F}_i^n(W) = \mathcal{F}_i^n \cap W$. Es zeigt sich, daß viele der Sätze von Vektorbündel auf Riemannschen Flächen sich auf solche Objekte übertragen lassen. Der tieflegendenste Satz ist dabei derjenige von Faltings+Totaro ([?],[?]), der besagt, daß das Tensorprodukt zweier semistabiler Objekte wieder semistabil ist. Diese Themen wurden im übrigen in verschiedenen Vorlesungen zur GIT von M. Rapoport an der BUGH Wuppertal behandelt.

In dieser Diplom-Arbeit wird eine Variante des vorherigen betrachtet. Wir betrachten zunächst für einen beliebigen Körper k gewisse Objekte $(V, \bigoplus_i V_i, \mathcal{F})$, bestehend aus einem endlich-dimensionalen Vektorraum V mit einer Zerlegung $V = \bigoplus_i V_i$ in ein-dimensionale Unterräume und einer absteigenden \mathbb{Z} -Filtration \mathcal{F} auf V . Diese Objekte bilden mit noch zu definierenden Morphismen eine Kategorie. Dabei werden zum Testen der Semistabilität, entsprechend obiger Formel, nur solche Unterräume betrachtet, die sich durch ein Teil der fixierten Geraden aufspannen lassen. Wir zeigen für diese Variante im 1.Kapitel die Existenz der Harder-Narasimhan-Filtration, ihre Semikontinuität unter Spezialisierung und ihre Beziehung zur GIT-Semistabilität, falls \mathcal{F} als Punkt einer partiellen Flaggenvarietät \mathcal{F} aufgefaßt wird. Schließlich beschreiben wir den semistabilen Ort \mathcal{F}^{ss} von \mathcal{F} bzw. die Stratifikation von \mathcal{F} , welche durch die Harder-Narasimhan-Filtration definiert wird. Es stellt sich heraus, daß jene Stratifizierung sehr kompliziert sein kann, wie Beispiele belegen. Diesen Beispielen ist das 2.Kapitel gewidmet. Hier berechnen wir für einen vier-dimensionalen Vektorraum sämtliche auftretene Harder-Narasimhan-Filtrationen und deren Strata, wobei wir diese zum Teil graphisch (HN-Polygone, Hasse-Diagramme) notieren.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof.Dr. Michael Rapoport für die intensive Betreuung bei der Erstellung dieser Diplom-Arbeit bedanken. Außerdem bedanke ich mich bei Werner Bauer, Roland Huber, Markus Reineke und Torsten Wedhorn für einige nützliche Gespräche.

Kapitel 1

Numerierte Filtrationen

1.1 Filtrationen

In diesem Paragraphen wird zunächst der Begriff einer \mathbb{Z} -Filtration (bzw. \mathbb{Q} -Filtration) eines endlich-dimensionalen Vektorraumes eingeführt. Darauf aufbauend betrachten wir gewisse Objekte, bestehend aus einem \mathbb{Z} -filtrierten Vektorraum und einer Geradenzerlegung des zugrundeliegenden Vektorraumes. Jene Objekte bilden eine Kategorie, mit der wir uns den Rest dieser Arbeit beschäftigen werden.

Sei k ein beliebiger Körper und V ein endlich-dimensionaler k -Vektorraum.

Definition 1.1.1 *Eine \mathbb{Z} -numerierte Filtration des k -Vektorraumes V (kurz \mathbb{Z} -Filtration) ist eine monoton fallende Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\bullet : \mathbb{Z} &\longrightarrow \{U \mid U \text{ ist Unterraum von } V\}, \\ \alpha &\longmapsto V^\alpha \end{aligned}$$

so daß $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ existieren mit $V^\alpha = (0), V^\beta = V$.

Bemerkung 1.1.1 1. Wenn die Situation es erfordert, schreibt man auch \mathcal{F}^α oder $\mathcal{F}^\alpha V$ oder $V_{\mathcal{F}}^\alpha$ anstelle von V^α .

2. Gelegentlich gibt man eine Filtration auf einem Vektorraum V in der folgenden Art und Weise an:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\alpha_1} \subset \mathcal{F}^{\alpha_2} \subset \dots \subset \mathcal{F}^{\alpha_r} = V &\quad \text{oder} \\ (\mathcal{F}^1, \alpha_1), (\mathcal{F}^2, \alpha_2), \dots, (\mathcal{F}^r, \alpha_r) = (V, \alpha_r) &\quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$V^\bullet = (0) \subset \underset{\alpha_1}{\mathcal{F}^1} \subset \underset{\alpha_2}{\mathcal{F}^2} \subset \dots \subset V. \quad \alpha_n$$

Hierbei werden nur die \mathcal{F}^{α_i} angegeben, bei denen „Sprünge“ vorhanden sind, d.h. $gr^{\alpha_i}(V) \neq (0)$, wobei für $\alpha \in \mathbb{Z}$, $gr^\alpha(V)$ den Subquotienten $V^\alpha/V^{\alpha+1}$ bezeichnet.

3. Entsprechend obiger Definition hat man den Begriff einer \mathbb{Q} -Filtration. Sei für $\alpha \in \mathbb{Q}$, $V^{\alpha+} := \sum_{\beta > \alpha} V^\beta$. Schließlich definiert man $gr^\alpha(V) = V^\alpha/V^{\alpha+}$.

Wie sich der Leser schon denken kann, lassen sich zu Operationen aus der linearen Algebra neue Filtrationen aus Bestehenden zusammensetzen. Seien nämlich V, W zwei \mathbb{Z} -filtrierte Vektorräume. Für $\alpha \in \mathbb{Z}$ setze

$$\begin{aligned} (V \oplus W)^\alpha &:= V^\alpha \oplus W^\alpha \\ (V \otimes W)^\alpha &:= \sum_{\beta+\gamma=\alpha} V^\beta \otimes W^\gamma \\ (V^\vee)^\alpha &:= (V^{1-\alpha})^\perp. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichne V^\vee den Dualraum von V und $(V^{1-\alpha})^\perp$ das orthogonale Komplement.

Ferner sei für ein Unterraum U von V

$$\begin{aligned} U^\alpha &:= U \cap V^\alpha \\ (V/U)^\alpha &:= (U + V^\alpha)/U \end{aligned}$$

Durch sukzessives Anwenden dieser Regeln erhält man ebenso Filtrationen auf $V^{\otimes n}, Sym^n V, \wedge^n V$.

Wie anfangs angekündigt definieren wir nun eine Kategorie $k - \mathcal{FV}$, deren Objekte für uns von besonderer Bedeutung sein werden.

Ein Objekt

$$(V, \bigoplus_{i \in I(V)} V_i, \mathcal{F}) \in \text{Ob}(k - \mathcal{FV})$$

ist ein Tripel bestehend aus einem k -Vektorraum V mit einer Zerlegung in eindimensionale Unterräume $V = \bigoplus_{i \in I(V)} V_i$ und einer \mathbb{Z} -Filtration \mathcal{F} auf V .

Ein Morphismus

$$f \in \text{Mor}((V, \bigoplus_{i \in I(V)} V_i, \mathcal{F}), (W, \bigoplus_{i \in I(W)} W_i, \mathcal{F}'))$$

ist ein Homomorphismus von Vektorräumen $f : V \rightarrow W$, so daß folgende Eigenschaften erfüllt sind.

1. $\forall i \in I(V) \quad \exists j \in I(W)$ mit $f(V_i) \subset W_j$.
2. Falls $I(f) := \{i \in I(V) \mid f(V_i) \neq 0\}$, so ist die von f induzierte Abbildung $\kappa(f) : I(V) \rightarrow I(W)$ injektiv.
3. $f(V^\alpha) \subset W^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}$

Bemerkung 1.1.2 1. Die Kategorie $k - \mathcal{FV}$ ist nicht additiv, da die Summe von zwei Morphismen i.a kein Morphismus ist.

2. Wählt man Basen von V bzw. W , die den Geradenzerlegungen entsprechen, so hat die zugehörige Darstellungsmatrix in jeder Zeile und Spalte höchstens einen von Null verschiedenen Eintrag.
3. Zur abkürzenden Notation schreibt man einfach $V \in k - \mathcal{FV}$, anstatt $(V, \bigoplus_{i \in I(V)} V_i, \mathcal{F}) \in \text{Ob}(k - \mathcal{FV})$, wenn keine Irrtümer zu erwarten sind.

Definition 1.1.2 Sei $V \in k - \mathcal{FV}$.

- a.) Ein Unterobjekt ist ein Objekt W zusammen mit einem Morphismus $f : W \rightarrow V$ für den gilt :

$$I(f) = I(V) \quad (\Leftrightarrow f \text{ injektiv}) \text{ und } f(W^\alpha) = V^\alpha \cap f(W).$$

- b.) Ein Quotientenobjekt ist ein Objekt W zusammen mit einem Morphismus $f : V \rightarrow W$ für den gilt :

$$\kappa(f) \text{ ist surjektiv } (\Leftrightarrow f \text{ surjektiv}) \text{ und } f(V^\alpha) = W^\alpha.$$

Achtung : Diese Definition eines Unterobjektes (bzw. Quotientenobjektes) unterscheidet sich von dem Begriff des Monomorphismus (bzw. Epimorphismus) in der Kategorie.

In offensichtlicher Weise sieht man, daß diese Kategorie bzgl. Tensorprodukt, alternierenden Produkt, direkte Summe etc. abgeschlossen ist. Außerdem läßt sich zu je zwei Unterobjekten eines Objektes der Durchschnitt bilden. Sind nämlich $U_1, U_2 \in k - \mathcal{FV}$, so ist $U_1 \cap U_2 \in k - \mathcal{FV}$ mit folgender Geradenzerlegung

$$U_1 \cap U_2 = \bigoplus_{i: (U_1)_i \cap U_2 \neq 0} (U_1)_i$$

und Filtrierung

$$(U_1 \cap U_2)^\alpha = U_1^\alpha \cap U_2^\alpha.$$

Bezeichne weiter $\mathbf{Hom}(V, W) = V^\vee \otimes W$ für zwei Objekte V, W . Dann ist $\mathbf{Hom}(V, W) \in k - \mathcal{FV}$. Wie man leicht feststellt, läßt sich unter der Identifizierung $V^\vee \otimes W \cong \mathbf{Hom}(V, W)$, $\mathbf{Hom}(V, W)^\alpha$ als $\{f : V \rightarrow W \mid f(V^\beta) \subset W^{\alpha+\beta} \forall \beta\}$ auffassen. Schließlich sei $\mathbf{1}$ das eindimensionale Objekt $(k, k, \mathcal{F}) \in k - \mathcal{FV}$ mit

$$\mathcal{F}^\alpha = \begin{cases} k & : \alpha \leq 0 \\ 0 & : \alpha > 0 \end{cases},$$

welches das neutrale Objekt bzgl. des Tensorproduktes ist.

Desweiteren haben wir auch kurze exakte Sequenzen in unserer Kategorie.

Definition 1.1.3 *Eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

in $k - \mathcal{FV}$ ist eine Folge von Morphismen, so daß

$$0 \longrightarrow V'^\alpha \longrightarrow V^\alpha \longrightarrow V''^\alpha \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von k -Vektorräumen ist $\forall \alpha \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$

$$0 \longrightarrow \text{gr}^\alpha(V') \longrightarrow \text{gr}^\alpha(V) \longrightarrow \text{gr}^\alpha(V'') \longrightarrow 0$$

exakt $\forall \alpha \in \mathbf{Z}$.

Zum Schluß dieses Paragraphen nun noch die Definition der \mathbb{Q} -Filtrierung eines Objektes aus $k - \mathcal{FV}$, welche für die Harder-Narasimhan Filtration von Bedeutung ist.

Definition 1.1.4 *Eine \mathbb{Q} -Filtration eines Objektes $V \in k - \mathcal{FV}$ ist eine monoton fallende Abbildung*

$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{F} : \mathbb{Q} &\longrightarrow \{U \mid U \text{ ist Unterobjekt von } V\}, \\ \alpha &\longmapsto {}^\alpha V \end{aligned}$$

so daß $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ existieren mit ${}^\alpha V = (0), {}^\beta V = V$.

Entsprechend wie bei dem Begriff der \mathbb{Q} -Filtration eines Vektorraumes V seien ${}^{\alpha+}V$ und ${}^\alpha \text{gr}(V)$ definiert. Außerdem werden die gleichen Notationen, bei der Darstellung einer Filtrierung benutzt.

1.2 Numerische Invarianten + Stabilität

Dieser Paragraph behandelt u.a. numerische Invarianten von filtrierten Vektorräumen, welche grundlegend für die folgenden Abschnitte dieser Arbeit sind. Eine Invariante ist dem Leser bereits bekannt, da sie lediglich die Dimension des zugrundeliegenden Vektorraumes ist. Repräsentiere $(V, \mathcal{F}) = V$ einen eindimensionalen filtrierten Vektorraum. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $gr^\alpha(V) \neq (0)$. Diese ganze Zahl α wird der Grad von V genannt (Bez. $\alpha = \deg V$). Schließlich sei für einen Vektorraum V mit $\bigwedge^{\max} V$ die maximale äußere Potenz bezeichnet, d.h. $\bigwedge^{\max} V = \bigwedge^{\dim V} V$.

Definition 1.2.1 Sei $(V, \mathcal{F}) = V$ ein filtrierter Vektorraum.

- a.) $rk V = \dim V$ heißt der Rang von V .
- b.) $\deg(V) = \deg(\bigwedge^{\max} V)$ heißt der Grad von V .
- c.) $slope(V) = \frac{\deg V}{rk V}$ heißt der Anstieg von V , falls $V \neq (0)$.

Lemma 1.2.1 Sei $f : V \rightarrow W$ ein Morphismus in $k\text{-}\mathcal{FV}$ mit $rk V = rk W = 1$, $f \neq 0$. Dann ist $\deg(V) \leq \deg(W)$.

Beweis: Klar.

Lemma 1.2.2 Sei $0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz in $k\text{-}\mathcal{FV}$. Dann gilt $\deg(V) = \deg(V') + \deg(V'')$.

Beweis: Nach Wahl eines Schnittes aus $\text{Hom}(V'', V)$ zur Abb. $V \rightarrow V''$ sieht man, daß $V = V' \oplus V''$. Es folgt $\bigwedge^{\max} V \cong \bigwedge^{\max} V' \otimes \bigwedge^{\max} V''$ als Objekte in $k\text{-}\mathcal{FV}$. Offensichtlich gilt dann wegen $rk(\bigwedge^{\max} V') = rk(\bigwedge^{\max} V'') = 1$ und der Definition einer Filtration bzgl. des Tensorproduktes das Behauptete. \square

Folgender Satz bietet die Möglichkeit den Grad eines Objektes aus unserer Kategorie praktikabler berechnen zu können.

Satz 1.2.1 $\deg(V) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \alpha \dim gr^\alpha(V)$

Beweis: 1. Fall : $\dim V \leq 1$. Dann ist die Behauptung trivial.

2. Fall : Sei $W \subset V$ ein Unterobjekt kleinerer Dimension mit $W \neq (0)$. Betrachte die kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow W \longrightarrow V \longrightarrow V/W \longrightarrow 0$. Mit vorigem Lemma und Induktion nach $\dim V$ folgt :

$$\begin{aligned} \deg(V) &= \deg(W) + \deg(V/W) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \alpha \dim gr^\alpha(W) + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \alpha \dim gr^\alpha(V/W) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \alpha (\dim gr^\alpha(W) + \dim gr^\alpha(V/W)) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \alpha \dim gr^\alpha(V) \square \end{aligned}$$

Kommen wir nun zum Begriff der Stabilität bzw. Semistabilität eines Objektes V . Diese Begriffsbildung ist, wie wir in 4 sehen werden, eng mit derjenigen in der geometrischen Invariantentheorie (GIT) bekannten, verbunden.

Definition 1.2.2 Sei $V \in k - \mathcal{FV}$.

V heißt semistabil (stabil) $:\Leftrightarrow$ Für alle echten Unterobjekte $W \neq (0)$ von V gilt $\text{slope}(W) \leq \text{slope}(V)$ ($\text{slope}(W) < \text{slope}(V)$)

Proposition 1.2.1 Sei $0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz in $k - \mathcal{FV}$. Es gilt: $\text{slope}(V') \leq \text{slope}(V) \Leftrightarrow \text{slope}(V) \leq \text{slope}(V'')$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{\deg V}{\text{rk } V} \leq \frac{\deg V' + \deg V''}{\text{rk } V' + \text{rk } V''} &\Leftrightarrow \deg V' \text{ rk } V'' \leq \deg V'' \text{ rk } V' \\ &\Leftrightarrow \frac{\deg V' + \deg V''}{\text{rk } V' + \text{rk } V''} \leq \frac{\deg V''}{\text{rk } V''}. \end{aligned}$$

□

Hieraus ergibt sich folgende äquivalente Formulierung der Semistabilität.

Korollar 1.2.1 Ein Objekt V ist semistabil \Leftrightarrow Für alle Quotientenobjekte W von V gilt $\text{slope}(V) \leq \text{slope}(W)$.

Zum Schluß dieses Abschnittes nun noch einige Eigenschaften des Anstieges.

Proposition 1.2.2 Seien V, W aus $k - \mathcal{FV}$.

- a.) $\text{slope}(V \otimes W) = \text{slope}(V) + \text{slope}(W)$
- b.) $\text{slope}(V^\vee) = - \text{slope}(V)$

- c.) $\min\{\text{slope}(V), \text{slope}(W)\} \leq \text{slope}(V \oplus W) \leq \max\{\text{slope}(V), \text{slope}(W)\}$
- d.) Sind V, W semistabil vom gleichen Anstieg μ , so ist $V \oplus W$ semistabil vom Anstieg μ .
- e.) Falls $V \oplus W$ semistabil vom Anstieg μ , so sind V und W semistabil vom Anstieg μ .

Beweis: a.) Man hat folgende Isomorphie

$$\Lambda^{\max}(V \otimes W) \cong \Lambda^{\max}(\text{rk}W) \otimes \Lambda^{\max}(\text{rk}V).$$

Da obige Behauptung offensichtlich für eindimensionale Objekte gilt, hat man $\deg(V \otimes W) = \deg(V^{\text{rk}W}) + \deg(W^{\text{rk}V}) = \text{rk}W \deg V + \text{rk}V \deg W \Rightarrow \text{slope}(V \otimes W) = \text{slope}(V) + \text{slope}(W)$.

b.) Verifiziere $\Lambda^{\max}(V^{\vee} \otimes V) \cong \mathbf{1}$.

c.) Benutze Proposition 1.2.1 .

d.) Folgt aus c) .

e.) Folgt aus c) . □

1.3 Harder-Narasimhan Filtrationen

Jedem Objekt $(V, \bigoplus_{i \in I(V)} V_i, \mathcal{F}) \in k - \mathcal{FV}$ wollen wir nun eine eindeutig bestimmte \mathbb{Q} -Filtration dieses Objektes zuordnen. Diese Filtration wird die Harder-Narasimhan Filtration zu $(V, \bigoplus_{i \in I(V)} V_i, \mathcal{F})$ genannt [?]. Diese Filtrierung ist dadurch charakterisiert, daß sie das betrachtete Objekt als sukzessive Erweiterung von semistabilen Objekten auffaßt. Dabei hatte Faltings die Idee, diese Filtration durch die „slopes“ zu parametrisieren. Diese Vorgehensweise kommt u.a. der Beweistechnik zugute.

Für ein Objekt V aus $k - \mathcal{FV}$ gibt es nach Lemma 1.2.1, Proposition 1.2.2 d) und der Tatsache, daß ein Element aus dieser Kategorie nur endlich viele Unterobjekte besitzt, ein eindeutig bestimmtes Unterobjekt V_{\max} maximaler Dimension mit

$$\text{slope}(V_{\max}) = \max \{ \text{slope}(V') \mid V' \text{ Unterobjekt von } V \} .$$

Offensichtlich ist V_{\max} semistabil und es gilt V semistabil $\Leftrightarrow V = V_{\max}$.

Satz 1.3.1 (Harder-Narasimhan)

- a.) Sei $V = (V, \bigoplus_{i \in I(V)} V_i, \mathcal{F}) \in k - \mathcal{FV}$. Dann existiert eine \mathbb{Q} -Filtration $\bullet V$ von V mit folgender Eigenschaft: Falls ${}^\alpha \text{gr}(V) \neq (0)$, so ist ${}^\alpha \text{gr}(V)$ semistabil vom Anstieg α .
- b.) Die \mathbb{Q} -Filtrierungen aus a) sind kompatibel mit Morphismen ,
d. h. $f({}^\alpha V) \subset {}^\alpha W$ für $f \in \text{Mor}(V, W)$.

Korollar 1.3.1 Die \mathbb{Q} -Filtration aus a.) ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Setze in b.) $V=W$ und $f=\text{id}$. □

Dieses Korollar gibt Anlass zu folgender Definition.

Definition 1.3.1 Die oben genannte \mathbb{Q} -Filtration eines Objektes $V \in k - \mathcal{FV}$ heißt die Harder-Narasimhan Filtration (HN-Filtration) oder kanonische Filtration von V .

Beweis: a.) Sei $\alpha_0 = \text{slope}(V_{\max})$. Wie am Anfang dieses Abschnittes erwähnt ist V_{\max} semistabil. Setze

$${}^\alpha V = \begin{cases} V_{\max} & , \quad \alpha \leq \alpha_0 \\ (0) & , \quad \alpha > \alpha_0 \end{cases} .$$

Per Induktion nach dem Rang des Objektes existiert die HN-Filtration

$${}^{\alpha_1} W \subset {}^{\alpha_2} W \subset \dots \subset {}^{\alpha_n} W$$

zu $V/\alpha_0 V$, d.h. es ist $\alpha_i \text{gr}(V/\alpha_0 V)$ semistabil vom Anstieg $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$. Sei $\alpha_i V$ das Urbild von $\alpha_i W$ unter der kanonischen Projektion $p : V \rightarrow V/\alpha_0 V$. Wegen $\alpha_i \text{gr}(V) \cong \alpha_i \text{gr}(V/\alpha_0 V)$ $i = 1, \dots, n$ ist $\alpha_i \text{gr}(V)$ semistabil vom Anstieg α_i . Es bleibt zu zeigen : $\alpha_0 > \alpha_1$.
Dazu betrachte die exakte Sequenz $0 \rightarrow \alpha_0 V \rightarrow \alpha_1 V \rightarrow \alpha_1 V/\alpha_0 V \rightarrow 0$.
Auf Grund der Eigenschaft von $\alpha_0 V = V_{\max}$ gilt $\alpha_0 = \text{slope}(\alpha_0 V) > \text{slope}(\alpha_1 V)$ und somit nach Proposition 1.2.1 $\alpha_0 > \text{slope}(\alpha_1 V / \alpha_0 V) = \alpha_1$. □

Bevor wir nun zum Beweis von Teil b.) kommen, noch ein Hilfssatz.

Lemma 1.3.1 *Seien $V, W \in k\text{-}\mathcal{FV}$ semistabil mit $\text{slope}(V) > \text{slope}(W)$. Dann ist $\text{Mor}(V, W) = (0)$.*

Beweis: Angenommen es existiert ein $f \in \text{Mor}(V, W)$ mit $f \neq 0$. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Kern}(f) & \hookrightarrow & V & \longrightarrow & V/\text{Kern}(f) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow f & & \downarrow \cong \hat{f} \\ 0 & \longleftarrow & \text{cokern}(f) & \longleftarrow & W & \hookrightarrow & \text{Im}(f) \longleftarrow 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Die kanonisch induzierte Abbildung \hat{f} induziert einen Morphismus $\bigwedge^{\max}(V/\text{Kern}(f)) \rightarrow \bigwedge^{\max} \text{Im}(f)$. Nach Lemma 1.2.1 folgt $\text{deg}(V/\text{Kern}(f)) \leq \text{deg}(\text{Im}(f))$ und somit $\text{slope}(V/\text{Kern}(f)) \leq \text{slope}(\text{Im}(f))$.
Insgesamt gilt wegen der Semistabilität von V bzw. W somit $\text{slope}(V) \leq \text{slope}(V/\text{Kern}(f)) \leq \text{slope}(\text{Im}(f)) \leq \text{slope}(W)$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. □

Beweis: von b) Der Beweis wird per Induktion über die Länge der Harder-Narasimhan Filtration von V geführt.

Ist zunächst V semistabil vom Anstieg α_0 , so gilt

$$\alpha V = \begin{cases} V & \alpha \leq \alpha_0 \\ (0) & \alpha > \alpha_0 \end{cases} .$$

Annahme $f(\alpha_0 V) \not\subset \alpha_0 W$. Dann existiert eine größte Zahl $\tilde{\alpha} \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{\alpha} < \alpha_0$, $\tilde{\alpha} \text{gr}(W) \neq (0)$ und $f(\alpha_0 V) \subset \tilde{\alpha} W$. Also ist die durch f induzierte Abbildung $\hat{f} : \alpha_0 V \rightarrow \tilde{\alpha} \text{gr}(W)$ von Null verschieden mit $\text{slope}(\alpha_0 V) = \alpha_0 > \tilde{\alpha} = \text{slope}(\tilde{\alpha} \text{gr}(W))$. Dies ist ein Widerspruch zu Lemma 1.3.1 $\Rightarrow f(\alpha_0 V) \subset \alpha_0 W$ und damit $f(\alpha V) \subset \alpha W \forall \alpha \leq \alpha_0$.

Induktionsschritt : Betrachte die HN-Filtration

$$\alpha_0 V \subset \alpha_1 V \subset \dots \subset \alpha_r V = V$$

von V . Offensichtlich ist dann

$$\alpha_0 V \subset \alpha_1 V \subset \dots \subset \alpha_{r-1} V$$

die kanonische Filtration von ${}^{\alpha_{r-1}}V =: \tilde{V}$. Per Induktionsvoraussetzung können wir schließen, daß $\tilde{f}({}^{\alpha}\tilde{V}) \subset {}^{\alpha}W \forall \alpha \in \mathbb{Z}$, wobei \tilde{f} die Einschränkung von f auf \tilde{V} sei. Zu zeigen bleibt: $f({}^{\alpha}V) \subset {}^{\alpha}W \quad \forall \alpha \leq \alpha_r \Leftrightarrow f({}^{\alpha_r}V) \subset {}^{\alpha_r}W$. Falls $f({}^{\alpha_r}V) \not\subset {}^{\alpha_r}W$, so wähle wiederum $\tilde{\alpha} \in \mathbb{Z}$ größtmöglich mit $\tilde{\alpha} < \alpha_r$, $\tilde{\alpha}gr(W) \neq (0)$ und $f({}^{\alpha_r}V) \subset \tilde{\alpha}W$. Per Induktion gilt $f({}^{\alpha_{r-1}}V) \subset {}^{\alpha_{r-1}}W \subset \tilde{\alpha}W$. Dann ist der kanonische Morphismus $\tilde{f}: {}^{\alpha_r}V/{}^{\alpha_{r-1}}V \rightarrow \tilde{\alpha}gr(W)$ wohldefiniert und von Null verschieden. Nach Lemma 1.3.1 ist $\alpha_r \leq \tilde{\alpha}$. Dies ist ein Widerspruch. \square

Als nächstes wollen wir die Harder-Narasimhan Filtrationen in die Ebene projizieren. Sei dazu $\bullet V$ eine \mathbb{Q} -Filtration durch Unterobjekte von $V \in k - \mathcal{FV}$. Betrachte folgende Punkte

$$(0, 0), (rk^{\alpha_1}V, \deg({}^{\alpha_1}V)), (rk^{\alpha_2}V, \deg({}^{\alpha_2}V)) \dots, (rk^{\alpha_r}V, \deg({}^{\alpha_r}V)) \in \mathbb{R}^2,$$

wobei die $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$ gerade die Sprungstellen der \mathbb{Q} -Filtration seien. Falls wir nun diese Punkte in der Ebene verbinden erhalten wir ein Polygon $p(\bullet V)$. Ist speziell $\bullet V$ die HN-Filtration von V , so schreibt man $\text{HN-p}(V)$ anstatt $p(\bullet V)$. $\text{HN-p}(V)$ heißt das Harder-Narasimhan-Polygon von V . Weiterhin sei $p(V)$, nicht zu verwechseln mit $p(\bullet V)$, die Kante welche die Punkte $(0,0), (rk V, \deg(V))$ miteinander verbindet.

Bemerkung 1.3.1 *Da sich die Anstiege der ${}^{\alpha}gr(V) \neq (0)$ streng monoton fallend verhalten, sieht man, daß $\text{HN-p}(V)$ ein konvexes Polygon beschreibt.*

Es soll nun noch für ein Objekt $V \in k - \mathcal{FV}$ der Zusammenhang zwischen dem HN-Polygon und $p(\bullet V)$ für eine beliebige \mathbb{Q} -Filtration $\bullet V$ erläutert werden. Bezeichne $\pi_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektionsabbildung auf die x-Achse. Weiter sei \mathcal{P} die Menge aller konvexen Polygone mit Anfangspunkt $(0, 0)$ in der Ebene. Definiere eine Ordnungsrelation \preceq auf \mathcal{P} wie folgt.

$$P \preceq P' \quad P, P' \in \mathcal{P} : \Leftrightarrow P \text{ liegt unterhalb } P' \text{ und es gilt } \pi_x(P) \subset \pi_x(P')$$

Satz 1.3.2 *Sei $V \in k - \mathcal{FV}$ und $V' \subset V$ ein Unterobjekt. Dann gilt*

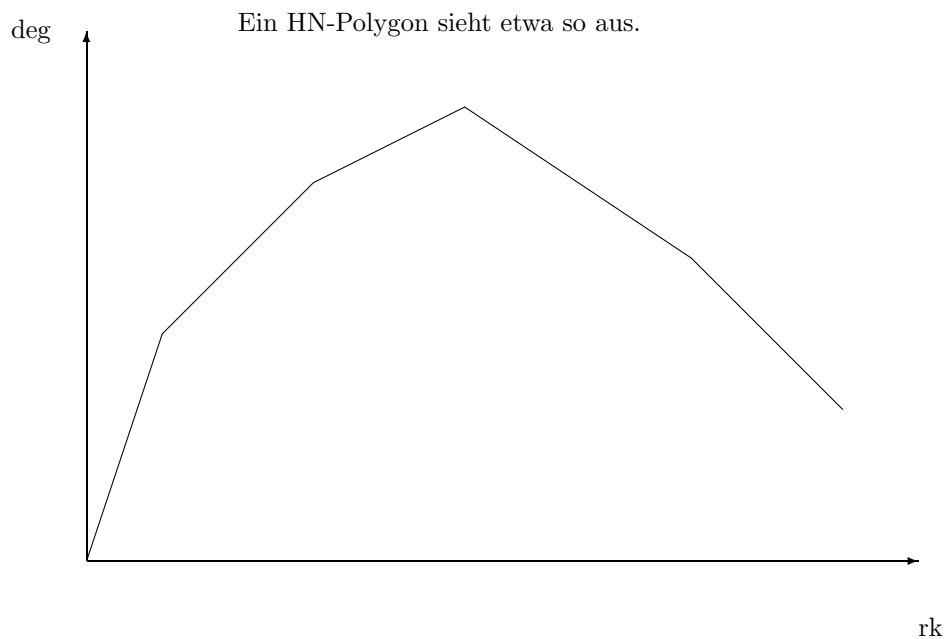
$$p(V') \preceq \text{HN-p}(V).$$

Beweis: Der Beweis wird durch Induktion über die Länge der HN-Filtration von V geführt.

Ist V semistabil, so gilt per Definition $\text{slope}(V') \leq \text{slope}(V) \Rightarrow p(V') \preceq p(V) = \text{HN-p}(V)$.

Nun zum allgemeinen Fall. Sei $\alpha_0 := \text{slope}(V_{\max})$.

Fall 1: $\text{slope}(V') = \alpha_0$. Aus der Maximalitätseigenschaft von V_{\max} bzgl. der



Dimension gilt $\text{rk } V' \leq \text{rk } V_{\max} \Rightarrow p(V') \preceq HN - p(V)$.

Fall 2: $\text{slope}(V') < \alpha_0$. Setze $r = \text{rk } V_{\max}$, $r' = \text{rk } V'$, $d' = \text{deg}(V')$. Betrachte die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow V_{\max} \cap V' \longrightarrow V_{\max} \oplus V' \longrightarrow (V_{\max} + V')' \longrightarrow 0 ,$$

wobei $(V_{\max} + V')'$ das Quotientenobjekt von $V_{\max} \oplus V'$ darstellt, welches durch den kanonischen Homomorphismus $V_{\max} \oplus V' \longrightarrow V_{\max} + V'$ charakterisiert ist. Nach Lemma 1.3.1 gilt $\text{deg}((V_{\max} + V')') \leq \text{deg}(V_{\max} + V')$. Deshalb folgt $\text{deg}(V_{\max} + V') + \text{deg}(V_{\max} \cap V') \geq \text{deg}(V_{\max}) + \text{deg}(V')$.

Sei $s = \text{rk}(V_{\max} \cap V')$. Da $\text{slope}(V_{\max} \cap V') \leq \text{slope}(V_{\max}) = \alpha_0$ ist $\text{deg}(V_{\max} \cap V') \leq \alpha_0 s \Rightarrow \text{deg}(V_{\max} + V') \geq \alpha_0(r - s) + d'$.

Fall a: $r = s \Rightarrow V_{\max} \subset V' \Rightarrow V'/V_{\max}$ ist ein Unterobjekt von V/V_{\max} . Per Induktionsvoraussetzung gilt $p(V'/V_{\max}) \leq \text{HN-p}(V/V_{\max})$. Wegen der Additivität von rk und deg in exakten Sequenzen, sieht man, daß

$$p(V') = (\text{rk}V_{\max}, \text{deg}(V_{\max})) + p(V'/V_{\max}) \quad (*)$$

Dann liegt aber $p(V')$ unterhalb von

$$\text{HN} - p(V) = (\text{rk}V_{\max}, \text{deg}(V_{\max})) + \text{HN} - p(V/V_{\max}). \quad (*)$$

Fall b: $s < r$ Wegen $\text{slope}(V') < \alpha_0$ sieht man folgende Ungleichung.

$$\text{deg}(V_{\max} + V') > \frac{d'}{r'}(r - s) + \frac{d'}{r'}r' = \frac{d'}{r'}(r + r' - s)$$

$\Rightarrow \text{slope}(V_{\max} + V') > \text{slope}(V')$. Per Induktionsvoraussetzung gilt

$$p(V_{\max} + V'/V_{\max}) \leq \text{HN} - p(V/V_{\max}).$$

Wie im Fall a) verifiziert man $p(V_{\max} + V') \leq \text{HN-p}(V)$.

Da $\text{rk}(V') < \text{rk}(V_{\max} + V')$ und $\text{slope}(V') < \text{slope}(V_{\max} + V')$ liegt $p(V')$ unterhalb von $p(V_{\max} + V')$. Aus Transitivitätsgründen folgt die Behauptung. \square

Korollar 1.3.2 *Für eine beliebige \mathbb{Q} -Filtration $\bullet V$ des Objektes $V \in k - \mathcal{FV}$ gilt $p(\bullet V) \leq \text{HN-p}(V)$ und beide Polygone haben die selben Eckpunkte.*

Beweis: : Das Polygon $p(\bullet V)$ wird durch Verbindung der Punkte $(\text{rk}(\bullet V), \text{deg}(\bullet V))$ realisiert. Da $\text{HN-p}(V)$ ein konvexes Polygon darstellt, folgt die Behauptung. \square

(*) Hier bedeutet das „+“ eine Addition (bzw. komponentenweise Addition) von Vektoren in der Ebene.

1.4 Beziehungen zur GIT

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen der in 2 eingeführten Definition von Semistabilität und der Semistabilität in der Invariantentheorie nach Mumford [?] erörtern. Die Varietäten, welche hierbei im Bezug auf die Semistabilität in GIT, betrachtet werden sind die sogenannten Flaggenvarietäten. Doch zuvor noch einige Eigenschaften von filtrierten Vektorräumen.

Sei V ein k -Vektorraum für einen beliebigen Körper k .

Sind $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ \mathbb{Q} -Filtrationen auf V , so induziert \mathcal{F}' (bzw. \mathcal{F}) für jedes $\alpha \in \mathbb{Q}$ auf kanonische Weise eine \mathbb{Q} -Filtrierung auf $gr_{\mathcal{F}}^{\alpha}(V)$ bzw. $gr_{\mathcal{F}'}^{\alpha}(V)$.

Definition 1.4.1 Für zwei \mathbb{Q} -Filtrationen $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ eines k -Vektorraumes V sei $\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}' \rangle := \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Q}} \alpha \beta \dim gr_{\mathcal{F}}^{\alpha}(gr_{\mathcal{F}'}^{\beta}(V))$.

Lemma 1.4.1 Sei \mathcal{F} eine \mathbb{Z} -Filtration und \mathcal{F}' eine \mathbb{Q} -Filtration des Vektorraumes V . Dann gilt

$$\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}' \rangle =$$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} (\text{slope}_{\mathcal{F}'}(V_{\mathcal{F}}^{\alpha}) - \text{slope}_{\mathcal{F}'}(V)) \dim V_{\mathcal{F}}^{\alpha} + \text{slope}_{\mathcal{F}}(V) \text{slope}_{\mathcal{F}'}(V) \dim V,$$

wobei $V_{\mathcal{F}}^{\alpha}$ eine durch \mathcal{F}' induzierte Filtrierung ererbt.

Beweis: Allgemein gilt für einen beliebigen \mathbb{Z} -filtrierten Vektorraum (V, \mathcal{F})

$$\deg V = N_{\mathcal{F}}(V) \dim V + \sum_{\alpha > N_{\mathcal{F}}(V)} \dim V^{\alpha} = M \dim V + \sum_{\alpha > M} \dim V^{\alpha}$$

$\forall M \in \mathbb{Z} : M < N_{\mathcal{F}}(V)$, wobei $N_{\mathcal{F}}(V)$ die kleinste ganze Zahl ist mit $gr^{N_{\mathcal{F}}(V)}(V) \neq (0)$.

Also

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} (\text{slope}_{\mathcal{F}'}(V_{\mathcal{F}}^{\alpha}) - \text{slope}_{\mathcal{F}'}(V)) \dim V_{\mathcal{F}}^{\alpha} + \text{slope}_{\mathcal{F}}(V) \text{slope}_{\mathcal{F}'}(V) \dim V \\ = & \sum_{\alpha > N_{\mathcal{F}}(V)} (\text{slope}_{\mathcal{F}'}(V_{\mathcal{F}}^{\alpha}) - \text{slope}_{\mathcal{F}'}(V)) \dim V_{\mathcal{F}}^{\alpha} + \deg_{\mathcal{F}}(V) \text{slope}_{\mathcal{F}'}(V) \\ = & \sum_{\alpha > N_{\mathcal{F}}(V)} (\text{slope}_{\mathcal{F}'}(V_{\mathcal{F}}^{\alpha}) - \text{slope}_{\mathcal{F}'}(V)) \dim V_{\mathcal{F}}^{\alpha} \\ & + \sum_{\alpha > N_{\mathcal{F}}(V)} \dim V_{\mathcal{F}} \text{slope}_{\mathcal{F}'}(V) + N_{\mathcal{F}}(V) \dim V \text{slope}_{\mathcal{F}'}(V) \\ = & \sum_{\alpha > N_{\mathcal{F}}(V)} (\text{slope}_{\mathcal{F}'}(V_{\mathcal{F}}^{\alpha}) \dim V_{\mathcal{F}}^{\alpha} + N_{\mathcal{F}}(V) \deg_{\mathcal{F}'}(V)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha > N_{\mathcal{F}}(V)} \deg_{\mathcal{F}'}(V_{\mathcal{F}}^{\alpha}) + N_{\mathcal{F}}(V) \deg_{\mathcal{F}'}(V) \\
&= \sum_{\alpha > N_{\mathcal{F}}(V)} \left(\sum_{\beta \in \mathbb{Q}} \beta \dim gr_{\mathcal{F}'}^{\beta}(V_{\mathcal{F}}^{\alpha}) \right) + N_{\mathcal{F}}(V) \sum_{\beta \in \mathbb{Q}} \beta \dim gr_{\mathcal{F}'}^{\beta}(V) \\
&= \sum_{\beta \in \mathbb{Q}} \beta \left(\sum_{\alpha > N_{\mathcal{F}}(V)} \dim gr_{\mathcal{F}'}^{\beta}(V_{\mathcal{F}}^{\alpha}) + N_{\mathcal{F}}(V) \dim gr_{\mathcal{F}'}^{\beta}(V) \right) \\
&= \sum_{\beta \in \mathbb{Q}} \beta \left(\sum_{\alpha > N_{\mathcal{F}}(V)} \dim (gr_{\mathcal{F}'}^{\beta}(V))_{\mathcal{F}}^{\alpha} + N_{\mathcal{F}}(V) \dim gr_{\mathcal{F}'}^{\beta}(V) \right) \\
&= \sum_{\beta \in \mathbb{Q}} \beta \deg_{\mathcal{F}}(gr_{\mathcal{F}'}^{\beta}(V)) = \sum_{\beta \in \mathbb{Q}} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \beta \alpha gr_{\mathcal{F}}^{\alpha}(gr_{\mathcal{F}'}^{\beta}(V)) \\
&= \langle \mathcal{F}, \mathcal{F}' \rangle .
\end{aligned}$$

□

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir:

Korollar 1.4.1 Sei $(V, \bigoplus_{i \in I(V)} V_i, \mathcal{F}') \in k - \mathcal{FV}$ semistabil vom Anstieg 0

$$\implies \langle \mathcal{F}, \mathcal{F}' \rangle \leq 0 \quad \forall \mathbb{Q}\text{-Filtrationen } \mathcal{F} \text{ des Objektes } V.$$

Beweis: : 1. Fall : \mathcal{F} ist \mathbb{Z} -Filtration. Dann folgt die Behauptung aus obiger Formel.

2. Fall : \mathcal{F} ist \mathbb{Q} -Filtration. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{N}$, so daß die Filtration $\lambda\mathcal{F}$, definiert durch $V_{\lambda\mathcal{F}}^{\alpha} = V_{\mathcal{F}}^{\lambda\alpha}$, eine \mathbb{Z} -Filtration darstellt. Es gilt : $\langle \lambda\mathcal{F}, \mathcal{F}' \rangle = \lambda \langle \mathcal{F}, \mathcal{F}' \rangle$. Hieraus resultiert die Behauptung. □

Für den verbleibenden Teil dieser Arbeit sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Sei nun für eine lineare algebraische Gruppe G über k

$$X_*(G) = \{ \lambda : \mathbb{G}_m \longrightarrow G \mid \lambda \text{ ist Homomorphismus von algebraischen Gruppen} \}$$

die Menge der Einparameter-Untergruppen (1-PS) von G, \mathbb{G}_m bezeichne dabei die multiplikative Gruppe über k . Ist nun V ein endlich dimensionaler k -Vektorraum und $G = GL(V)$, so induziert bekanntlich jede 1-PS eine Zerlegung $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V(i)$, wobei $V(i) = \{ v \in V \mid \lambda(t)v = t^i v \quad \forall t \in \mathbb{G}_m \}$.

Betrachte nun den Fall, daß $G = T$ ein maximaler Torus in $GL(V)$ ist. Dann ist $X_*(T)$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang n , also $X_*(T) \cong \mathbb{Z}^n$, und folglich $X_*(T)_{\mathbb{Q}} := X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^n$.

Jedes $\nu \in X_*(T)_{\mathbb{Q}}$ definiert eine \mathbb{Q} -Filtration. In der Tat sei $n \in \mathbb{N}$, so daß $n\nu \in X_*(T)$ und $\alpha = \frac{\beta}{\gamma} \in \mathbb{Q}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}$. Betrachte

$$V(\alpha) := \{ v \in V \mid \nu(t)v = t^{\alpha} v \quad \forall t \in k^* \} := \{ v \in V \mid (n\nu)(t)^{\gamma} v = t^{n\beta} v \quad \forall t \in k^* \}.$$

Wie man leicht verifiziert ist $V(\alpha)$ wohldefiniert, und es gilt $V = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Q}} V(\alpha)$.

Die zu ν assoziierte \mathbb{Q} -Filtration \mathcal{F}_ν sei definiert durch $\mathcal{F}_\nu^\alpha = \bigoplus_{\beta \leq \alpha} V(\beta)$

Bezeichnet T_0 den Diagonaltorus in $GL(V)$, so haben wir unter der kanonischen Identifikation $X_*(T_0) = \mathbb{Q}^n$ ein Skalarprodukt auf $X_*(T_0)$, welches vom Standardskalarprodukt des \mathbb{Q}^n herrührt. Für einen beliebigen anderen maximalen Torus T in $GL(V)$ haben wir folgende Isomorphie:

$$X_*(T) \cong X_*(T_0) = \mathbb{Q}^n.$$

Dabei ist diese Entsprechung bis auf Permutation der Einträge im \mathbb{Q}^n (d.h. bis auf der Aktion der Weylgruppe S_n) eindeutig. Infolgedessen können wir vom Standardskalarprodukt des $X_*(T)$ reden.

Lemma 1.4.2 *Sind $\nu, \mu \in X_*(T)\mathbb{Q}$, so hat man folgende Gleichung.*

$$\langle \mathcal{F}_\mu, \mathcal{F}_\nu \rangle = \langle \mu, \nu \rangle,$$

wobei $\langle \mu, \nu \rangle$ das Standardskalarprodukt von μ, ν bezeichne.

Beweis: Wähle eine Basis v_1, \dots, v_n von V , so daß T den Diagonaltorus in $GL(V)$ entspricht. Seien $\nu = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \mu = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Q}^n$. Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} gr_{\mathcal{F}_\nu}^\alpha(V) &= V(\alpha) = \text{span}\{v_i | \alpha_i = \alpha\} \\ gr_{\mathcal{F}_\mu}^\beta(V) &= V(\beta) = \text{span}\{v_j | \beta_j = \beta\} \end{aligned}$$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Weiter gilt $gr_{\mathcal{F}_\nu}^\alpha(gr_{\mathcal{F}_\mu}^\beta(V)) = V(\alpha) \cap V(\beta)$

$$\begin{aligned} \implies \langle \mathcal{F}_\mu, \mathcal{F}_\nu \rangle &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Q}} \alpha \beta gr_{\mathcal{F}_\nu}^\alpha(gr_{\mathcal{F}_\mu}^\beta(V)) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Q}} \alpha \beta \dim(V(\alpha) \cap V(\beta)) \\ &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Q}} \alpha \beta \#\{i | \alpha_i = \alpha, \beta_i = \beta\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = \langle \mu, \nu \rangle. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.4.3 *Sei $(V, \bigoplus_i V_i, \mathcal{F}) \in k\text{-}\mathcal{FV}$ und T der Diagonaltorus in $GL(V)$ bzgl. der Geradenzerlegung $V = \bigoplus_i V_i$. Man hat eine 1 : 1 Beziehung*

$$\{\mathbb{Q}\text{-Filtrierungen von } (V, \bigoplus_i V_i, \mathcal{F})\} \xrightarrow{\sim} X_*(T)\mathbb{Q}.$$

Dabei entspricht $X_*(T)$ gerade den \mathbb{Z} -Filtrierungen durch Unterobjekte von $(V, \bigoplus_i V_i, \mathcal{F})$.

Beweis: Sei $\bullet V$ eine \mathbb{Q} -Filtrierung des oben genannten Objektes. Sei $\nu = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ das n -Tupel aus $X_*(T)_{\mathbb{Q}}$ mit ${}^{\alpha}gr(V) = \bigoplus_{\alpha_i=\alpha} V_i$. Ist auf der anderen Seite $\nu = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Element von $X_*(T)_{\mathbb{Q}}$, so gibt nach obiger Konstruktion eine eindeutig bestimmte \mathbb{Q} -Filtration $\bullet V$ mit ${}^{\alpha}gr(V) = \bigoplus_{\alpha_i=\alpha} V_i$. Wie man sofort feststellt handelt es sich bei diesen konstruierten Abbildungen um zueinander inverse Bijektionen. \square

Bevor wir in der Theorie weiter voranschreiten, soll im folgenden kurz auf einige Begriffe der geometrischen Invariantentheorie eingegangen werden.

Sei X eine G -Varietät über den Körper k und \mathcal{L} ein Linienbündel auf X . Wir erinnern daran [?], daß eine G -Aktion von G auf \mathcal{L} (oder eine G -Linearisierung von \mathcal{L}) ein System von Isomorphismen $\alpha_g : g^*\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ ist, so daß folgende Eigenschaften gelten

$$(i) \alpha_e = id_{\mathcal{L}}$$

$$(ii) \alpha_{gh} : (gh)^*\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \text{ entspricht der Komposition}$$

$$(gh)^*\mathcal{L} \cong h^*(g^*\mathcal{L}) \xrightarrow{h^*(\alpha_g)} h^*\mathcal{L} \xrightarrow{\alpha_h} \mathcal{L}$$

Falls nun $U \subset X$ eine G -stabile offene Teilmenge darstellt, so hat man eine Operation von G auf $\Gamma(U, \mathcal{L})$ wie folgt :

$$\Gamma(U, \mathcal{L}) \xrightarrow{g^*} \Gamma(g^{-1}U, g^*\mathcal{L}) = \Gamma(U, g^*\mathcal{L}) \xrightarrow{\alpha_g} \Gamma(U, \mathcal{L})$$

Speziell der Fall $U = X$ liefert offene Teilräume

$$X^{ss}(\mathcal{L}) := \{x \in X \mid \exists r \geq 0, f \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes r})^G, x \in X_f, X_f \text{ affin}\}$$

$$X_0^s(\mathcal{L}) := \{x \in X \mid \exists r > 0, f \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes r})^G, x \in X_f, X_f \text{ affin}\}$$

G_x ist endlich und die Operation von G auf X_f
ist abgeschlossen}

der semistabilen bzw. stabilen Punkte.

Kommen wir nun zum Begriff des Anstieges in einem Punkt $x \in X$ bzgl. einer 1-PS von G und \mathcal{L} . Für den restlichen Abschnitt wird X stets als vollständig vorausgesetzt.

Sei $x \in X$ und $\lambda \in X_*(G)$. Betrachte den Morphismus $\sigma_x \circ \lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow X$ mit

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x : G & \longrightarrow & X \\ g & \longmapsto & gx \end{array}$$

Da X vollständig ist erweitert sich $\sigma_x \circ \lambda$ in eindeutiger Weise zu einem Morphismus $\phi : \mathbb{G}_a \rightarrow X$. Wie man leicht feststellt ist $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)x =: \phi(0)$ ein Fixpunkt der Operation von \mathbb{G}_m via λ . Also hat man eine Operation von \mathbb{G}_m auf $\mathcal{L}(\phi(0))$ durch einen Charakter μ d. h. $t * v = t^\mu v, v \in \mathcal{L}(\phi(0))$. Dann heißt

$$\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda) := -\mu$$

der Anstieg von λ in x bzgl. \mathcal{L} .

Sei speziell $X \subset \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät mit linearisierter G -Aktion, d.h. man hat eine Darstellung $G \rightarrow GL(V), V = k^n$, so daß X invariant ist unter der induzierten Aktion auf \mathbb{P}^n . Ist $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$, so sind Liftungen der G -Aktion von X auf \mathcal{L} und linearisierte G -Aktionen auf X zueinander äquivalent. Wir schreiben dann $\mu(x, \lambda)$ anstelle von $\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda)$. Liegt $\tilde{x} \in \mathbb{A}^{n+1}$ über x und ist $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V(i)$ die Eigenraumzerlegung bzgl. einer 1-PS λ , so gilt $\mu(x, \lambda) = \max \{-r \mid \tilde{x}_r \neq 0\}$, falls $\tilde{x} = \sum_i \tilde{x}_i, \tilde{x}_i \in V_i$.

Hier noch einige Eigenschaften des Anstieges :

- $\mu^{\mathcal{L}}(gx, g\lambda g^{-1}) = \mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda)$.
- Sei $y := \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)x$. Dann gilt $\mu^{\mathcal{L}}(y, \lambda) = \mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda)$.
- $\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda^r) = r \mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda)$.
- Sei $f : X \rightarrow Y$ ein G -Morphismus und \mathcal{M} ein G -linearisiertes Linienbündel auf Y . Ist $\mathcal{L} := f^*(\mathcal{M})$ das G -linearisierte Linienbündel auf X , so gilt $\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda) = \mu^{\mathcal{M}}(f(x), \lambda)$.
- Sei $X = X_1 \times \dots \times X_m$, \mathcal{L}_i G -linearisierte Linienbündel auf X_i . Bezeichnet \mathcal{L} das Linienbündel $p_1^*(\mathcal{L}_1) \otimes \dots \otimes p_m^*(\mathcal{L}_m)$ auf X , so ist $\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda) = \sum_{i=1}^m \mu^{\mathcal{L}_i}(x_i, \lambda)$.

Zum Schluß sei noch das Hilbert-Mumford Kriterium erwähnt.

Satz (Hilbert-Mumford) Sei G eine reductive algebraische Gruppe, X eine vollständige G -Varietät und \mathcal{L} ein Linienbündel auf X mit gelifteter G -Aktion. Dann gilt :

$$\begin{aligned} x \in X^{ss}(\mathcal{L}) &\Leftrightarrow \mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda) \geq 0 \quad \forall \lambda \in X_*(G) \\ x \in X_0^s(\mathcal{L}) &\Leftrightarrow \mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda) > 0 \quad \forall \lambda \in X_*(G), \lambda \neq 0. \end{aligned}$$

Wir fixieren nun einen Vektorraum V der Dimension n über den algebraisch abgeschlossenen Körper $k, \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_r, \alpha_i \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$ und natürliche

Zahlen n_1, \dots, n_r mit $\sum_{i=1, \dots, r} n_i = n$.
Sei

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \mathcal{F}(V, \alpha_1, \dots, \alpha_r, n_1, \dots, n_r) \\ &:= \{ \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ ist } \mathbb{Z}\text{-Filtration von } V, \dim gr_{\mathcal{F}^{\alpha_i}}(V) = n_i, i = 1, \dots, r \}. \end{aligned}$$

\mathcal{F} ist eine projektive Varietät, welche isomorph zur Flaggenvarietät vom Typ $(n_1, n_1 + n_2, \dots, n_1 + \dots + n_r)$ ist ([?] S. 241).

Betrachte für $d \leq n$ die Menge $Gr_d(V)$ aller d-dimensionalen Untervektorräume von V . Die Abbildung

$$\begin{aligned} pl : Gr_d(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(\wedge^d V) \\ W &\longmapsto \wedge^d W, \end{aligned}$$

die die „Plücker-Abbildung“ genannt wird, vererbt $Gr_d(V)$ die Struktur einer projektiven Varietät. Man nennt $Gr_d(V)$ die Grassmannsche Varietät der d-dimensionalen Unterräume von V ([?] S. 239-240). Aus diesen Fakten ergeben sich abgeschlossene Einbettungen

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \prod_{i=1}^r Gr_{n_1+\dots+n_i}(V) \hookrightarrow \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(\wedge^{n_1+\dots+n_i} V).$$

Weiter operiert die algebraische Gruppe $G = GL(V)$ in kanonischer Weise auf den Varietäten $\mathcal{F}, \prod_{i=1}^r Gr_{n_1+\dots+n_i}(V), \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(\wedge^{n_1+\dots+n_i} V)$, so daß die abgeschlossenen Immersionen G -äquivariant sind.

Sei \mathcal{L}_i das ample Linienbündel auf $Gr_{n_1+\dots+n_i}$, welches die Plücker-Einbettung definiert. Wir haben eine G -Linearisierung auf \mathcal{L}_i , die durch die G -Linearisierung auf $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\wedge^{n_1+\dots+n_i} V)}(1)$ induziert ist. Schließlich sei \mathcal{L} das G -linearisierte ample Linienbündel auf \mathcal{F} , welches durch die Einschränkung des Geradenbündels

$$\mathcal{M} := pr_1^*(\mathcal{L}_1^{\otimes(\alpha_1-\alpha_2)}) \otimes pr_2^*(\mathcal{L}_2^{\otimes(\alpha_2-\alpha_3)}) \otimes \dots \otimes pr_{r-1}^*(\mathcal{L}_{r-1}^{\otimes(\alpha_{r-1}-\alpha_r)}) \otimes pr_r^*(\mathcal{L}_r^{\otimes\alpha_r})$$

auf $\prod_{i=1}^r Gr_{n_1+\dots+n_i}(V)$ gegeben ist. Dabei bezeichnen

$$pr_i : \prod_{i=1}^r Gr_{n_1+\dots+n_i}(V) \longrightarrow Gr_{n_1+\dots+n_i}(V)$$

die jeweiligen Projektionsabbildungen.

Lemma 1.4.4 *Sei λ eine 1-PS von G und $x \in \mathcal{F}$ ein Punkt, der fest ist unter der Aktion von λ . Bezeichne \mathcal{F}_x die zu x gehörige \mathbb{Z} -Filtration, so gilt*

$$\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda) = - \langle \mathcal{F}_x, \mathcal{F}_\lambda \rangle.$$

Also ist x GIT semistabil bzgl. \mathcal{L} und λ , genau dann wenn $\langle \mathcal{F}_x, \mathcal{F}_\lambda \rangle \leq 0$.

Beweis: Betrachte die abgeschlossenen Einbettungen

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \prod_{i=1}^r Gr_{n_1+\dots+n_i}(V) \hookrightarrow \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(\wedge^{n_1+\dots+n_i} V) \cong \mathbb{P}(\otimes_{i=1}^r \wedge^{n_1+\dots+n_i} V)$$

Sei $x = (x_1, \dots, x_r)$ und V^{α_i} der zu x_i gehörige Unterraum von V . Auf Grund der Definition von \mathcal{L} gilt $\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda) = \mu^{\mathcal{M}}((\det V^{\alpha_1}, \dots, \det V^{\alpha_r}), \lambda)$
 $= \mu((\det V^{\alpha_1})^{\otimes \alpha_1 - \alpha_2} \otimes (\det V^{\alpha_2})^{\otimes \alpha_2 - \alpha_3} \otimes \dots \otimes (\det V^{\alpha_r})^{\otimes \alpha_r}, \lambda)$. Da x von λ fixiert wird ist $\otimes_{i=1}^r (\det V^{\alpha_i})^{\otimes (\alpha_i - \alpha_{i+1})}$ stabiler Unterraum von $\otimes_{i=1}^r (\wedge^{n_1+\dots+n_i} V)^{\otimes (\alpha_i - \alpha_{i+1})}$ bzgl. der Operation von λ und man hat

$$\otimes_{i=1}^r (\det V^{\alpha_i})^{\otimes (\alpha_i - \alpha_{i+1})} \cong \otimes_{i=1}^r (\det gr_{\mathcal{F}_x}^{\alpha_i}(V))^{\otimes \alpha_i}.$$

Wähle nun, nach dem Bruhat-Lemma, eine Basis

$$\{e_1, \dots, e_{n_1}, e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2}, \dots, e_{n_1+\dots+n_{r-1}+1}, \dots, e_{n_1+\dots+n_r}\}$$

von V bzgl. der die Flaggen $\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_\lambda$ erzeugt werden. In der Tat existiert eine solche Basis, so daß gilt :

$$(i) \quad \text{Es existiert } \nu = (\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{n_1}, \underbrace{\alpha_2, \dots, \alpha_2}_{n_2}, \dots, \underbrace{\alpha_r, \dots, \alpha_r}_{n_r}) \in X_*(T) \text{ mit } \mathcal{F}_\nu = \mathcal{F}_x$$

$$(ii) \quad \lambda \in X_*(T)$$

wobei T der Diagonaltorus zu dieser Basis sei. Sei $\lambda \in X_*(T)$ von der Form

$$\lambda = (\beta_1^{(\alpha_1)}, \dots, \beta_{n_1}^{(\alpha_1)}, \beta_1^{(\alpha_2)}, \dots, \beta_{n_2}^{(\alpha_2)}, \dots, \beta_1^{(\alpha_r)}, \dots, \beta_{n_r}^{(\alpha_r)})$$

Es ist $\{e_{n_1+\dots+n_i+1}, \dots, e_{n_1+\dots+n_{i+1}}\}$ Basis von $V(\alpha_i) = gr_{\mathcal{F}_x}^{\alpha_i}(V)$. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} \lambda(t)(e_{n_1+\dots+n_i+1} \wedge \dots \wedge e_{n_1+\dots+n_{i+1}}) &= \lambda(t)e_{n_1+\dots+n_i+1} \wedge \dots \wedge \lambda(t)e_{n_1+\dots+n_{i+1}} \\ &= t^{\sum_{j=1}^{n_i} \beta_j^{(\alpha_i)}} (e_{n_1+\dots+n_i+1} \wedge \dots \wedge e_{n_1+\dots+n_{i+1}}). \end{aligned}$$

Also operiert λ auf $\otimes_{i=1}^r (\det gr_{\mathcal{F}_x}^{\alpha_i}(V))^{\otimes \alpha_i}$ durch den Charakter

$$\sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^{n_i} \beta_j^{(\alpha_i)} \right) \alpha_i = \langle \nu, \lambda \rangle = \langle \mathcal{F}_\lambda, \mathcal{F}_x \rangle.$$

□

Nun zum zentralen Satz dieses Paragraphen der, wie am Anfang erwähnt, den Zusammenhang zwischen den unterschiedlichen Begriffen der Semistabilität beschreibt.

Satz 1.4.1 Sei $(V, \bigoplus_{i \in I} V_i, \mathcal{F})$ ein Objekt aus $k - \mathcal{FV}$ und T der zur Geradenzerlegung assoziierte Diagonaltorus in $SL(V)$. Dann ist $(V, \bigoplus_{i \in I} V_i, \mathcal{F})$ semistabil \iff Der entsprechende Punkt $x \in \mathcal{F}$ mit $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}$ ist GIT-semistabil bzgl. T und \mathcal{L} .

Beweis: \mathcal{F} ist semistabil \iff Für alle Unterobjekte $V' \subset V$ gilt $\text{slope}_{\mathcal{F}}(V') \leq \text{slope}_{\mathcal{F}}(V) \iff$ Für alle \mathbb{Z} -Filtrationen \mathcal{F}' des Objektes V vom Totalgrad 0 ist $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} (\text{slope}_{\mathcal{F}}(V_{\mathcal{F}'}^{\alpha}(V)) - \text{slope}_{\mathcal{F}}(V)) \dim V_{\mathcal{F}'}^{\alpha} \leq 0$.

In der Tat ist $V' \subset V$ ein Unterobjekt, so existieren $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$, so daß die \mathbb{Z} -Filtrierung $((V', \alpha_1), (V, \alpha_2))$ Totalgrad 0 hat. Also folgt: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$ ist semistabil $\iff \forall \lambda \in X_*(T)$ gilt $\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}_{\lambda} \rangle \leq 0$. Fixiere jetzt eine 1-PS $\lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ von T d. h. $\lambda \in X_*(T)$. Betrachte nun \mathcal{F}_{x_0} , wobei $x_0 := \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)x$ der entsprechende Punkt in \mathcal{F} ist. Dann ist x_0 ein Fixpunkt unter der Operation von λ und man hat $\mathcal{F}_{x_0}^{\alpha} = \bigoplus_{i=1}^n (V_i \cap \mathcal{F}_x^{\alpha})$.

$$\Rightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}}^{\alpha}(\text{gr}_{\mathcal{F}_{\lambda}}^i(V)) = \text{gr}_{\mathcal{F}}^{\alpha}(\bigoplus_{\alpha_j = \alpha_i} V_j) = \text{gr}_{\mathcal{F}_{x_0}}^{\alpha}(\bigoplus_{\alpha_j = \alpha_i} V_j) = \text{gr}_{\mathcal{F}_{x_0}}^{\alpha}(\text{gr}_{\mathcal{F}_{\lambda}}^i(V))$$

und somit $\langle \mathcal{F}_{x_0}, \mathcal{F}_{\lambda} \rangle = \langle \mathcal{F}_x, \mathcal{F}_{\lambda} \rangle$.

Insgesamt : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$ ist semistabil $\iff \forall \lambda \in X_*(T)$ gilt $\langle \mathcal{F}_{x_0}, \mathcal{F}_{\lambda} \rangle$

$= \langle \mathcal{F}_x, \mathcal{F}_{\lambda} \rangle = -\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda) \leq 0$. Nach dem Hilbert-Mumford Kriterium folgt die Behauptung. \square

1.5 Stratifikation von \mathcal{F}

In diesem Paragraphen fixieren wir ein Tripel $(V, \alpha_\bullet, n_\bullet)$, wobei V ein endlich-dimensionaler k -Vektorraum (k algebraisch abgeschlossen) und $\alpha_\bullet : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $n_\bullet : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ die entsprechenden Funktionen der „ Sprungstellen “ bzw. der „ Dimensionsanstiege “ darstellen. Anders ausgedrückt betrachten wir die Flaggenvarietät \mathcal{F} mit Elementen \mathcal{F} der Form $\dim \operatorname{gr}_{\mathcal{F}}^{\alpha_i}(V) = n_{\alpha_i}$. Nach Satz 1.3.1 existiert zu jedem Objekt aus $k - \mathcal{FV}$ eine eindeutig bestimmte Harder-Narasimhan Filtration. Für ein zugehöriges HN-Polygon P bezeichne \mathcal{F}^P die Menge aller Filtrationen in \mathcal{F} auf V , welche das gleiche HN-Polygon besitzen d.h.

$$\mathcal{F}^P = \{x \in \mathcal{F} \mid \text{HN} - p(\mathcal{F}_x) = P\} .$$

Folglich hat man eine Zerlegung

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\substack{\bullet \\ P \text{ ist HN-Polygon}}} \mathcal{F}^P .$$

Wir werden sehen, daß es sich bei den \mathcal{F}^P um lokal-abgeschlossene Untervarietäten handelt. Dabei geht es uns darum, Aussagen über die jeweiligen Abschlüsse zu treffen. Außerdem gehen wir der Frage nach, welche möglichen HN-Polygone auftreten können. Weiterhin unterteilen wir die \mathcal{F}^P in kleinere Strata und werden in Bezug auf diese „feinere“ Stratifizierung die oben genannten Aspekte nochmals aufgreifen.

Bevor wir uns diesen Fragenstellungen zuwenden, müssen wir den Begriff einer Filtration von Vektorräumen über k , auf freie Moduln über k -Algebren verallgemeinern.

Sei R eine k -Algebra.

Definition 1.5.1 *Eine Filtration eines endlich erzeugten freien Moduls R -Moduls M , kurz R -Filtration, ist eine Sequenz*

$$(0) = \mathcal{F}^{\alpha_0} \subset \mathcal{F}^{\alpha_1} \subset \dots \mathcal{F}^{\alpha_r} = M \quad \alpha_i \in \mathbb{Q}$$

von R -Untermoduln, so daß folgende äquivalente Bedingungen erfüllt sind.

1. M/\mathcal{F}^{α_i} ist projektiv $\forall i$.
2. $\operatorname{gr}^{\alpha}(M) = \mathcal{F}^{\alpha_i}/\mathcal{F}^{\alpha_{i+1}}$ ist projektiv $\forall i$.
3. \mathcal{F}^{α_i} ist lokal auf $\operatorname{Spec}(R)$ direkter Summand von $M \forall i$.

Wie man aus [?] (Kap. 1 9.9.) erfährt stellt \mathcal{F} den folgenden Funktor dar.

$$\begin{aligned} F : \{ k\text{-Algebren} \} &\longrightarrow \text{Set} \\ R &\longmapsto \{ R\text{-Filtr. auf } V \otimes_k R \text{ mit } \operatorname{rg} \operatorname{gr}^{\alpha}(V \otimes_k R) = n_{\alpha} \} \end{aligned}$$

Deshalb entspricht ein Morphismus $\text{Spec}(R) \rightarrow \mathcal{F}$ einer Filtration \mathcal{F} des R-Moduls $V \otimes_k R$ mit $\text{rg } gr_{\mathcal{F}}^{\alpha}(V \otimes_k R) = n_{\alpha}, \alpha \in \mathbb{Q}$. Insbesondere können wir nicht nur den abgeschlossenen Punkten von \mathcal{F} , sondern auch jedem beliebigen Punkt $x \in \mathcal{F}$ kanonisch eine Filtration auf $V \otimes_k \kappa(x)$ zuordnen ($\kappa(x)$ sei der Residuum-Körper an der Stelle x).

Sei nun speziell $O=R$ ein diskreter Bewertungsring über k und $f : \text{Spec}(O) \rightarrow \mathcal{F}$ ein Morphismus von k -Schemata. Also hat man eine O-Filtration \mathcal{F} auf $V \otimes_k O$. Bezeichnet η den allgemeinen Punkt und s den speziellen Punkt von $\text{Spec}(O)$, so erhält man auf kanonische Weise \mathbb{Q} -Filtrationen $\mathcal{F}_{\eta}, \mathcal{F}_s$ auf $V \otimes_k \kappa(\eta)$ bzw. $V \otimes_k \kappa(s)$.

Satz 1.5.1 *Es gilt: $HN - p(V \otimes_k \kappa(\eta), \mathcal{F}_{\eta}) \leq HN - p(V \otimes_k \kappa(s), \mathcal{F}_s)$, wobei beide Polygone gleiche Endpunkte besitzen.*

Beweis: Sei also \mathcal{F} eine O-Filtration.

1. *Schritt* : Wegen der Isomorphismen von filtrierten Vektorräumen

$$\begin{aligned} \max_{\kappa(s)} \bigwedge (V \otimes_k \kappa(s)) &\cong \left(\bigwedge_O (V \otimes_k O) \right) \otimes_O \kappa(s) \quad \text{und} \\ \max_{\kappa(\eta)} \bigwedge (V \otimes_k \kappa(\eta)) &\cong \left(\bigwedge_O (V \otimes_k O) \right) \otimes_O \kappa(\eta) \end{aligned}$$

gilt $\text{deg}(V \otimes_k \kappa(s), \mathcal{F}_s) = \text{deg}(V \otimes_k \kappa(\eta), \mathcal{F}_{\eta})$. Also haben beide Polygone die gleichen Endpunkte.

2. *Schritt* : Bezeichne $\bullet V_{\eta}$ die HN-Filtration von $(V \otimes_k \kappa(\eta), \mathcal{F}_{\eta})$. Betrachte die O-Filtration $\bullet \widetilde{V}_{\eta}$ definiert durch ${}^{\alpha} \widetilde{V}_{\eta} = {}^{\alpha} V_{\eta} \cap V \otimes_k O \subset V \otimes_k \kappa(\eta)$. Diese induziert eine \mathbb{Q} -Filtration $\bullet \widetilde{V}_s$ auf $V \otimes_k \kappa(s)$. Nach Korollar 1.3.2 gilt $p(\bullet \widetilde{V}_s) \leq HN - p(V \otimes_k \kappa(s), \mathcal{F}_s)$. Desweiteren hat man nach 1. Schritt $p(\bullet \widetilde{V}_s) = p(\bullet V_{\eta}) = HN - p(V \otimes_k \kappa(\eta), \mathcal{F}_{\eta})$, woraus die Behauptung resultiert. \square

Aus diesen Satz ergibt sich folgendes Korollar.

Korollar 1.5.1 *Sei P ein Harder-Narasimhan Polygon. Dann gilt*

$$\overline{\mathcal{F}^P} \subset \bigcup_{P' \succeq P, P' \text{ HN-Pol.}} \mathcal{F}^{P'}$$

Beweis: Es gilt $\overline{\mathcal{F}^P} = \bigcup_{x \in \overline{\mathcal{F}^P}} \overline{\{x\}}$ [?](Kap. I 7.3).

Sei also $x \in \overline{\mathcal{F}^P}$ und $y \in \overline{\{x\}}$ ein abgeschlossener Punkt. Betrachte den zu y gehörigen Morphismus $\varphi_y : \text{Spec}(k(y)) \rightarrow \mathcal{F}$ (\leadsto Filtration auf $V \otimes_k \kappa(y)$). Wähle einen diskreten Bewertungsring [?](Kap.I, Prop. 5.5.2) mit Morphismus

$$\begin{aligned} \psi : \text{Spec}(O) &\rightarrow \mathcal{F}. \\ \eta &\mapsto x \\ s &\mapsto y \end{aligned}$$

Dieser induziert Filtrationen $\mathcal{F}_\eta, \mathcal{F}_s$ auf $V \otimes_k \kappa(\eta)$ bzw. $V \otimes_k \kappa(s)$. Es ist $\text{HN-p}(\mathcal{F}_\eta) \preceq \text{HN-p}(\mathcal{F}_s)$. Also auch $\text{HN-p}(\mathcal{F}_x) \preceq \text{HN-p}(\mathcal{F}_y)$, da $\kappa(x) \subset \kappa(\eta), \kappa(y) \subset \kappa(s)$. \square

Bemerkung 1.5.1 *Es gilt i.a nicht $\overline{\mathcal{F}^P} = \bigcup_{P' \succeq P, P' \text{HN-Pol.}} \mathcal{F}^{P'}$. Es ist i.a sogar $\overline{\mathcal{F}^P}$ keine Vereinigung von Strata.*

Beweis: Betrachte dazu Kap. II 3.1 I α). Die Filtration

$$\mathcal{F} : \mathcal{F}^1 = \langle e_1 + 2e_2 + e_3 \rangle, \mathcal{F}^2 = \langle e_1 + e_2, e_2 + e_3 \rangle, \mathcal{F}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$$

ist ein Element von \mathcal{F}^{7a} , aber nicht von $\overline{\mathcal{F}^{8b}}$, da \mathcal{F}^2 kein Unterobjekt vom Rang 1 enthält. Hierbei bezeichne z.B. \mathcal{F}^{7a} das jeweilige Stratum, das zum Fall 7a gehört. \square

Bemerkung 1.5.2 *Selbst die schwächere Aussage*

$$P \preceq P' \quad P, P' \in \mathcal{P} \Rightarrow \overline{\mathcal{F}^P} \cap \mathcal{F}^{P'} \neq \emptyset$$

hat keine Allgemeingültigkeit.

Beweis: Betrachte wiederum Kap. II 3.1 I α). Sei $\mathcal{F} \in \overline{\mathcal{F}^{8b}}$ (vgl. Notation in Bemerkung 1.5.1) \Rightarrow Es existieren Unterobjekte W, W' von V mit $\text{rk } W = 1$, $\text{rk } W' = 2$, $W \subset W' \subset \mathcal{F}^3$ und $W \subset \mathcal{F}^2$. Sei $\mathcal{F} \in \mathcal{F}^{8a} \Rightarrow \exists$ Unterobjekt \widetilde{W} mit $\text{rk } \widetilde{W} = 2$, $\mathcal{F}^1 \subset \widetilde{W} \subset \mathcal{F}^3$.

1. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W \Rightarrow \widetilde{W} \neq W'$ und $W' + \widetilde{W} = \mathcal{F}^3$.
 2. Fall $W' = \widetilde{W}$ und $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}^1 \oplus W \Rightarrow W' = \mathcal{F}^2$.
- $$\Rightarrow \mathcal{F}^{8a} \cap \overline{\mathcal{F}^{8b}} = \emptyset \quad \square$$

Satz 1.5.2 *Das Stratum $\mathcal{F}^P = \{x \in \mathcal{F} \mid \text{HN-p}(\mathcal{F}_x) = P\}$ ist eine lokal abgeschlossene Untervarietät von \mathcal{F} .*

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir noch einige Hilfssätze. Sei im folgenden $I := \{W \subset V \mid W \text{ wird durch ein Teil der Geraden aufgespannt.}\}$

Proposition 1.5.1 *Für ein $W \in I$ und $c \in \mathbb{Q}$ ist die Menge $\mathcal{L}_c^W := \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} \mid \text{slope}_{\mathcal{F}}(W) \geq c\}$ abgeschlossen in \mathcal{F} .*

Beweis: Sei $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$ gegeben. Dann gilt

$$\text{slope}_{\mathcal{F}}(W) \geq c \Leftrightarrow \text{deg}_{\mathcal{F}}(W) \geq c \dim W$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=2}^r (\alpha_i - \alpha_{i-1}) (\dim(W \cap \mathcal{F}^{\alpha_i})) \geq c \dim W - \alpha_1 \dim W =: c',$$

wobei die $\alpha_1 < \dots < \alpha_r$ gerade die fixierten Sprungstellen sind. Bezeichne

$$(0) \subset V_{\alpha_1} \subset V_{\alpha_2} \subset \dots \subset V_{\alpha_r} = V$$

die zu den Funktionen $\alpha_{\bullet}, n_{\bullet}$ entsprechende Standardflagge des k^n . Betrachte folgenden Morphismus von Varietäten.

$$\Phi : \{ \phi : k^n \rightarrow V \mid \phi \text{ ist VR-Isom.} \} \longrightarrow \mathcal{F}$$

$$\text{mit } \phi \longmapsto (0) \subset \phi(V_{\alpha_1}) \subset \phi(V_{\alpha_2}) \subset \dots \subset \phi(V_{\alpha_r}) = V.$$

Nun ist $\mathcal{L}_c^W = \Phi(\mathcal{M}_{c'}^W)$ mit

$$\mathcal{M}_{c'}^W := \{ \phi \mid \sum_{i=2}^r (\alpha_i - \alpha_{i-1}) (\dim(W \cap \phi(V_{\alpha_i}))) \geq c' \}$$

Wir haben für jedes $2 \leq i \leq r$ folgenden Vektorraumhomomorphismus:

$$\phi_i := \phi \mid V_{\alpha_i} \oplus \text{incl}_W : V_{\alpha_i} \oplus W \longrightarrow V$$

Dann gilt

$$\mathcal{M}_{c'}^W = \{ \phi \mid \sum_{i=2}^r (\alpha_i - \alpha_{i-1}) (\text{rg}(\phi_i)) \leq c'' \}$$

Dabei sei c'' die entsprechende Konstante, welche sich durch das Umformen der Gleichung ergibt. Also ist $\mathcal{M}_{c'}^W$ abgeschlossen, wie man mit Hilfe des Morphismus

$$\Psi : \{ \phi : k^n \longrightarrow V \mid \phi \text{ VR-Isom.} \} \longrightarrow Z$$

$$\phi \longmapsto \bigoplus_{i=2}^r \bigoplus_{j=1}^{\alpha_i - \alpha_{i-1}} \phi_i$$

wobei $Z := \text{Hom}(A, B)$ mit

$$A := \bigoplus_{i=2}^r \bigoplus_{j=1}^{\alpha_i - \alpha_{i-1}} (V_{\alpha_i} \oplus W)$$

$$B := \bigoplus_{i=2}^r \bigoplus_{j=1}^{\alpha_i - \alpha_{i-1}} V$$

sieht.

□

Korollar 1.5.2 Seien $W, W' \in I$. Dann ist

$$\mathcal{L}_{W'}^W := \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} \mid \text{slope}_{\mathcal{F}}(W) \geq \text{slope}_{\mathcal{F}}(W')\}$$

konstruierbar .

Beweis: Definiere $\mathcal{F}_i^W := \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} \mid \text{slope}_{\mathcal{F}}(W) = i\}$, für $i \in \mathbb{Q}$ und $W \in I$. Diese Menge ist nach voriger Proposition lokal abgeschlossen, also konstruierbar. Offensichtlich gilt $\mathcal{L}_{W'}^W = \bigcup_i \mathcal{F}_i^W \cap \mathcal{L}_i^W$. Hierbei durchlaufe i die rationalen Zahlen, welche als mögliche Werte für $\text{slope}_{\mathcal{F}}(W)$ auftreten können (endlich viele !). Also ist $\mathcal{L}_{W'}^W$ als endliche vereinigung von konstruierbaren Mengen konstruierbar. \square

Korollar 1.5.3 Die Menge $\Omega_W := \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} \mid V_{\max}^{\mathcal{F}} = W\}$ ist konstruierbar.

Beweis: Es gilt $\Omega_W = \bigcap_{W' \in I} \mathcal{L}_{W'}^W \cap \bigcap_{\substack{W' \in I, \dim W' \geq \dim W \\ W \neq W'}} \mathcal{L}_W^{W' \subset C}$

\square

Betrachte $W, W', W'' \in I$ mit $W \subset W', W \subset W''$. Wegen

$$\begin{aligned} \text{slope}_{\mathcal{F}}(W'/W) \geq \text{slope}_{\mathcal{F}}(W''/W) &\Leftrightarrow \\ \deg_{\mathcal{F}}(W')(\dim W'' - \dim W) - \deg_{\mathcal{F}}(W'')(\dim W' - \dim W) & \\ \geq \deg_{\mathcal{F}}(W)(\dim W' - \dim W'') &= \text{const.} \end{aligned}$$

kann entsprechend des Beweises von Proposition 1.5.1 und seiner Korollare gezeigt werden, daß die Mengen

$$\begin{aligned} &\{\mathcal{F} \mid \text{slope}_{\mathcal{F}}(W'/W) \geq \text{slope}_{\mathcal{F}}(W''/W)\} \text{ bzw.} \\ &\{\mathcal{F} \in \mathcal{F} \mid (V/W)_{\max}^{\mathcal{F}} = W'/W\} \end{aligned}$$

konstruierbar sind.

Bezeichne nun $\check{W} := (0) \subset^1 W \subset^2 W \subset \dots \subset^r W = V$ eine Kette von Elementen aus I . Definiere $\Omega_{\check{W}} := \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} \mid \text{Die HN-Filtration von } (V, \mathcal{F}) \text{ hat die Form } \check{W}\}$. Aus dem Zuvorgesagten ergibt sich folgendes Korollar.

Korollar 1.5.4 Die Menge $\Omega^{\check{W}}$ ist konstruierbar.

Beweis: (von Satz 1.5.2) Sei nun für $\check{W} := (0) \subset^1 W \subset^2 W \subset \dots \subset^r W = V$ ganze Zahlen c_1, c_2, \dots, c_r gegeben. Da nach Proposition die Mengen der Form $\{\mathcal{F} \in \mathcal{F} \mid \deg_{\mathcal{F}} = c_i\}$ $1 \leq i \leq r$ lokal abgeschlossen sind, sieht man daß

$$\Omega_{\check{W}}^{c_1, \dots, c_r} := \{\mathcal{F} \in \Omega_{\check{W}} \mid \deg_{\mathcal{F}}({}^i W) = c_i, i = 1, \dots, r\}$$

konstruierbar ist. Sei speziell \check{W} die HN-Filtration zu (V, \mathcal{F}) für ein \mathcal{F} mit HN-Polygon P und $c_i = \deg_{\mathcal{F}}({}^i W), i = 1, \dots, r$. Sei T der Diagonaltorus bzgl. der

Geraden zerlegung mit Weylgruppe $W = N(T)/T = S_n$, $n = \dim V$. Offensichtlich gilt dann

$$\mathcal{F}^P = \bigcup_{\sigma \in S_n/S_{d_1} \times \dots \times S_{d_r}} \sigma \Omega_{c_1, \dots, c_r}^{\check{W}}$$

wobei $d_i = \dim^i gr(V)$. Hieraus folgt die Konstruierbarkeit von \mathcal{F}^P . Definiere $\mathcal{A}^P := \bigcup_{P' \supseteq P} \mathcal{F}^{P'}$. Nach Korollar 1.5.1 folgt die Abgeschlossenheit von \mathcal{A}^P [?](Kap. I 7.3). Nun gilt aber $\mathcal{F}^P = \mathcal{A}^P \bigcup_{\substack{P' \supseteq P \\ P' \neq P}} \mathcal{A}^{P'}$, woraus die Behauptung resultiert. \square

Wir kommen nun zur „feineren“ Stratifizierung von \mathcal{F} . Sei dazu $m = (m_1, \dots, m_s)$ eine geordnete Partition, d.h. es gilt $\sum_{i=1}^s m_i = n$, $m_i \in \mathbb{N}$, und Ω die Menge all jener Partitionen. Wir haben eine Operation von $W = S_n$ auf \mathbb{Q}^n , welche von der Aktion der Weylgruppe $N(T)/Z(T)$ auf $X_*(T)_{\mathbb{Q}}$, T max. Torus, herrührt.

Sei also $\bar{\mu} := \{\mu\} = (\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{n_{\alpha_1}}, \underbrace{\alpha_2, \dots, \alpha_2}_{n_{\alpha_2}}, \dots, \underbrace{\alpha_r, \dots, \alpha_r}_{n_{\alpha_r}})$ und $\sigma \in W$.

Gilt für $\sigma \bar{\mu}$

$$\frac{1}{m_i} \sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_{i-1}+m_i} \lambda_j > \frac{1}{m_{i+1}} \sum_{j=m_i+1}^{m_i+m_{i+1}} \lambda_j \quad i = 1, \dots, s-1,$$

so sagen wir $((m_1, \dots, m_s), \sigma)$ erfüllt die Eigenschaft (SMF) ((SMF) soll hierbei soviel bedeuten wie „ streng monoton fallend “).

Verbindet man in der Ebene miteinander die Punkte

$$\left(\sum_{j=1}^{i-1} m_j, \sum_{j=1}^{m_1+\dots+m_{i-1}} \lambda_j \right), \left(\sum_{j=1}^i m_j, \sum_{j=1}^{m_1+\dots+m_i} \lambda_j \right),$$

für $i = 1, \dots, s$ so erhalten wir ein Polygon. Die Eigenschaft (SMF) besagt dann, daß die sukzessiven Anstiege der Kanten dieses Polygon streng monoton fallend sind.

Schließlich definieren wir

$$I_{\bar{\mu}} := \{(m, [\sigma]) \in \Omega \times W_M \backslash W/W_{\mu} \mid (m, \sigma) \text{ erfüllt die Eigenschaft (SMF)}\},$$

dabei sei $M = M_m$ die std. Leviuntergruppe von P_m mit zugehöriger Weylgruppe W_M ($P_m = \text{std. parab. Untergruppe von } GL(V) \text{ zu } m$) und W_{μ} die Fixgruppe zu μ .

Durch diese neue Menge $I_{\bar{\mu}}$ haben wir nun unsere neue Stratifizierung gewonnen. In der Tat, sei $(m = (m_1, \dots, m_s), [\sigma]) \in I_{\bar{\mu}}$ mit $\sigma \bar{\mu} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Diesem Element können wir die folgende Menge zuordnen :

$$\mathcal{F}_{(m, [\sigma])} := \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} \mid \text{Die HN-Filtration hat Länge } s, \dim gr_{\mathcal{F}}^{\alpha_i}(^j V / ^{j-1} V)\}$$

$$= \#\{\lambda_k | \lambda_k = \alpha_i, k = \sum_{l=1}^{j-1} m_l + 1, \dots, \sum_{l=1}^j m_l\} \quad \forall i, j\},$$

hierbei bezeichne $(0) = {}^0 V \subset {}^1 V \subset {}^2 V \subset \dots \subset {}^s V = V$ die jeweilige HN-Filtration von $(V, \bigoplus_i V_i, \mathcal{F})$ und s die Länge dieser Filtration. Dann gilt

$$\mathcal{F} = \bigcup_{(m, [\sigma]) \in I_{\bar{\mu}}} \mathcal{F}_{(m, [\sigma])}$$

Wie im Fall der „groben“ Stratifizierung handelt es sich bei diesen Strata um lokal abgeschlossene Teilräume.

Satz 1.5.3 *Das Stratum $\mathcal{F}_{(m, [\sigma])}$ ist eine lokal abgeschlossene Untervarietät von \mathcal{F} .*

Beweis: Fixiere eine Kette $\check{W} = (0) = {}^0 V \subset {}^1 V \subset \dots \subset {}^s V = V$ von Elementen aus I , so daß \check{W} eine HN-Filtration zu einem Element \mathcal{F}^0 aus $\mathcal{F}_{(m, [\sigma])}$ mit HN-Polygon P . Sei $c_{\alpha_i, j} := \dim gr_{\mathcal{F}^0}^{\alpha_i}(jV/j^{-1}V) = c_{i, j}$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s$. Wie man mit Hilfe von Proposition 1.5.1 erkennt, handelt es sich bei

$$\Omega_{\check{W}}^{(c_{i, j})} := \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} | \dim gr_{\mathcal{F}}^{\alpha_i}(jV/j^{-1}V) = c_{i, j} \quad i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s\}$$

um eine lokal abgeschlossene Untervarietät von \mathcal{F} . Entsprechend dem Fall, daß der Orbit eines Punktes einer G -Varietät X lokal abgeschlossen ist, folgt daß $\bigcup_{\tau \in S_n} \tau \Omega_{\check{W}}^{(c_{i, j})}$ lokal abgeschlossen ist. Wie man sich leicht überzeugt gilt $\mathcal{F}_{(m, [\sigma])} = \mathcal{F}^P \cap \bigcup_{\tau \in S_n} \tau \Omega_{\check{W}}^{(c_{i, j})}$, woraus die Behauptung resultiert. \square

Entsprechend gelten auch die Aussagen aus den Bemerkungen 1.5.1, 1.5.2. Wie man leicht verifiziert sind die beiden Stratifizierungen für $\dim V \leq 4$ identisch.

Assoziiere nun zu jedem $(m, [\sigma]) \in I_{\bar{\mu}}$ ein Harder-Narasimhan-Polygon $P(m, [\sigma])$ mit $\mathcal{F}_{(m, [\sigma])} \subset \mathcal{F}^{P(m, [\sigma])}$. Bezeichnet P ein beliebiges HN-Polygon, so hat man folgende Verfeinerung :

$$\mathcal{F}^P = \coprod_{\substack{(m, [\sigma]) \in I_{\bar{\mu}} \\ P(m, [\sigma]) = P}} \mathcal{F}_{(m, [\sigma])}$$

Abschließend können wir noch folgende Aussage über die Menge $I_{\bar{\mu}}$ machen.

Proposition 1.5.2 *Sei $(m, [\sigma]) \in I_{\bar{\mu}}$ und m' eine weitere Partition, derart, daß $P_m \subset P_{m'}$. Dann ist $(m', [\sigma]) \in I_{\bar{\mu}}$.*

Beweis: Falls $m = (m_1, \dots, m_d)$ so genügt es sich auf den Fall $m' = (m'_1, \dots, m'_{d-1})$ mit $m'_i = m_i$, $i = 1, \dots, r$, $m'_r = m_r + m_{r+1}$, $m'_i = m_{i+1}$, $i = r + 1, \dots, d - 1$ für ein $r < d$ zu beschränken. Es sind nachstehende Ungleichungen zu zeigen.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{1}{m_{r-1}} \sum_{j=m_{r-2}+1}^{m_{r-2}+m_{r-1}} \lambda_j > \frac{1}{m_r + m_{r+1}} \sum_{j=m_{r-1}+1}^{m_{r-1}+m_r+m_{r+1}} \lambda_j \\ \text{b)} \quad & \frac{1}{m_r + m_{r+1}} \sum_{j=m_{r-1}+1}^{m_{r-1}+m_r+m_{r+1}} \lambda_j > \frac{1}{m_{r+2}} \sum_{j=m_{r+1}+1}^{m_{r+1}+m_{r+2}} \lambda_j \end{aligned}$$

zu a) :

$$\begin{aligned} \text{a)} \Leftrightarrow & (m_r + m_{r+1}) \sum_{j=m_{r-2}+1}^{m_{r-2}+r-1} \lambda_j > m_{r-1} \sum_{j=m_{r-1}+1}^{m_{r-1}+m_r+m_{r+1}} \lambda_j \Leftrightarrow \\ m_r \sum_{j=r-2+1}^{m_{r-2}+m_{r-1}} \lambda_j + & m_{r-1} \sum_{j=m_{r-2}+1}^{m_{r-2}+m_{r-1}} \lambda_j > m_{r-1} \sum_{m_{r-1}+1}^{m_{r-1}+m_r} \lambda_j + m_{r-1} \sum_{j=m_r+1}^{m_r+m_{r+1}} \lambda_j. \end{aligned}$$

Letztere Ungleichung ist aber per Voraussetzung erfüllt. zu b) : ähnlich wie a). □

Bemerkung 1.5.3 Bekanntlich läßt sich jedes Element σ aus der Weylgruppe W , als Produkt von einfachen Spiegelungen schreiben [?]. Im unseren konkreten Fall bedeutet dies, daß man jede Permutation als Produkt benachbarter Transpositionen darstellen kann. Ist $(m, [\sigma]) \in I_{\bar{\mu}}$ und $\sigma' \leq \sigma$ - daß heißt wird σ in kürzester Form als jene Verkettung einfacher Spiegelungen geschrieben, so entsteht σ' aus σ durch Streichen von solchen Transpositionen -, so gilt im allg. leider nicht $(m, [\sigma']) \in I_{\bar{\mu}}$, wie man in Kap. II 3.1 I α) sieht. Es gilt $((1, 1, 2), [(2, 3)(1, 2)]) \in I_{\bar{\mu}}$, aber $((1, 1, 2), [(1, 2)]) \notin I_{\bar{\mu}}$.

Kapitel 2

Beispiele

Um eine Flaggenvarietät eines Vektorraumes hinsichtlich ihrer Sprungstellen und Dimensionscharaktere zu beschreiben, haben wir bis jetzt eine monoton fallende Funktion $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \{\text{Unterräume von } V\}$ mit endlichem Träger betrachtet. Da sich jede 1-PS μ von $GL(V)$ diagonalisieren läßt, entspricht jede Konjugationsklasse $\{\mu\}$ in $GL(V)$ genau einem n -Tupel

$$\underbrace{(\alpha_1, \dots, \alpha_1)}_{n_{\alpha_1}}, \underbrace{(\alpha_2, \dots, \alpha_2)}_{n_{\alpha_2}}, \dots, \underbrace{(\alpha_r, \dots, \alpha_r)}_{n_{\alpha_r}}$$

von ganzen Zahlen mit $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_r$.

Betrachte nun \mathbb{Q} -Filtrationen eines Vektorraumes V , d.h. wir fixieren n -Tupel von rationalen Zahlen und assoziieren dazu die entsprechende Flaggenvarietät. Durch folgende zwei Operationen ändert sich nichts, bis auf Isomorphie, an den Flaggenvarietäten und deren HN-Stratifikationen.

1. Ersetze $\{\mu\}$ durch $\{r\mu\}$, $r \in \mathbb{Q}_+$
2. Ersetze $\{\mu\}$ durch $\{\mu + (\alpha, \dots, \alpha)\}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Durch passende Wahlen für r und (α, \dots, α) werden wir in diesem Kapitel deshalb ohne Einschränkung annehmen daß $\sum_{i=1}^n \alpha_i n_{\alpha_i} = 0$.

Der Rest der Arbeit bringt Beispiele für die vorhergehende Theorie. Dabei gehen wir wie folgt vor. Wir betrachten einen n -dimensionalen Vektorraum V mit Geradenzerlegung $\bigoplus_{i=1}^n V_i$ und einen Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}^n$ mit $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$ und $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$. Jener Vektor liefert uns wie oben schon erwähnt unsere Flaggenvarietät \mathcal{F} . Dann bestimmen wir der Reihe nach:

- den semistabilen Ort von \mathcal{F} .
- die HN-Stratifikation und die zugehörigen HN-Polygone.

- das Hasse-Diagramm, bzgl. der Halbordnungsrelation auf den Strata der größeren HN-Stratifizierung, welche durch die bereits in Kap.1 3 eingeführten Halbordnungsrelation \preceq auf \mathcal{P} induziert wird. Dabei werden für $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ feste Werte genommen, da sich durch Veränderung dieser Werte, die Relationen zwischen einigen Strata verschieben können.

Dazu berechnen wir vorab für ein Unterobjekt W von V den Anstieg $\text{slope}(W)$. Diese Bezeichnungen werden im folgenden immer benutzt. Es sei noch bemerkt, daß man auch die beiden nachstehenden Halbordnungsrelationen auf den Strata der größeren (bzw. feineren) HN-Stratifizierung angeben könnte.

- $\mathcal{F}^P \preceq \mathcal{F}^{P'} : \Leftrightarrow \overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}^{P'}$.
- $\mathcal{F}^P \preceq \mathcal{F}^{P'} : \Leftrightarrow \overline{\mathcal{F}} \cap \mathcal{F}^{P'} \neq \emptyset$.

2.1 $\mathcal{F} = \mathbb{P}(V)$

Sei $(V, \bigoplus_{i=1}^n V_i, \mathcal{F})$ ein Objekt aus $k - \mathcal{FV}$, so daß \mathcal{F} aus der Flaggenvarietät \mathcal{F} ist, welche der Konjugationsklasse $\{\mu\}$ von 1-PS in $Gl(V)$ entspricht. Dabei sei $\{\mu\} = (\alpha_1, \underbrace{\alpha_2, \dots, \alpha_2}_{n-1 \text{ mal}})$ mit $\alpha_1 > \alpha_2$ und $\alpha_1 + (n-1)\alpha_2 = 0$ d. h. \mathcal{F} hat

folgende Gestalt $\bullet V = (0) \subset \mathcal{F}^1 \subset V$ mit $\dim \mathcal{F}^1 = 1$. In offensichtlicher Weise

$$\begin{array}{ccc} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \alpha_1 & \alpha_2 \end{array}$$

läßt sich \mathcal{F} mit dem projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$ identifizieren, nämlich durch die Zuordnung $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^1$.

Sei $W \subset V$ ein Unterobjekt.

1. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{\dim W}(\alpha_2 \dim W) = \alpha_2 < 0$
2. Fall $\mathcal{F}^1 \subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{\dim W}(\alpha_1 + \alpha_2(\dim W - 1)) > 0$.

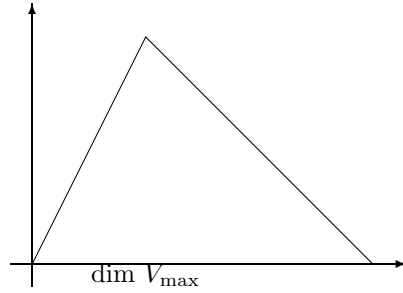
Also $\mathcal{F}^{ss} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} | \mathcal{F}^1 \text{ ist in keinem Unterobjekt } W \neq V \text{ enthalten.}\}$
 $= \mathbb{P}(V) \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$ mit $H_i = \mathbb{P}(\bigoplus_{i \neq j} V_j)$.

Falls $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{ss}$, so hat die HN-Filtration von \mathcal{F} die folgende Gestalt:

$$\bullet V = (0) \subset \begin{array}{ccc} & V_{\max} & \\ & \alpha_2 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\dim V_{\max}} & \\ & & \alpha_2 \end{array} \subset V.$$

Wie man aus obiger Rechnung entnimmt ist V_{\max} das kleinste Unterobjekt, welches \mathcal{F}^1 enthält.

Das HN-Polygon zu \mathcal{F} sieht etwa so aus :



Stratifikation von $\mathcal{F} = \mathbb{P}(V)$: Für ein Unterobjekt $V' \subset V$, identifiziere im nachfolgenden $\mathbb{P}(V')$ mit einer abgeschlossenen Untervarietät von $\mathcal{F} = \mathbb{P}(V)$. Wie wir zuvor gesehen haben gilt $\mathcal{F}^{ss} = \mathcal{F} \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbb{P}(\bigoplus_{i \neq j} V_j)$, d. h. \mathcal{F}^{ss} ergibt sich durch Entnahme aller Hyperebenen. Betrachten wir nun den semistabilen Ort bzgl. der von \mathcal{F} auf einer Hyperebene V' induzierten Flaggenvarietät $\mathcal{F}' = \mathbb{P}(V')$, so kann man wiederum \mathcal{F}' durch das Weglassen seiner Hyperebenen beschreiben. Betrachtet man zwei Hyperebenen V', V'' mit deren induz. Flaggenvarietäten $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$, so haben, nach obigen Berechnungen, je zwei semistabile Punkte $x' \in \mathcal{F}'^{ss}, x'' \in \mathcal{F}''^{ss}$ gleiches HN-Polygon. Sukzessive Anwendung dieser Konstruktion ergibt nachfolgende Stratifizierung.

$$\mathbb{P}(V) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i, \text{ wobei } \mathcal{F}_i = \bigcup_{\substack{\dim V'=i \\ V' \text{ zul.}}} \mathbb{P}(V') \setminus \bigcup H'_i.$$

Hierbei seien H'_i die Hyperebenen von V' .

2.2 dim V = 3

Sei $(V, \bigoplus_{i=1}^3 V_i, \mathcal{F})$ ein 3-dimensionales Objekt aus $k\text{-}\mathcal{FV}$, so daß \mathcal{F} aus der Flaggenvarietät \mathcal{F} ist, welche der Konjugationsklasse $\{\mu\}$ von 1-PS in $Gl(V)$ entspricht. Dabei sei $\{\mu\} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ d. h. \mathcal{F} hat folgende Gestalt $V^\bullet = (0) \subset \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}^2 \subset V$.

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$$

Betrachte folgende 3 Fälle.

$$\text{I } \alpha_1 - \alpha_2 > \alpha_2 - \alpha_3 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_3 > 0 > \alpha_2$$

$$\text{II } \alpha_1 - \alpha_2 < \alpha_2 - \alpha_3 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_3 < 0 < \alpha_2$$

$$\text{III } \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_3 = 0 = \alpha_2$$

zu I

Sei W ein Unterobjekt.

$$\dim W = 2.$$

$$\text{1. Fall } \mathcal{F}^1 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3) < 0.$$

$$\text{2. Fall } \mathcal{F}^1 \subset W, \mathcal{F}^2 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3) > 0.$$

$$\text{3. Fall } \mathcal{F}^2 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) > 0.$$

$$\dim W=1$$

$$\text{1. Fall } W \not\subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_3 < 0.$$

$$\text{2. Fall } W \subset \mathcal{F}^2, W \neq \mathcal{F}^1 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_2 < 0.$$

$$\text{3. Fall } W = \mathcal{F}^1 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_1 > 0.$$

Also $\mathcal{F}^{ss} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} | \mathcal{F}^1 \text{ ist in keinem Unterobjekt } W \neq V \text{ enthalten.}\}$

HN-Filtration von V bzgl. eines $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{ss}$

$$\text{1.) } \mathcal{F}^1 = W', \mathcal{F}^2 = W'' \text{ beide zul. } \Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W'' \subset V.$$

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$$

2.) $\mathcal{F}^1 = W'$ zul. , \mathcal{F}^2 nicht zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset V$.

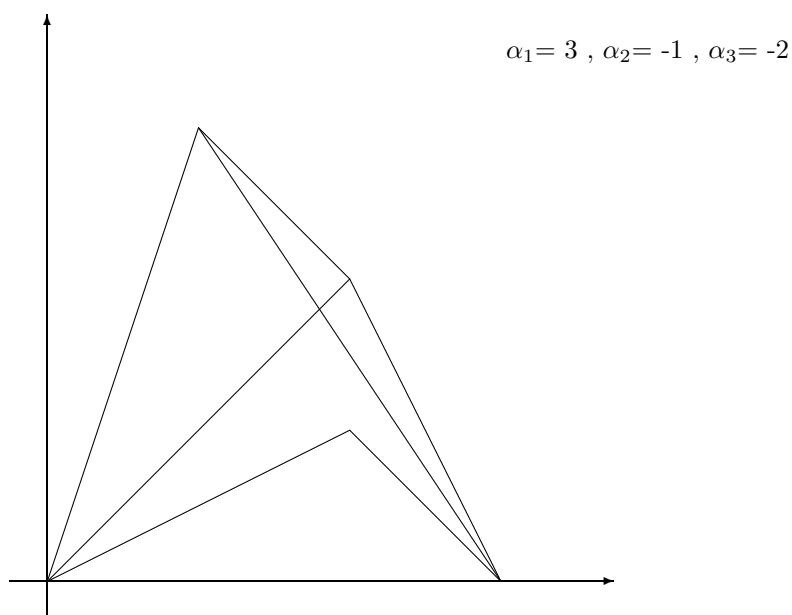
$$\alpha_1 \quad -\frac{\alpha_1}{2}$$

3.) \mathcal{F}^1 nicht zul. , $\mathcal{F}^2 = W''$ zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'' \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad \alpha_3$$

4.) $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2$ beide nicht zul. . Sei $W \neq V$ zul. mit $\mathcal{F}^1 \subset W \Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \quad \alpha_2$$



zu **II**

Dieser Fall ist „ dual “ zum ersten Fall. Betrachtet man nämlich das duale Objekt V^\vee , so geht per Definition der induzierten Filtration auf V^\vee

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ über in $\alpha^\vee = (-\alpha_n, \dots, -\alpha_1)$.
- $\bullet V_{\mathcal{F}}$ über in $\bullet V_{\mathcal{F}}^\vee : \alpha \mapsto (\alpha^\vee V)^\perp$.
- $\deg(\alpha(V^\vee)) = \deg(\alpha V) - \deg(V) = \deg(\alpha V)$

Die HN-Polygone bzgl. V^\vee ergeben sich aus den HN-Polygonen von V (Fall **I**), indem man zuerst eine Spiegelung an der y-Achse und anschließend eine Translation um $\dim V$ nach rechts vornimmt.

zu **III**

$\dim W=2$

1. **Fall** $\mathcal{F}^1 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{\alpha_3}{2} < 0$.
2. **Fall** $\mathcal{F}^1 \subset W, \mathcal{F}^2 \neq W \Rightarrow \text{slope}(W) = 0$.
3. **Fall** $\mathcal{F}^2 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{\alpha_1}{2}$.

$\dim W=1$

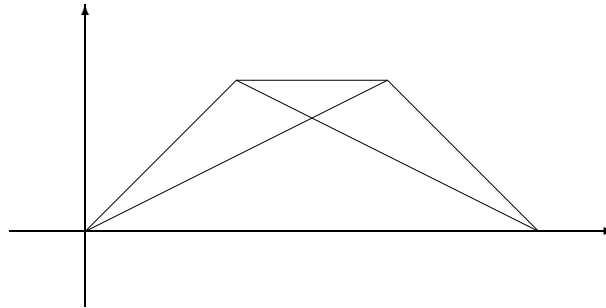
1. **Fall** $W \not\subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_3$.
2. **Fall** $W \subset \mathcal{F}^2, W \neq \mathcal{F}^1 \Rightarrow \text{slope}(W) = 0$.
3. **Fall** $W = \mathcal{F}^1 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_1$.

Also $\mathcal{F}^{ss} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} | \mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2 \text{ beide nicht zulässig}\}$

HN-Filtration von V bzgl. eines $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{ss}$

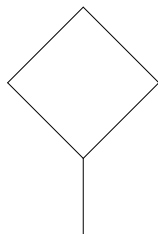
- 1.) $\mathcal{F}^1 = W', \mathcal{F}^2 = W''$ beide zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W'' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad 0 \quad \alpha_3$
- 2.) $\mathcal{F}^1 = W'$ zul. , \mathcal{F}^2 nicht zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \frac{\alpha_3}{2}$
- 3.) \mathcal{F}^1 nicht zul. , $\mathcal{F}^2 = W''$ zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'' \subset V$.
 $\frac{\alpha_1}{2} \quad \alpha_3$

$$\alpha_1=1, \alpha_2=0, \alpha_3=-1$$

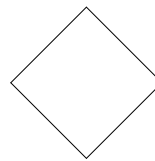


Hasse-diagramme zu HN-Polygonen

I



II



2.3 $\dim V = 4$

Sei $(V, \bigoplus_{i=1}^4 V_i, \mathcal{F})$ ein 4-dimensionales Objekt aus $k - \mathcal{FV}$, so daß \mathcal{F} aus der Flaggenvarietät \mathcal{F} ist, welche der Konjugationsklasse $\{\mu\}$ von 1-PS in $Gl(V)$ entspricht.

2.3.1 $\{\mu\} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$

$\{\mu\}$ entspreche dem 4-Tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ mit $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$ und $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 0$. Betrachte folgende Fälle.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| I $\alpha_3 > 0$ | $\alpha)$ $\alpha_1 + \alpha_3 > 2\alpha_2$
$\beta)$ $\alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_2$
$\gamma)$ $\alpha_1 + \alpha_3 < 2\alpha_2$ |
| II $\alpha_3 = 0$ | $\alpha)$ $\alpha_1 + \alpha_3 > 2\alpha_2$
$\beta)$ $\alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_2$
$\gamma)$ $\alpha_1 + \alpha_3 < 2\alpha_2$ |
| III $\alpha_2 < 0$ | $\alpha)$ $\alpha_2 + \alpha_4 < 2\alpha_3$
$\beta)$ $\alpha_2 + \alpha_4 = 2\alpha_3$
$\gamma)$ $\alpha_2 + \alpha_4 > 2\alpha_3$ |
| IV $\alpha_2 = 0$ | $\alpha)$ $\alpha_2 + \alpha_4 < 2\alpha_3$
$\beta)$ $\alpha_2 + \alpha_4 = 2\alpha_3$
$\gamma)$ $\alpha_2 + \alpha_4 > 2\alpha_3$ |
| V $\alpha_2 > 0$ und $\alpha_3 < 0$ | |

Diesen Fall unterteilen wir in weitere 9 Unterfälle.

$$\begin{array}{ccc}
 & \alpha_1 + \alpha_3 > 2\alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_3 < 2\alpha_2 \\
 \alpha_2 + \alpha_4 > 2\alpha_3 & A & B & C \\
 \alpha_2 + \alpha_4 = 2\alpha_3 & D & E & F \\
 \alpha_2 + \alpha_4 < 2\alpha_3 & G & H & I
 \end{array} ,$$

wobei sich A,C,D,G,H,I nochmals in die folgenden Unterfälle unterteilen:

$$\begin{array}{l}
 A \quad \alpha) \alpha_1 + \alpha_4 > 2\alpha_2 \\
 \quad \beta) \alpha_1 + \alpha_4 = 2\alpha_2 \\
 \quad \gamma) \alpha_1 + \alpha_4 < 2\alpha_2 \\
 \\
 C \quad \alpha) \alpha_2 + \alpha_3 > 0 \\
 \quad \beta) \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\
 \quad \gamma) \alpha_2 + \alpha_3 < 0
 \end{array}$$

$$D \quad \begin{array}{l} \alpha) \alpha_1 + \alpha_4 > 2\alpha_2 \\ \beta) \alpha_1 + \alpha_4 = 2\alpha_2 \\ \gamma) \alpha_1 + \alpha_4 < 2\alpha_2 \end{array}$$

$$G \quad \begin{array}{l} \alpha) \quad \quad \quad \alpha_2 + \alpha_3 > 0 \\ \beta) \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \gamma) \quad \quad \quad \alpha_2 + \alpha_3 < 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} i) \quad \quad \quad \alpha_1 + \alpha_4 < 2\alpha_3 \\ ii) \quad \quad \quad \alpha_1 + \alpha_4 = 2\alpha_3 \\ iii) 2\alpha_2 > \alpha_1 + \alpha_4 > 2\alpha_3 \\ \\ i) \quad 2\alpha_2 > \alpha_1 + \alpha_4 > 2\alpha_3 \\ ii) \quad \quad \quad \alpha_1 + \alpha_4 = 2\alpha_2 \\ iii) \quad \quad \quad \alpha_1 + \alpha_4 > 2\alpha_2 \end{array}$$

$$H \quad \begin{array}{l} \alpha) \alpha_1 + \alpha_4 > 2\alpha_3 \\ \beta) \alpha_1 + \alpha_4 = 2\alpha_3 \\ \gamma) \alpha_1 + \alpha_4 < 2\alpha_3 \end{array}$$

$$I \quad \begin{array}{l} \alpha) \alpha_1 + \alpha_4 > 2\alpha_3 \\ \beta) \alpha_1 + \alpha_4 = 2\alpha_3 \\ \gamma) \alpha_1 + \alpha_4 < 2\alpha_3 \end{array}$$

\mathcal{F} hat die Form $V^\bullet = (0) \subset \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}^2 \subset \mathcal{F}^3 \subset V$.

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4$$

zu I

dim W=3

1. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = -\frac{\alpha_1}{3} < 0$.
2. Fall $\mathcal{F}^1 \subset W, \mathcal{F}^2 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4) = -\frac{\alpha_2}{3} < 0$.
3. Fall $\mathcal{F}^2 \subset W, \mathcal{F}^3 \neq W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4) = -\frac{\alpha_3}{3} < 0$.
4. Fall $\mathcal{F}^3 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -\frac{\alpha_4}{3} > 0$.

dim W=2

1. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W, \mathcal{F}^2 \cap W = (0) \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4) < 0$.
2. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W, \mathcal{F}^2 \cap W \neq (0), W \not\subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_4) < 0$.
3. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W, \mathcal{F}^2 \cap W \neq (0), W \subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3) > 0$.
4. Fall $\mathcal{F}^1 \subset W, \mathcal{F}^2 \neq W, W \not\subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_4) < 0$.
5. Fall $\mathcal{F}^1 \subset W, \mathcal{F}^2 \neq W, W \subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3) > 0$.
6. Fall $\mathcal{F}^2 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) > 0$.

dim W=1

1. Fall $\mathcal{F}^1 \neq W, W \not\subset \mathcal{F}^2, W \not\subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_4 < 0$.
2. Fall $\mathcal{F}^1 \neq W, W \not\subset \mathcal{F}^2, W \subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_3 > 0$.
3. Fall $\mathcal{F}^1 \neq W, W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_2 > 0$.
4. Fall $\mathcal{F}^1 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_1 > 0$.

Also $\mathcal{F}^{ss} = \{\mathcal{F} | \mathcal{F}^3 \text{ enthält kein nichttriviales Unterobjekt}\}$

HN-Filtration von V bzgl. eines $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{ss}$

- 1.) $\mathcal{F}^1 = W', \mathcal{F}^2 = W'', \mathcal{F}^3 = W'''$ alle zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W'' \subset W''' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4$
- 2.) $\mathcal{F}^1 = W', \mathcal{F}^2 = W'''$ beide zul., \mathcal{F}^3 nicht zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W'' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{2}$
- 3.) $\mathcal{F}^1 = W', \mathcal{F}^3 = W'''$ beide zul., \mathcal{F}^2 nicht zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W''' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} \quad \alpha_4$

4.) $\mathcal{F}^1 = W'$ zulässig, $\mathcal{F}^2, \mathcal{F}^3$ beide nicht zulässig.

a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W \subset V$.

$$\alpha_1 \quad \alpha_3 \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{2}$$

b) Es ex. kein 2-dim. Unterobjekt W nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset V$.

$$\alpha_1 \quad -\frac{\alpha_1}{3}$$

5.) \mathcal{F}^1 nicht zul., $\mathcal{F}^2 = W'', \mathcal{F}^3 = W''''$ beide zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'' \subset W'''' \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad \alpha_3 \quad \alpha_4$$

6.) $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^3$ beide nicht zul., $\mathcal{F}^2 = W''$ zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'' \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}$$

7.) $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2$ beide nicht zulässig, $\mathcal{F}^3 = W''''$ zulässig.

α)

a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset W'''' \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \quad \alpha_2 \quad \alpha_4$$

b) Es ex. kein 2-dim. Unterobjekt nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'''' \subset V$.

$$-\frac{\alpha_4}{3} \quad \alpha_4$$

β) $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'''' \subset V$.

$$-\frac{\alpha_4}{3} \quad \alpha_4$$

γ)

a) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset W'''' \subset V$.

$$\alpha_2 \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \quad \alpha_4$$

b) Es ex. kein 1-dim. Unterobjekt nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'''' \subset V$.

$$-\frac{\alpha_4}{3} \quad \alpha_4$$

8.) $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2, \mathcal{F}^3$ alle nicht zulässig.

a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{2}$$

b) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und ein 2-dim. Unterobjekt \widetilde{W} mit $W \subset \widetilde{W}$ nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset \widetilde{W} \subset V$.

$$\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2}$$

c) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und 8b),8c) treten nicht auf.
 $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2}$$

d) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und es ex. kein 2-dim. Unterobjekt nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\alpha_2 \quad -\frac{\alpha_2}{3}$$

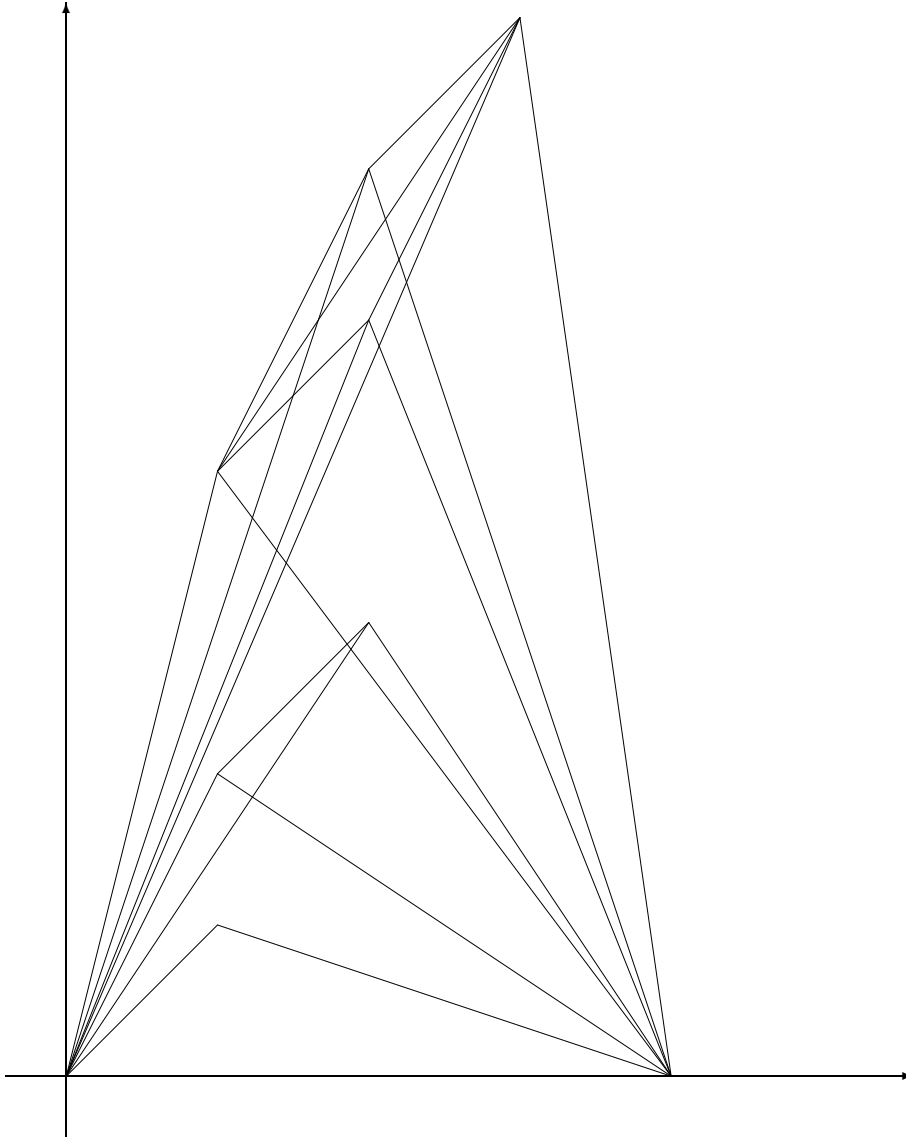
e) Es ex. 1-dim. Unterobjekt W nach 2.Fall und keiner der vorherigen Fälle tritt auf. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\alpha_3 = -\frac{\alpha_3}{3}$$

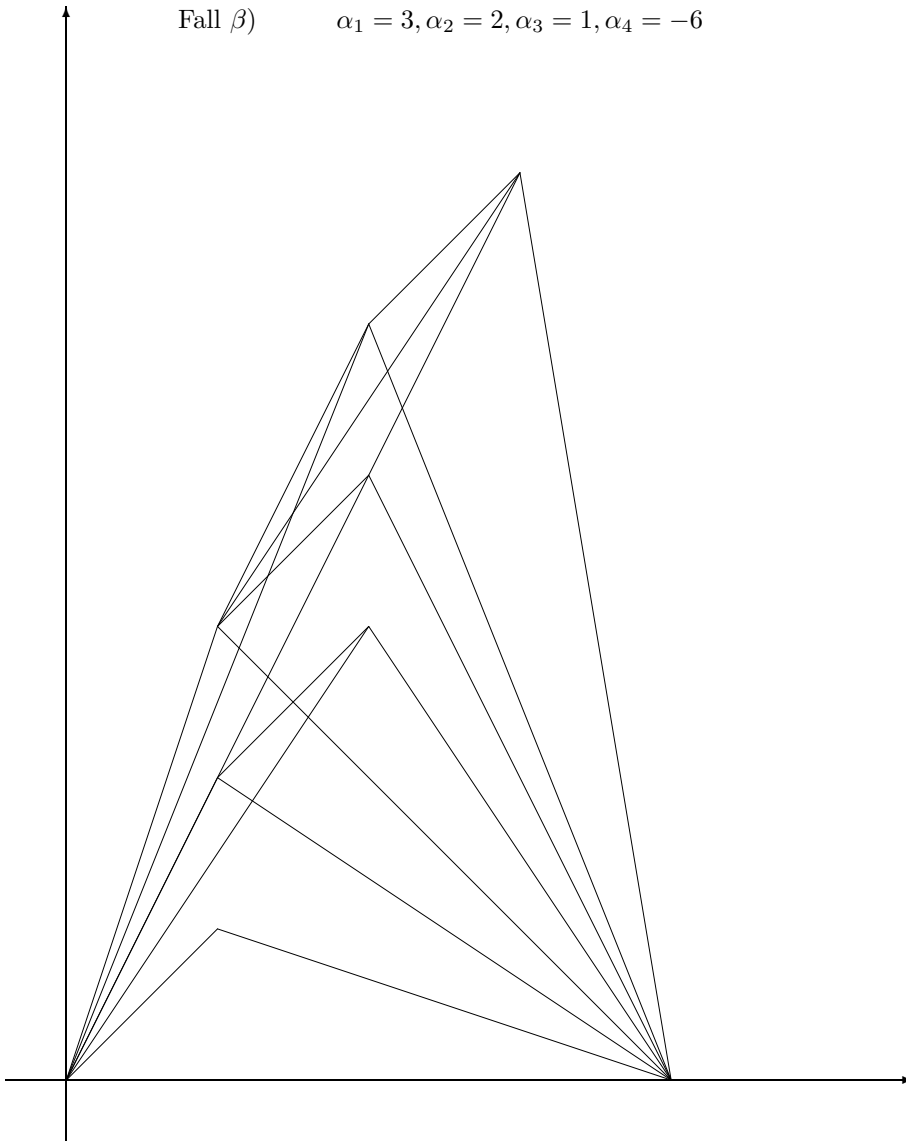
Bemerkung : ($\dim W=1$, 3.Fall) und ($\dim W=2$, 5.Fall) können nicht gleichzeitig auftreten !

Fall α)

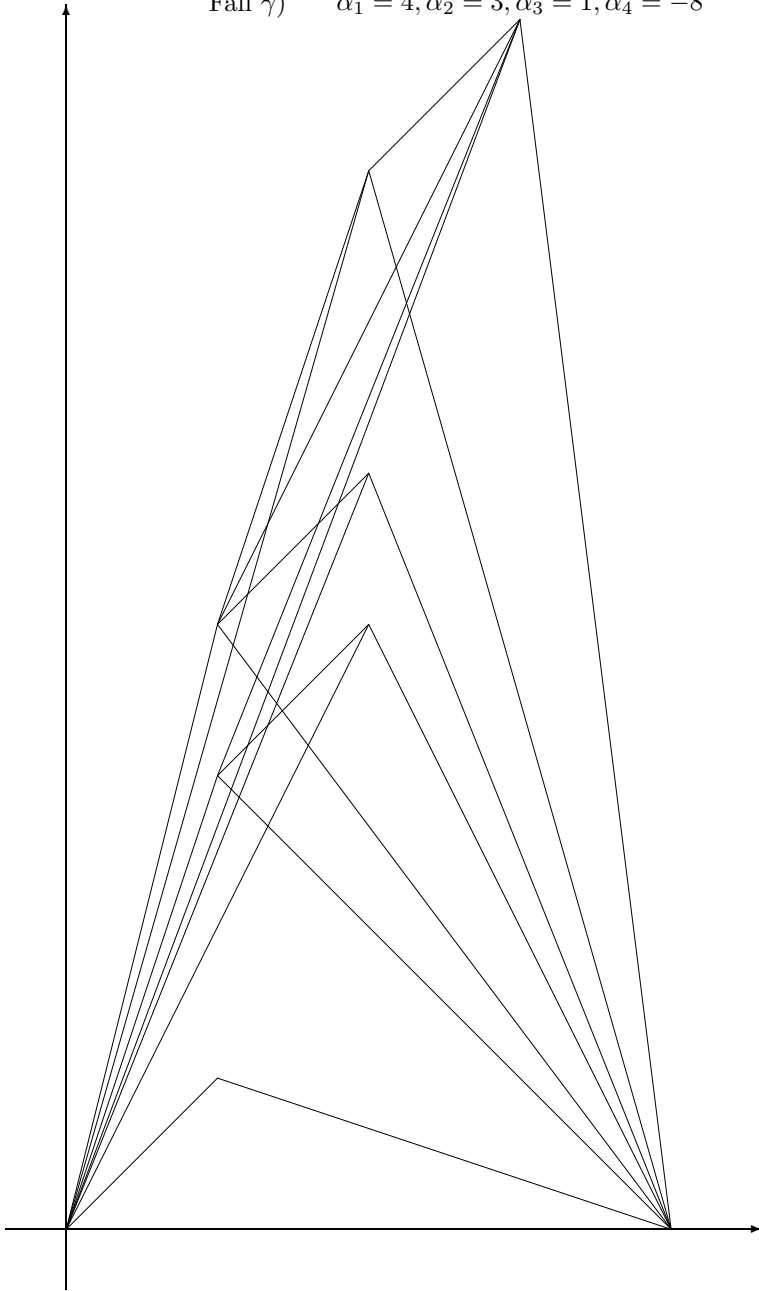
$$\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = -7$$



Fall β) $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = -6$

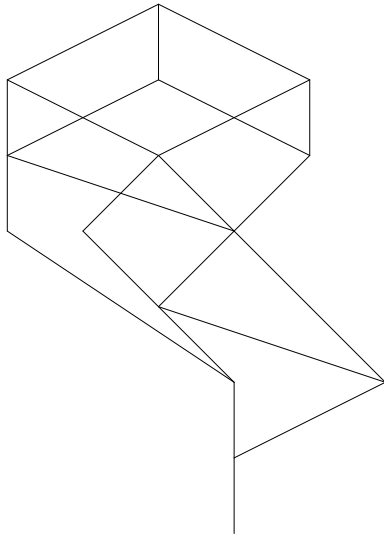


Fall γ) $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = -8$

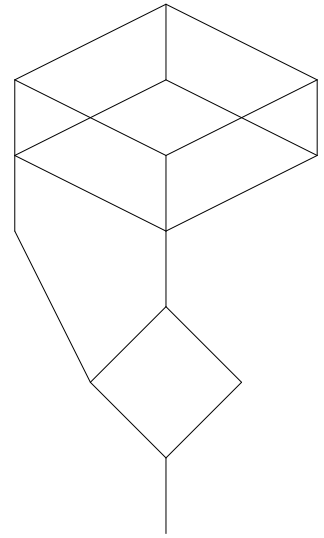


I

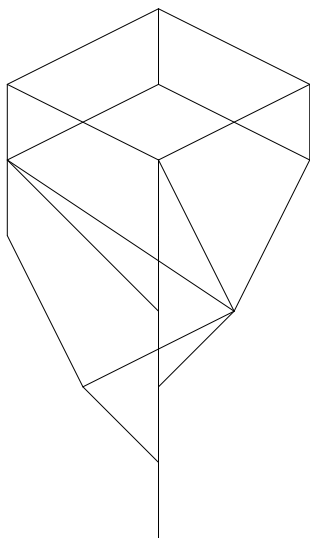
Fall α)



Fall β)



Fall γ)



zu II

dim W=3

1. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_2 + \alpha_4) = -\frac{\alpha_1}{3} < 0$.
2. Fall $\mathcal{F}^1 \subset W, \mathcal{F}^2 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_4) = -\frac{\alpha_2}{3} < 0$.
3. Fall $\mathcal{F}^2 \subset W, \mathcal{F}^3 \neq W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4) = -\frac{\alpha_3}{3} = 0$.
4. Fall $\mathcal{F}^3 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2) = -\frac{\alpha_4}{3} > 0$.

dim W=2

1. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W, \mathcal{F}^2 \cap W = (0) \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{\alpha_4}{2} < 0$.
2. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W, \mathcal{F}^2 \cap W \neq (0), W \not\subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_4) < 0$.
3. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W, \mathcal{F}^2 \cap W \neq (0), W \subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{\alpha_2}{2} > 0$.
4. Fall $\mathcal{F}^1 \subset W, \mathcal{F}^2 \neq W, W \not\subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_4) < 0$.
5. Fall $\mathcal{F}^1 \subset W, \mathcal{F}^2 \neq W, W \subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{\alpha_1}{2} > 0$.
6. Fall $\mathcal{F}^2 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) > 0$.

dim W=1

1. Fall $\mathcal{F}^1 \neq W, W \not\subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_4 < 0$.
2. Fall $\mathcal{F}^1 \neq W, W \not\subset \mathcal{F}^2, W \subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_3 = 0$.
3. Fall $\mathcal{F}^1 \neq W, W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_2 > 0$.
4. Fall $\mathcal{F}^1 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_1 > 0$.

Also $\mathcal{F}^{ss} = \{ \mathcal{F} \mid \text{Falls } \mathcal{F}^3 \text{ ein Unterobjekt } W \text{ enth\u00e4lt, so gilt } \mathcal{F}^3 = W \oplus \mathcal{F}^2 \}$

HN-Filtration von V bzgl. eines $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{ss}$

- 1.) $\mathcal{F}^1 = W', \mathcal{F}^2 = W'', \mathcal{F}^3 = W'''$ alle zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W'' \subset W''' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad 0 \quad \alpha_4$
- 2.) $\mathcal{F}^1 = W', \mathcal{F}^2 = W'''$ beide zul., \mathcal{F}^3 nicht zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W''' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \frac{\alpha_4}{2}$
- 3.) $\mathcal{F}^1 = W', \mathcal{F}^3 = W'''$ beide zul., \mathcal{F}^2 nicht zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W''' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \frac{\alpha_2}{2} \quad \alpha_4$

4.) $\mathcal{F}^1 = W'$ zul., $\mathcal{F}^2, \mathcal{F}^3$ beide nicht zul.

a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W \subset V$.

$$\alpha_1 \quad 0 \quad -\frac{\alpha_1}{2}$$

b) Es ex. kein 2-dim. Unterobjekt nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset V$.

$$\alpha_1 \quad -\frac{\alpha_1}{3}$$

5.) \mathcal{F}^1 nicht zul., $\mathcal{F}^2 = W'', \mathcal{F}^3 = W'''$ beide zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'' \subset W''' \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad 0 \quad \alpha_4$$

6.) $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^3$ beide nicht zul., $\mathcal{F}^2 = W''$ zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'' \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad \frac{\alpha_4}{2}$$

7.) $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2$ beide nicht zul., $\mathcal{F}^3 = W'''$ zul.

α)

a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset W''' \subset V$.

$$\frac{\alpha_1}{2} \quad \alpha_2 \quad \alpha_4$$

b) Es ex. kein 2-dim. Unterobjekt nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W''' \subset V$.

$$-\frac{\alpha_4}{3} \quad \alpha_4$$

β) $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W''' \subset V$.

$$-\frac{\alpha_4}{3} \quad \alpha_4$$

γ)

a) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset W''' \subset V$.

$$\alpha_2 \quad \frac{\alpha_1}{2} \quad \alpha_4$$

b) Es ex. kein 1-dim. Unterobjekt nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W''' \subset V$.

$$-\frac{\alpha_4}{3} \quad \alpha_4$$

8.) $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2, \mathcal{F}^3$ alle nicht zulässig.

a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_1}{2} \quad -\frac{\alpha_1}{2}$$

b) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und ein 2-dim. Unterobjekt \widetilde{W} mit $W \subset \widetilde{W}$ nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset \widetilde{W} \subset V$.

$$\alpha_2 \quad 0 \quad -\frac{\alpha_2}{2}$$

c) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und 8b), 8c) treten nicht auf.
 $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

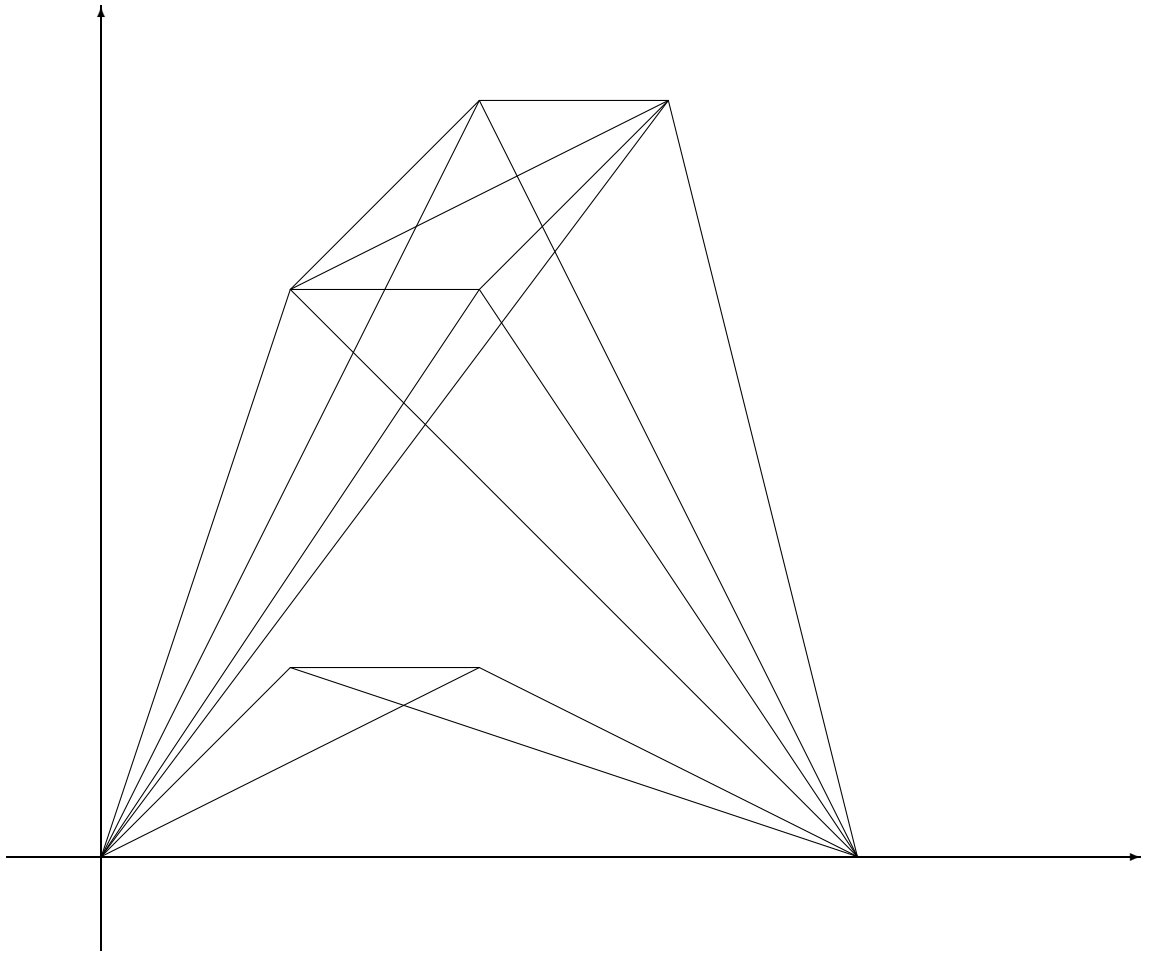
$$\frac{\alpha_2}{2} \quad -\frac{\alpha_2}{2}$$

d) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und, es ex. kein 2-dim. Unterobjekt nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\alpha_2 \quad -\frac{\alpha_2}{3}$$

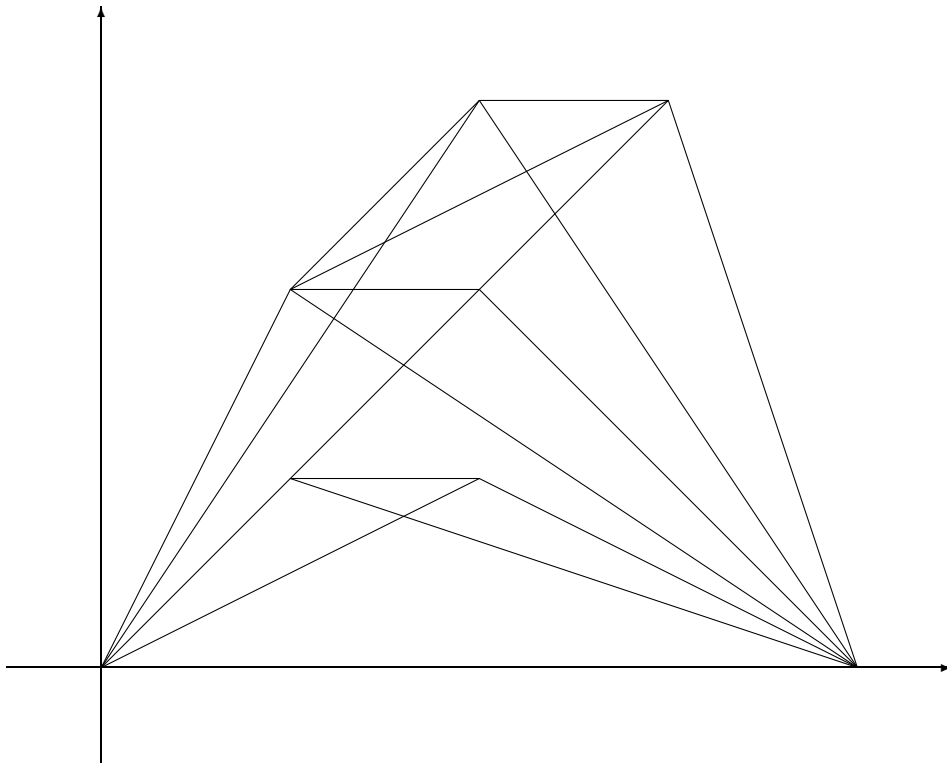
Fall α)

$$\alpha_1=3, \alpha_2=1, \alpha_4=-4$$



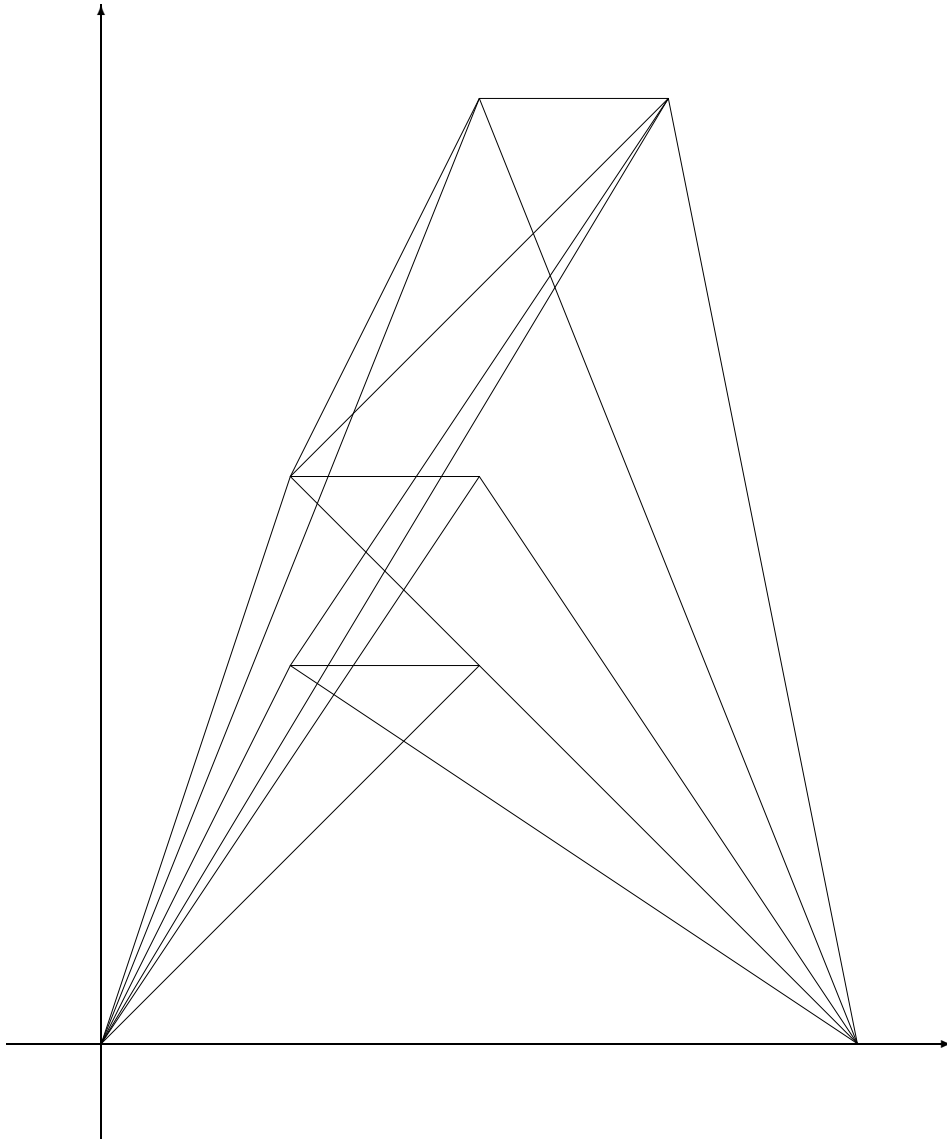
Fall β)

$$\alpha_1=2, \alpha_2=1, \alpha_4=-3$$



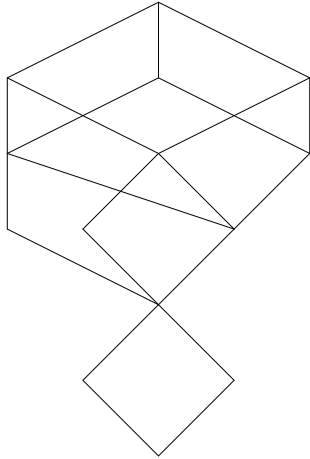
Fall γ)

$$\alpha_1=3, \alpha_2=2, \alpha_4=-5$$

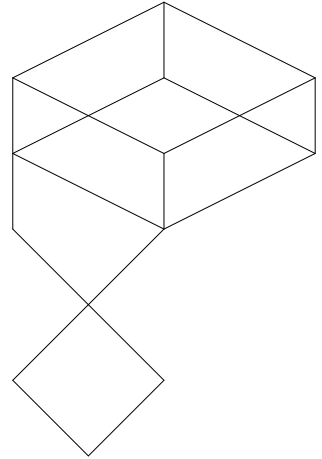


II

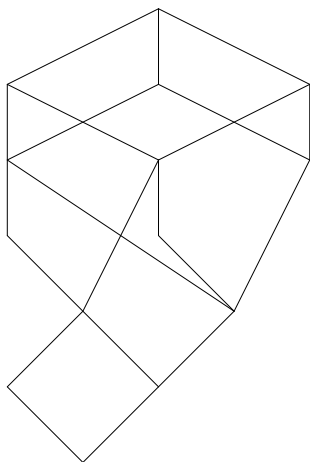
Fall α)



Fall β)



Fall γ)



zu **III**

Dieser Fall ist dual zum Fall **I**. (vgl. 2.2)

zu **IV**

Dieser Fall ist dual zum Fall **II**. (vgl. 2.2)

zu **V**

$\dim W=3$

1. **Fall** $\mathcal{F}^1 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = -\frac{\alpha_1}{3} < 0$.
2. **Fall** $\mathcal{F}^1 \subset W$, $\mathcal{F}^2 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4) = -\frac{\alpha_2}{3} < 0$.
3. **Fall** $\mathcal{F}^2 \subset W$, $\mathcal{F}^3 \neq W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4) = -\frac{\alpha_3}{3} > 0$.
4. **Fall** $\mathcal{F}^3 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -\frac{\alpha_4}{3} > 0$.

$\dim W=2$

1. **Fall** $\mathcal{F}^1 \not\subset W$, $\mathcal{F}^2 \cap W = (0) \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4) < 0$.
2. **Fall** $\mathcal{F}^1 \not\subset W$, $\mathcal{F}^2 \cap W \neq (0)$, $W \not\subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_4) < 0$.
3. **Fall** $\mathcal{F}^1 \not\subset W$, $\mathcal{F}^2 \cap W \neq (0)$, $W \subset \mathcal{F}^3$
$$\Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3) = \begin{cases} < 0 & A, B, C\gamma), D, G\gamma) \\ 0 & E, C\beta), G\beta) \\ > 0 & C\alpha), F, G\alpha), H, I \end{cases}$$
4. **Fall** $\mathcal{F}^1 \subset W$, $\mathcal{F}^2 \neq W$, $W \not\subset \mathcal{F}^3$
$$\Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_4) = \begin{cases} > 0 & A, B, C\gamma), D, G\gamma) \\ 0 & E, C\beta), G\beta) \\ < 0 & C\alpha), F, G\alpha), H, I \end{cases}$$
5. **Fall** $\mathcal{F}^1 \subset W$, $\mathcal{F}^2 \neq W$, $W \subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3) > 0$.
6. **Fall** $\mathcal{F}^2 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) > 0$.

$\dim W=1$

1. **Fall** $\mathcal{F}^1 \neq W$, $W \not\subset \mathcal{F}^2$, $W \not\subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_4 < 0$.
2. **Fall** $\mathcal{F}^1 \neq W$, $W \not\subset \mathcal{F}^2$, $W \subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_3 < 0$.
3. **Fall** $\mathcal{F}^1 \neq W$, $W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_2 > 0$.
4. **Fall** $\mathcal{F}^1 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_1 > 0$.

Also

$\mathcal{F}_{\alpha_2+\alpha_3>0}^{ss} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} | \mathcal{F}^2 \text{ bzw. } \mathcal{F}^3 \text{ enthalten kein Unterobjekt der Codimension 1 und } \mathcal{F}^2 \text{ ist in keinem echten Unterobjekt enthalten}\}$.

$\mathcal{F}_{\alpha_2+\alpha_3=0}^{ss} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} | \mathcal{F}^2 \text{ enthält kein echtes Unterobjekt, ist in keinem echten Unterobjekt enthalten, und es gibt kein Unterobjekt } W \text{ mit } \mathcal{F}^1 \subset W \subset \mathcal{F}^3\}$.

$\mathcal{F}_{\alpha_2+\alpha_3<0}^{ss} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} | \mathcal{F}^2 \text{ enthält kein echtes Unterobjekt, } \mathcal{F}^1 \text{ bzw. } \mathcal{F}^2 \text{ sind in keinem Unterobjekt enthalten, welches eine um eins größere Dimension besitzt}\}$.

HN-Filtration von V bzgl. eines $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{ss}$

- 1.) $\mathcal{F}^1 = W'$, $\mathcal{F}^2 = W''$, $\mathcal{F}^3 = W'''$ alle zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W'' \subset W''' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4$
- 2.) $\mathcal{F}^1 = W'$, $\mathcal{F}^2 = W''$ beide zul., \mathcal{F}^3 nicht zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W'' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}$
- 3.) $\mathcal{F}^1 = W'$, $\mathcal{F}^3 = W'''$ beide zul., \mathcal{F}^2 nicht zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W''' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \frac{\alpha_2+\alpha_3}{2} \quad \alpha_4$
- 4.) $\mathcal{F}^1 = W'$ zulässig, \mathcal{F}^2 , \mathcal{F}^3 beide nicht zulässig.

G, H, I

a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \alpha_3 \quad \frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}$

b) Es ex. kein 2-dim. Unterobjekt W nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad -\frac{\alpha_1}{3}$

$D, E, F \Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad -\frac{\alpha_3}{3}$

A, B, C

a) Es ex. ein 3-dim. zul. Unterobjekt W nach 3.Fall. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \frac{\alpha_2+\alpha_4}{2} \quad \alpha_3$

- b) Es ex. kein 3-dim. zul. Unterobjekt nach 3.Fall. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset V.$
 $\alpha_1 \quad -\frac{\alpha_1}{3}$
- 5.) \mathcal{F}^1 nicht zul., $\mathcal{F}^2 = W''$, $\mathcal{F}^3 = W'''$ beide zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'' \subset W''' \subset V.$
 $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \quad \alpha_3 \quad \alpha_4$
- 6.) $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^3$ beide nicht zul., $\mathcal{F}^2 = W''$ zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'' \subset V.$
 $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \quad \frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}$
- 7.) $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2$ beide nicht zulässig, $\mathcal{F}^3 = W'''$ zulässig.

A, D, G

- a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset W''' \subset V.$
 $\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2} \quad \alpha_2 \quad \alpha_4$
- b) Es ex. kein 2-dim. Unterobjekt nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W''' \subset V.$
 $-\frac{\alpha_4}{3} \quad \alpha_4$

B, E, H $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W''' \subset V.$
 $-\frac{\alpha_4}{3} \quad \alpha_4$

C, F, I

- a) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset W''' \subset V.$
 $\alpha_2 \quad \frac{\alpha_1+\alpha_3}{2} \quad \alpha_4$
- b) Es ex. kein 1-dim. Unterobjekt nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W''' \subset V.$
 $-\frac{\alpha_4}{3} \quad \alpha_4$

- 8.) $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2, \mathcal{F}^3$ alle nicht zulässig.

A α), D α), G γ)iii)

- a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V.$
 $\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2} \quad \frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}$
- b) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 4.Fall und ein 3-dim. Unterobjekt \widetilde{W} mit $W \subset \widetilde{W}$ nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset \widetilde{W} \subset V.$
 $\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2} \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$
- c) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 4.Fall, und es ex. kein 3-dim Unterobjekt nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V.$
 $\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2} \quad \frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}$
- d) Es ex. 3-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und keiner der vorherigen Fälle tritt auf. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V.$
 $-\frac{\alpha_3}{3} \quad \alpha_3$
- e) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt nach 3.Fall und keiner der vorherigen Fälle tritt auf. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V.$
 $\alpha_2 \quad -\frac{\alpha_2}{3}$

$A\beta), D\beta), G\gamma)ii)$

- a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{2}$$
- b) Es ex. ein 3-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4}{3} \quad -\frac{\alpha_3}{3}$$
- c) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 4.Fall und 8b) kommt nicht vor.
 $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2} \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}$$
- d) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt nach 3.Fall und keiner der vorherigen Fälle tritt auf. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\alpha_2 \quad -\frac{\alpha_2}{3}$$

$A\gamma), B, C\gamma), D\gamma), G\gamma)i)$

- a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{2}$$
- b) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und ein 3-dim. Unterobjekt \widetilde{W} mit $W \subset \widetilde{W}$ nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset \widetilde{W} \subset V$.

$$\alpha_2 \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2} \quad \alpha_3$$
- c) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall, und es ex. kein 3-dim. Unterobjekt nach 3.Fall mit $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\alpha_2 \quad -\frac{\alpha_2}{3}$$
- d) Es ex. 3-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und keiner der vorherigen Fälle tritt auf. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$-\frac{\alpha_3}{3} \quad \alpha_3$$
- e) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt nach 4.Fall und keiner der vorherigen Fälle tritt auf. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2} \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}$$

$C\beta), E, G\beta)$

- a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{2}$$
- b) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und ein 3-dim. Unterobjekt \widetilde{W} mit $W \subset \widetilde{W}$ nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset \widetilde{W} \subset V$.

$$\alpha_2 \quad 0 \quad \alpha_3$$
- c) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall, und es ex. kein 3-dim Unterobjekt nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\alpha_2 \quad -\frac{\alpha_2}{3}$$

- d) Es ex. 3-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und keiner der vorherigen Fälle tritt auf. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$-\frac{\alpha_3}{3} \quad \alpha_3$$

$(C\alpha), (F, G\alpha)iii), (H\alpha), (I\alpha)$

- a) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und ein 3-dim. Unterobjekt \widetilde{W} mit $W \subset \widetilde{W}$ nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset \widetilde{W} \subset V$.

$$\alpha_2 \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2} \quad \alpha_3$$

- b) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall, und es ex. kein 3-dim Unterobjekt nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\alpha_2 \quad -\frac{\alpha_2}{3}$$

- c) Es ex. ein 3-dim. Unterobjekt nach 3.Fall und keiner der vorherigen Fälle tritt auf. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4}{3} \quad \alpha_3$$

- d) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{2}$$

- e) Es ex. 2-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und keiner der vorherigen Fälle tritt auf. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2}$$

$(G\alpha)ii), (H\beta), (I\beta)$

- a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{2}$$

- b) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\alpha_2 \quad -\frac{\alpha_2}{3}$$

- c) Es ex. 2-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und keiner der vorherigen Fälle tritt auf. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2}$$

- d) Es ex. ein 3-dim. Unterobjekt nach 3.Fall und keiner der vorherigen Fälle tritt auf. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4}{3} \quad \alpha_3$$

$(G\alpha)i), (H\gamma), (I\gamma)$

- a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{2}$$

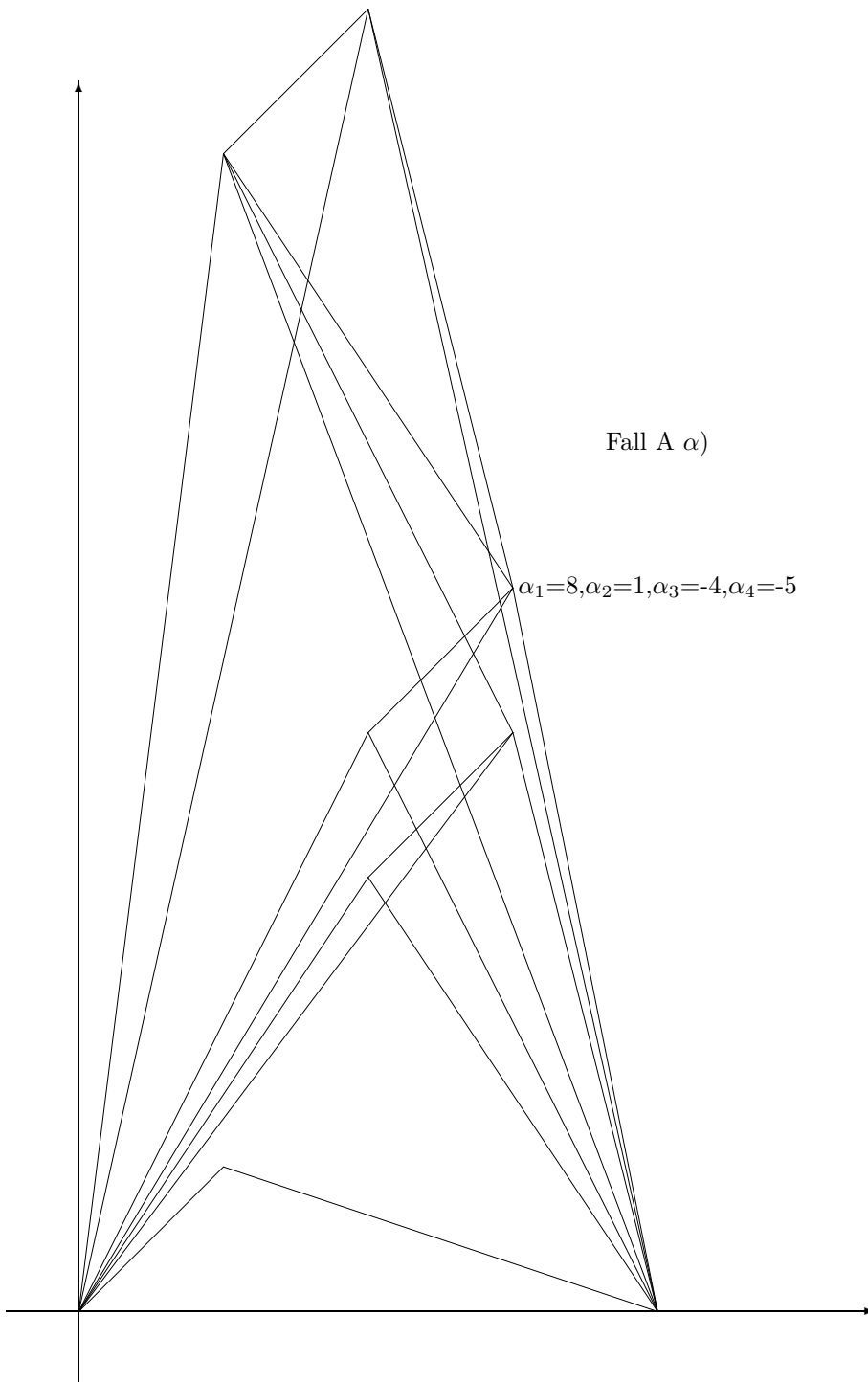
- b) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und ein 2-dim. Unterobjekt \widetilde{W} mit $W \subset \widetilde{W}$ nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset \widetilde{W} \subset V$.

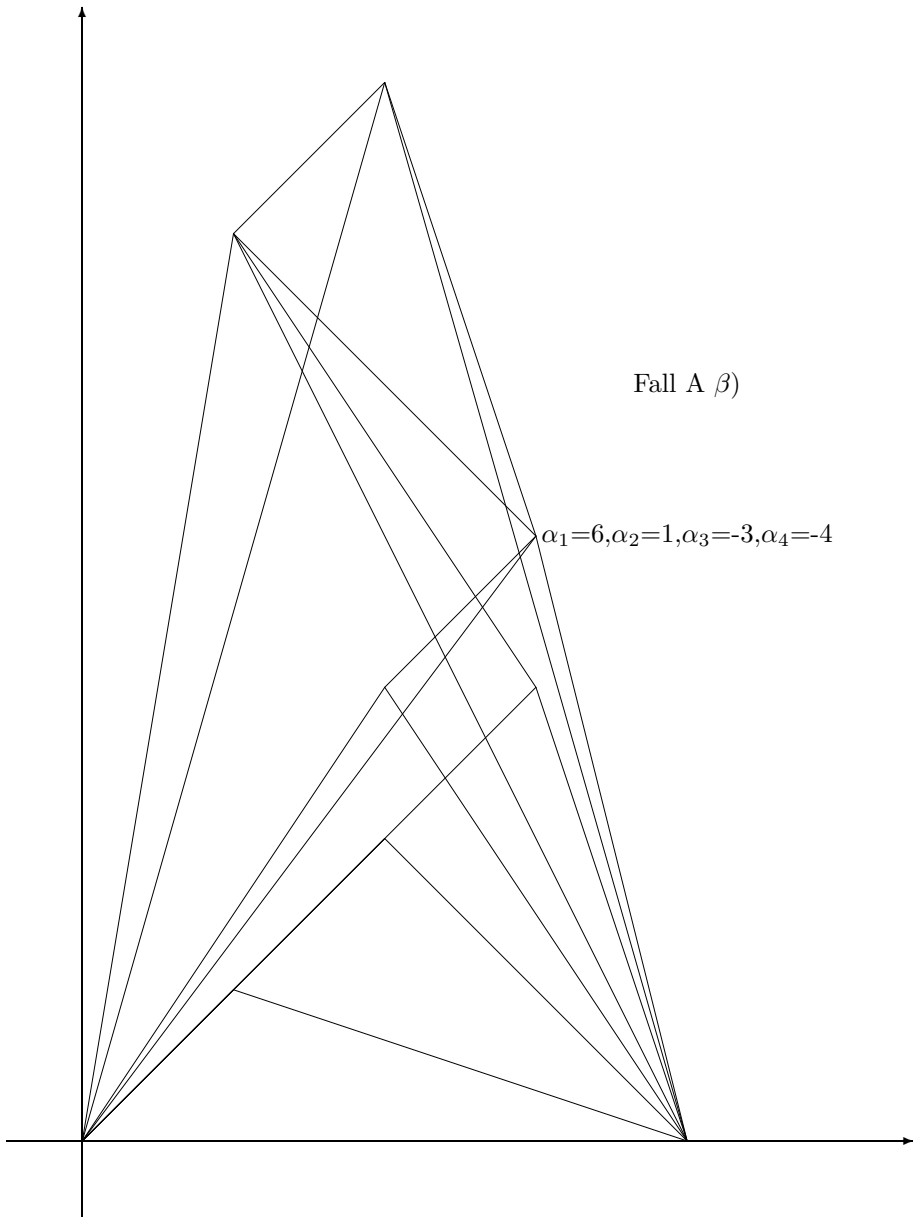
$$\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2}$$

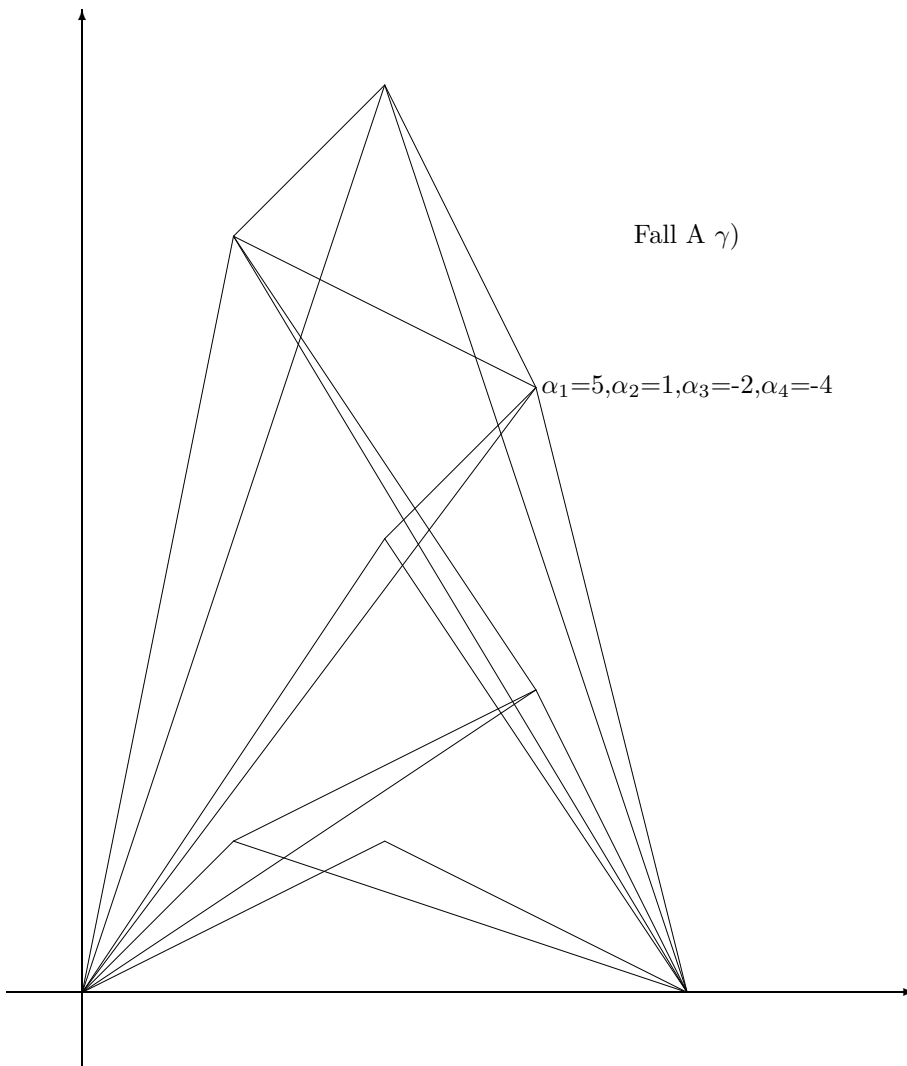
- c) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall, und es ex. kein 2-dim. Unterobjekt nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.
- $$\alpha_2 \quad -\frac{\alpha_2}{3}$$
- d) Es ex. 2-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und keiner der vorherigen Fälle tritt auf. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.
- $$\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2}$$
- e) Es ex. ein 3-dim. Unterobjekt nach 3.Fall und keiner der vorherigen Fälle tritt auf. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.
- $$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4}{3} \quad \alpha_3$$

Bemerkung : 1) ($\dim W=1$, 3.Fall) und ($\dim W=2$, 5.Fall) bzw. ($\dim W=2$, 5.Fall) und ($\dim W=3$, 3.Fall) können nicht gleichzeitig auftreten !

2) Falls ($\dim W=2$, 3.Fall) und ($\dim W=3$, 3.Fall) simultan auftreten, so ex. schon ein 1-dim. Unterobjekt nach 3.Fall.

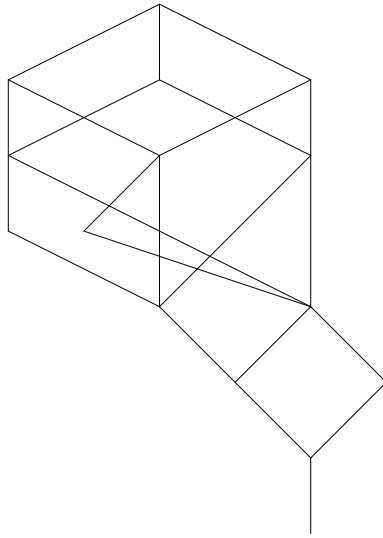




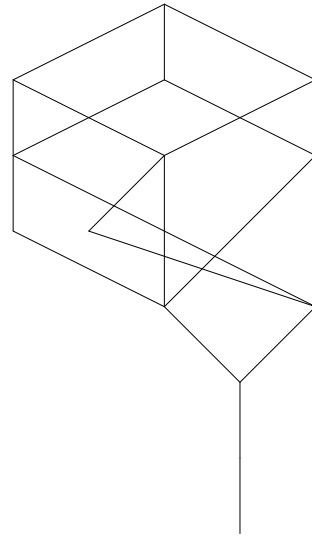


V A

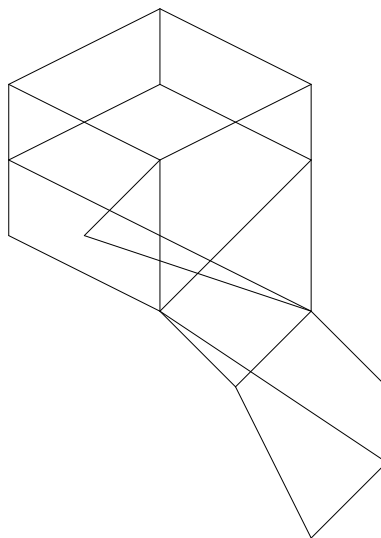
Fall α)



Fall β)

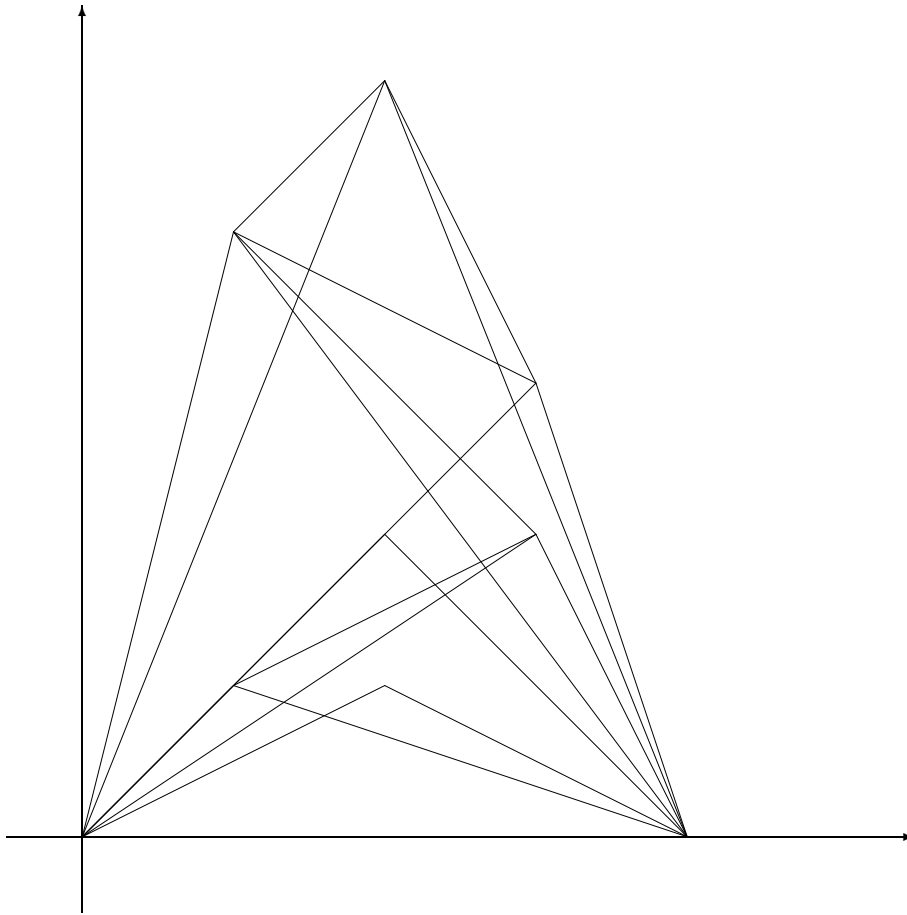


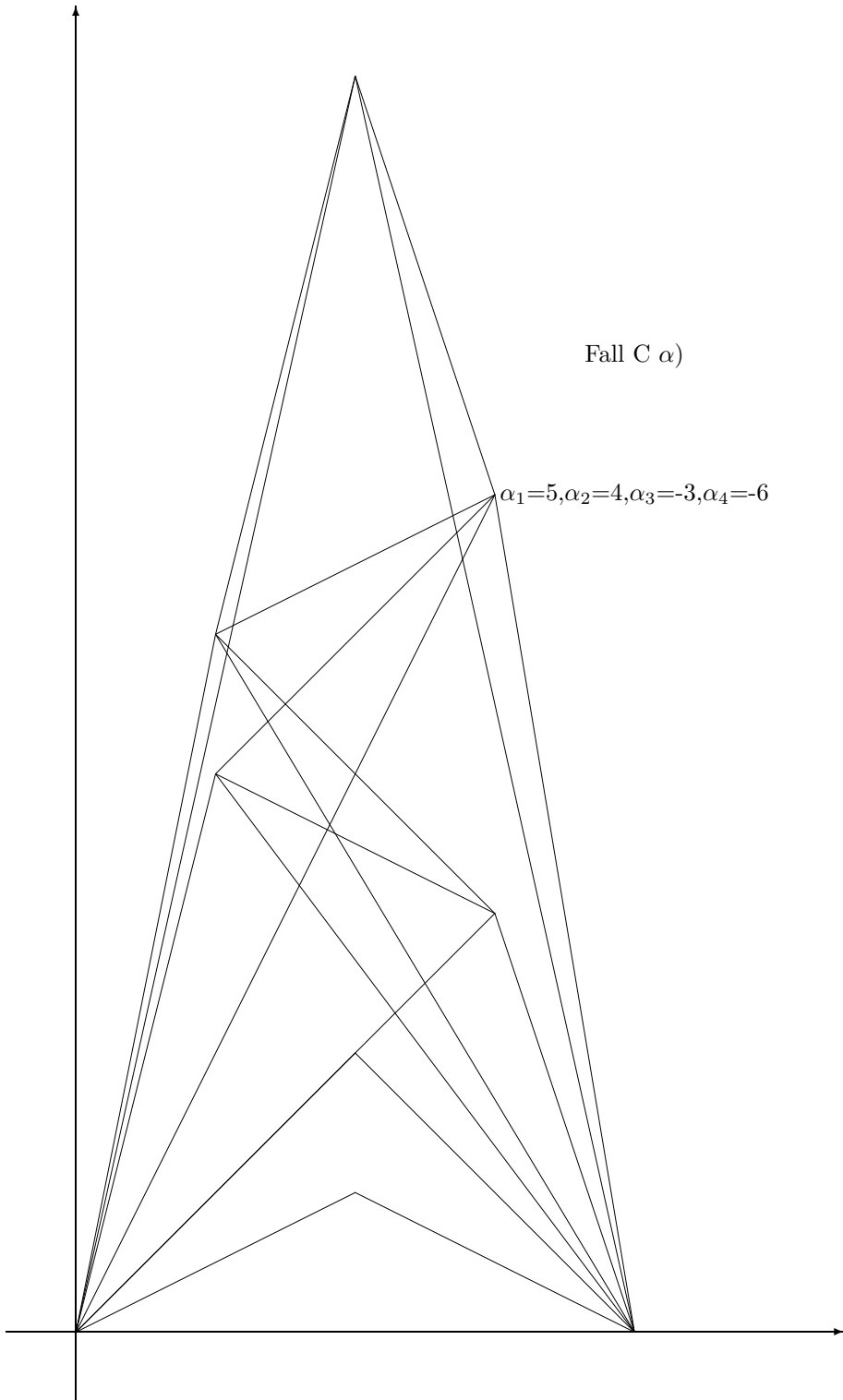
Fall γ)



Fall B

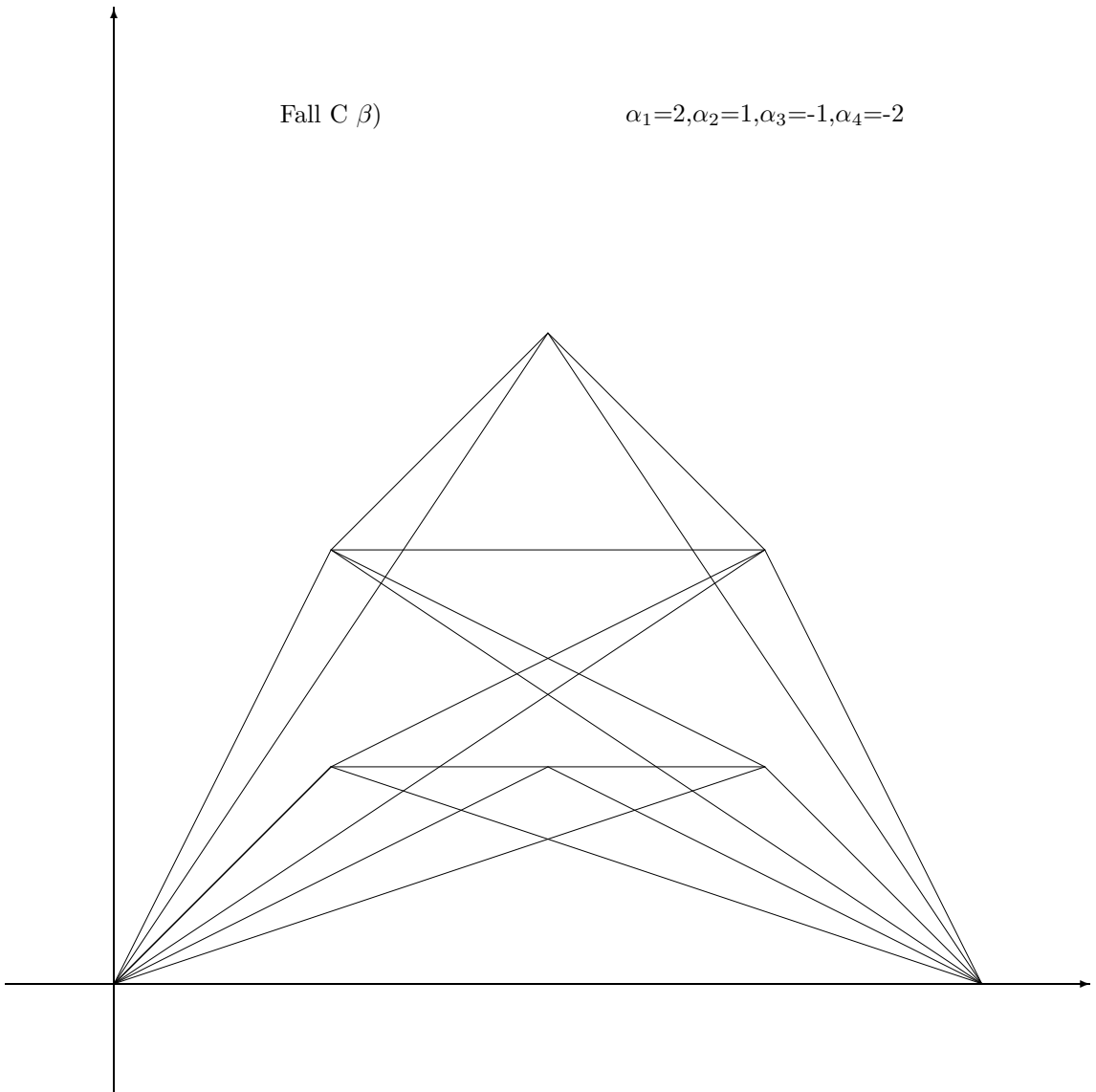
$$\alpha_1=4, \alpha_2=1, \alpha_3=-2, \alpha_4=-3$$

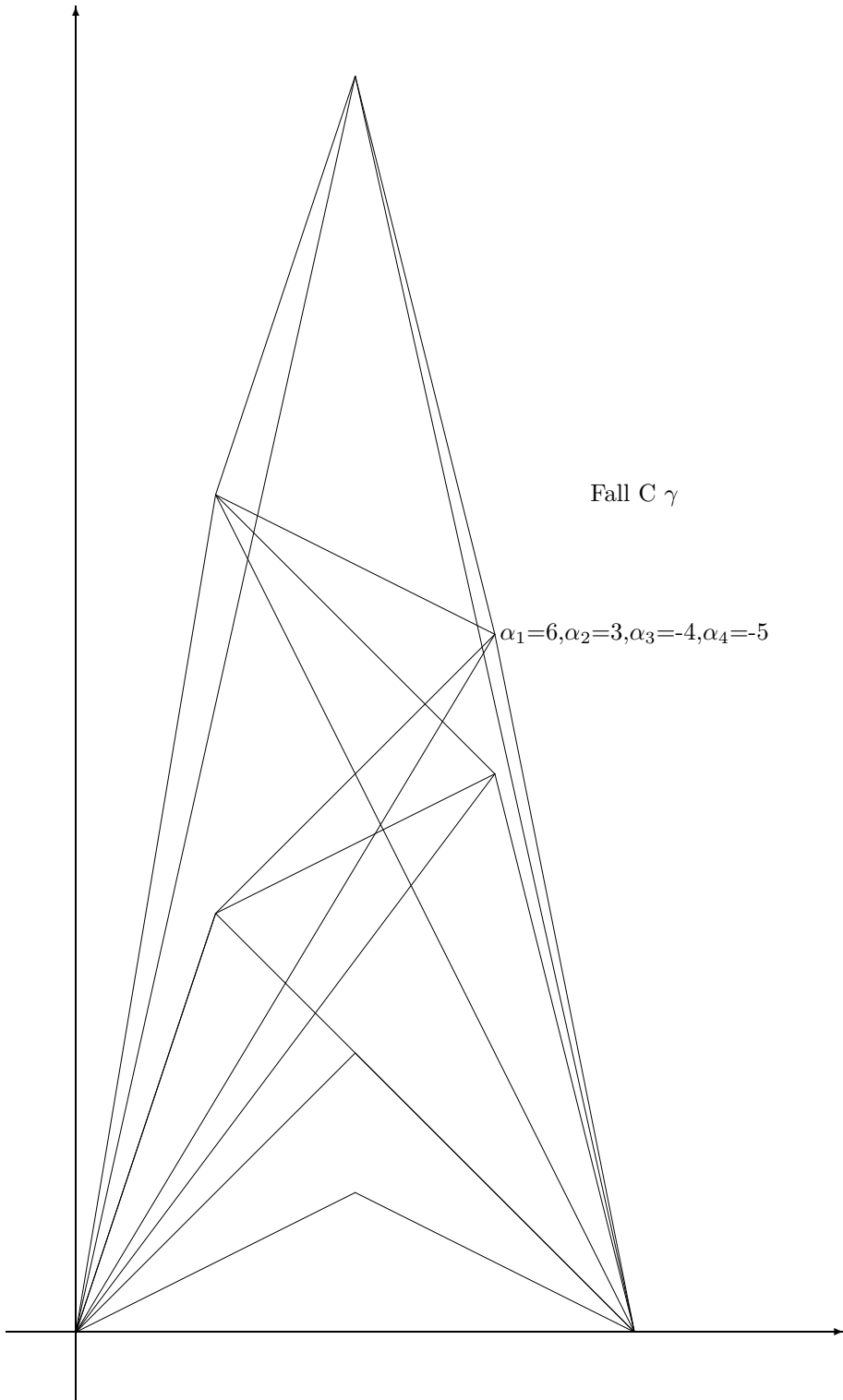




Fall C β)

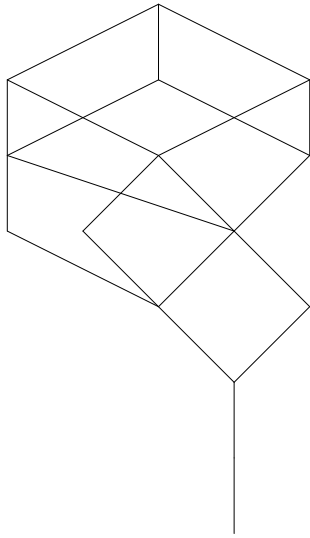
$$\alpha_1=2, \alpha_2=1, \alpha_3=-1, \alpha_4=-2$$



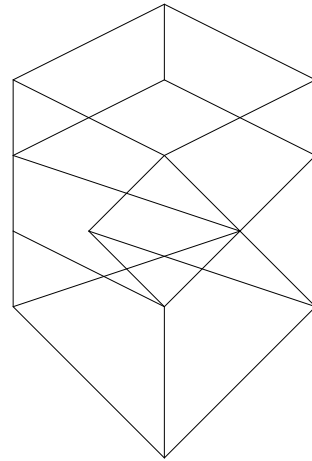


V C

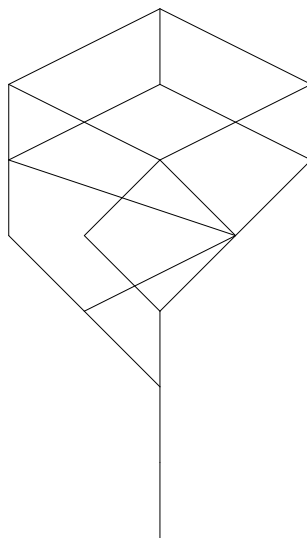
Fall α)

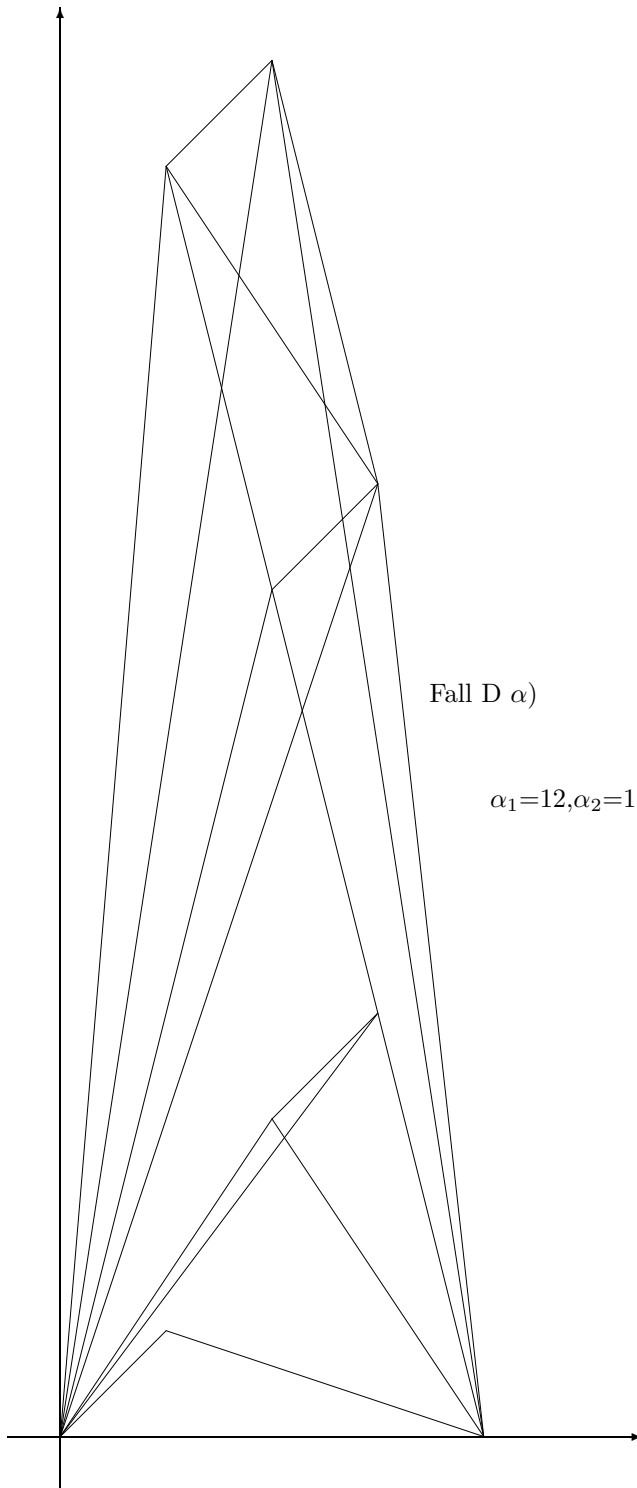


Fall β)



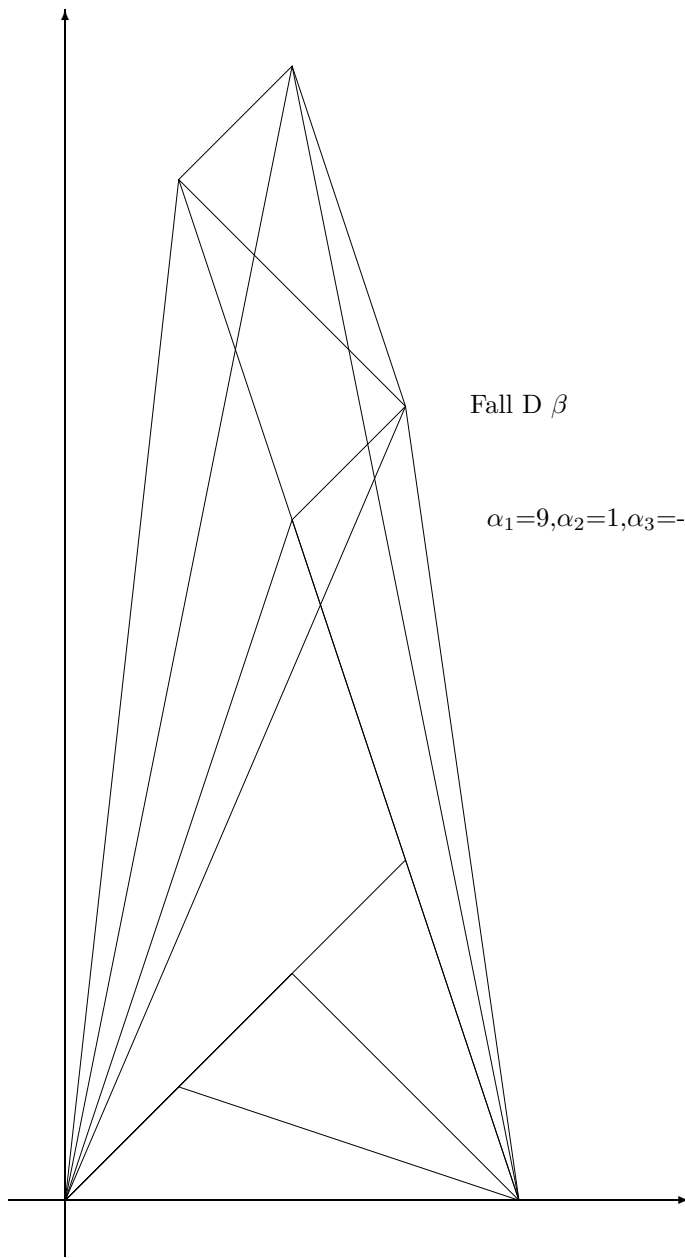
Fall γ)





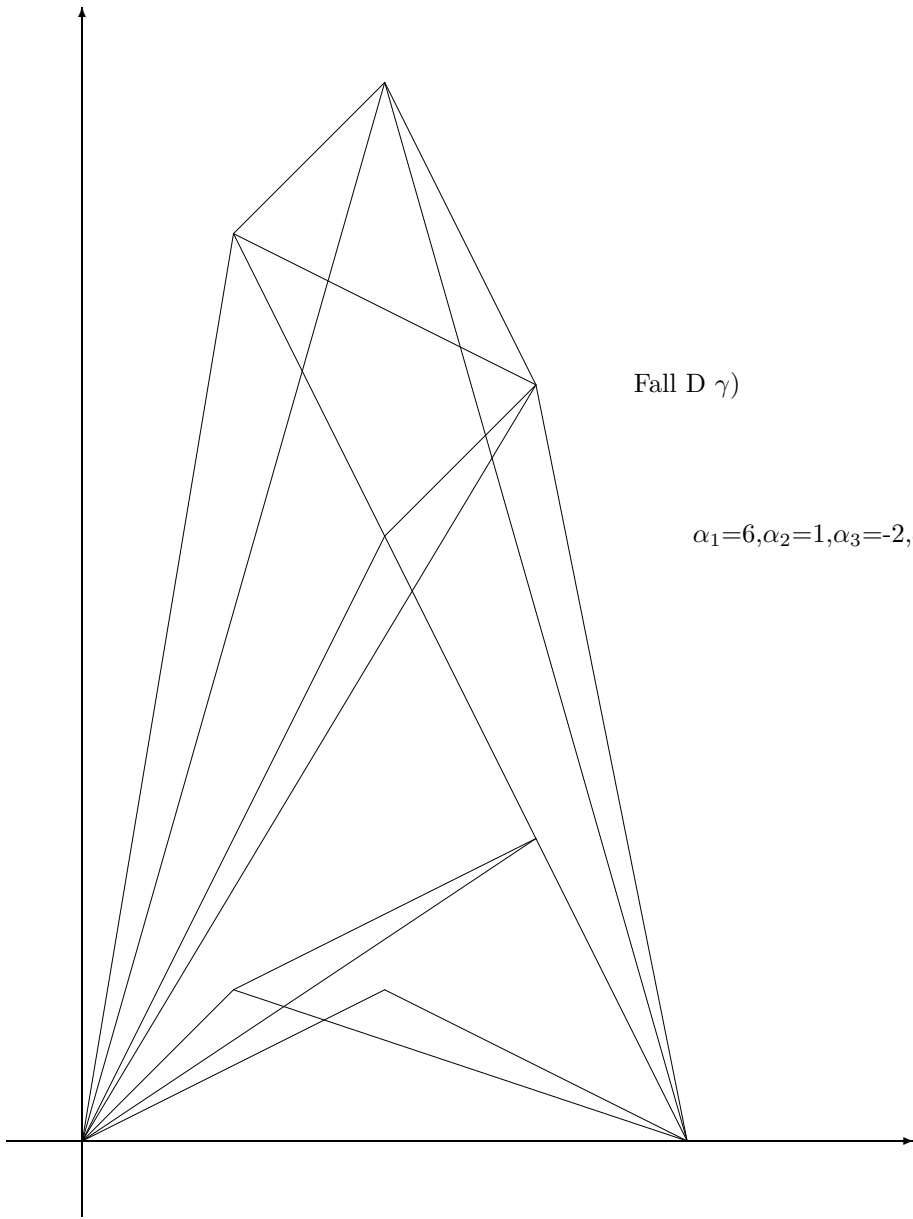
Fall D α)

$$\alpha_1=12, \alpha_2=1, \alpha_3=-4, \alpha_4=-9$$



Fall D β

$$\alpha_1=9, \alpha_2=1, \alpha_3=-3, \alpha_4=-7$$

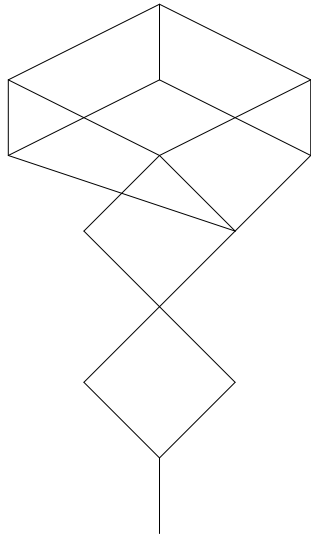


Fall D γ)

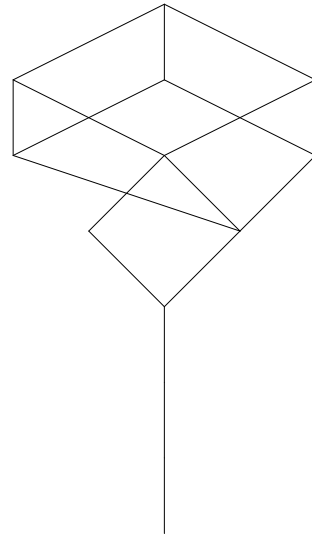
$$\alpha_1=6, \alpha_2=1, \alpha_3=-2, \alpha_4=-5$$

V D

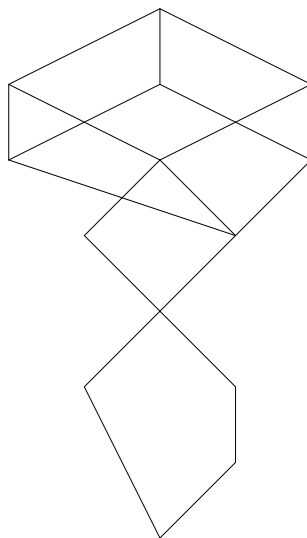
Fall α)



Fall β)

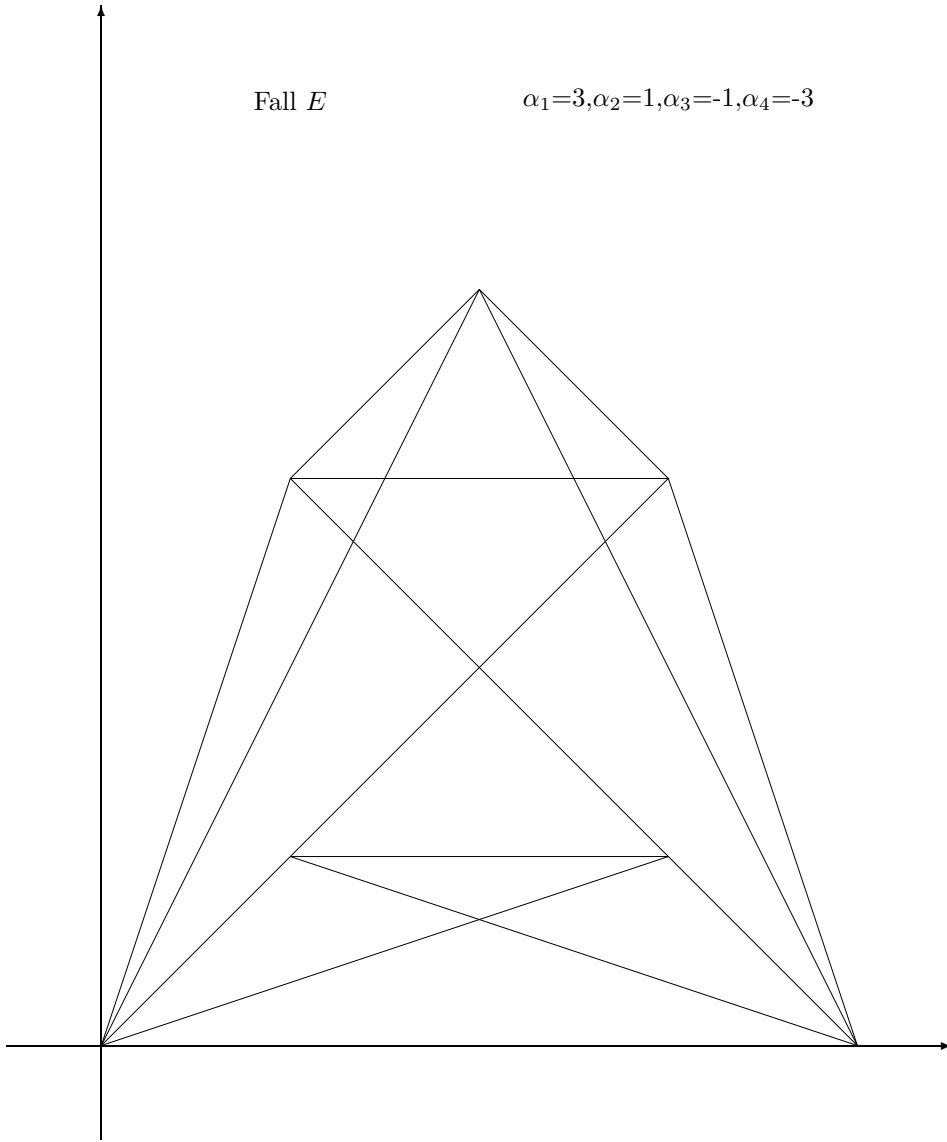


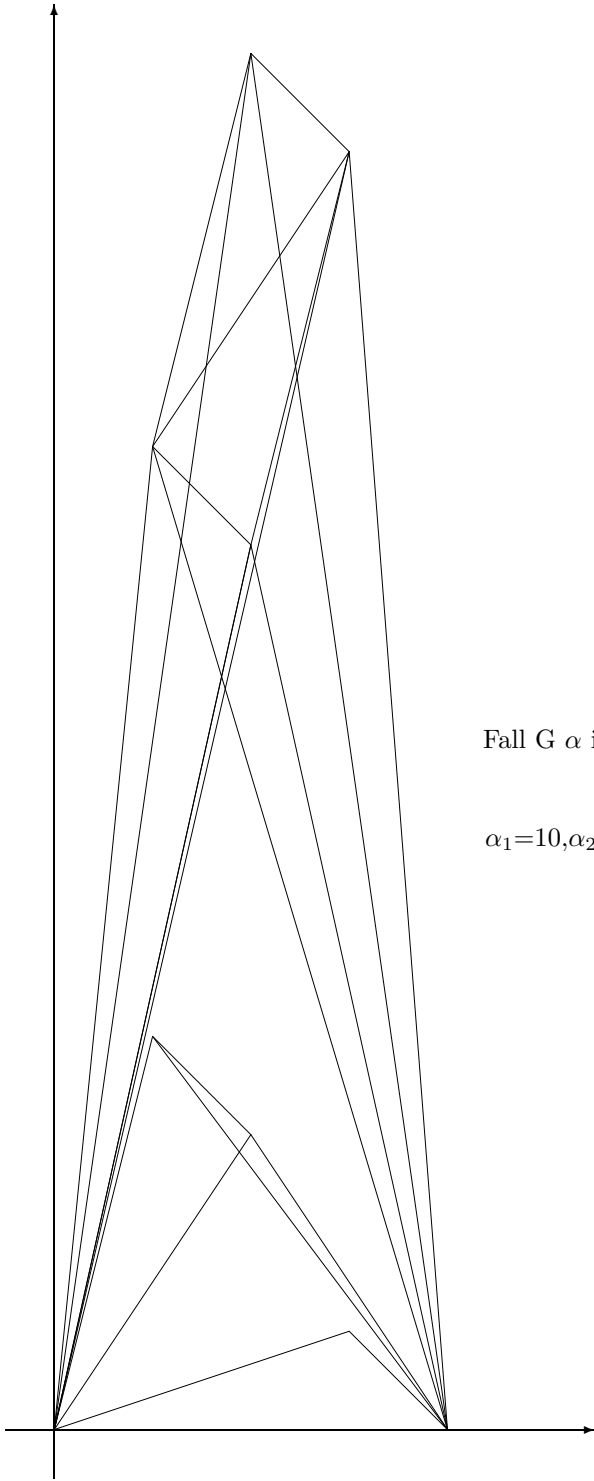
Fall γ)



Fall E

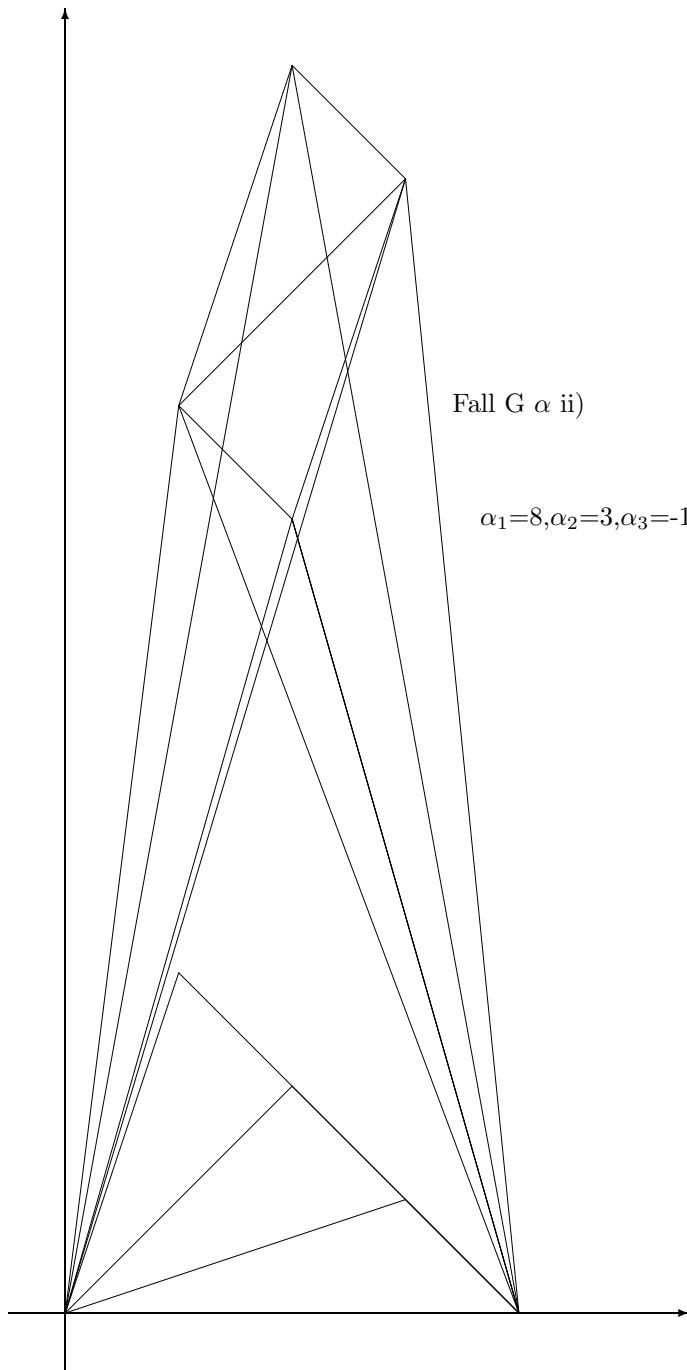
$$\alpha_1=3, \alpha_2=1, \alpha_3=-1, \alpha_4=-3$$





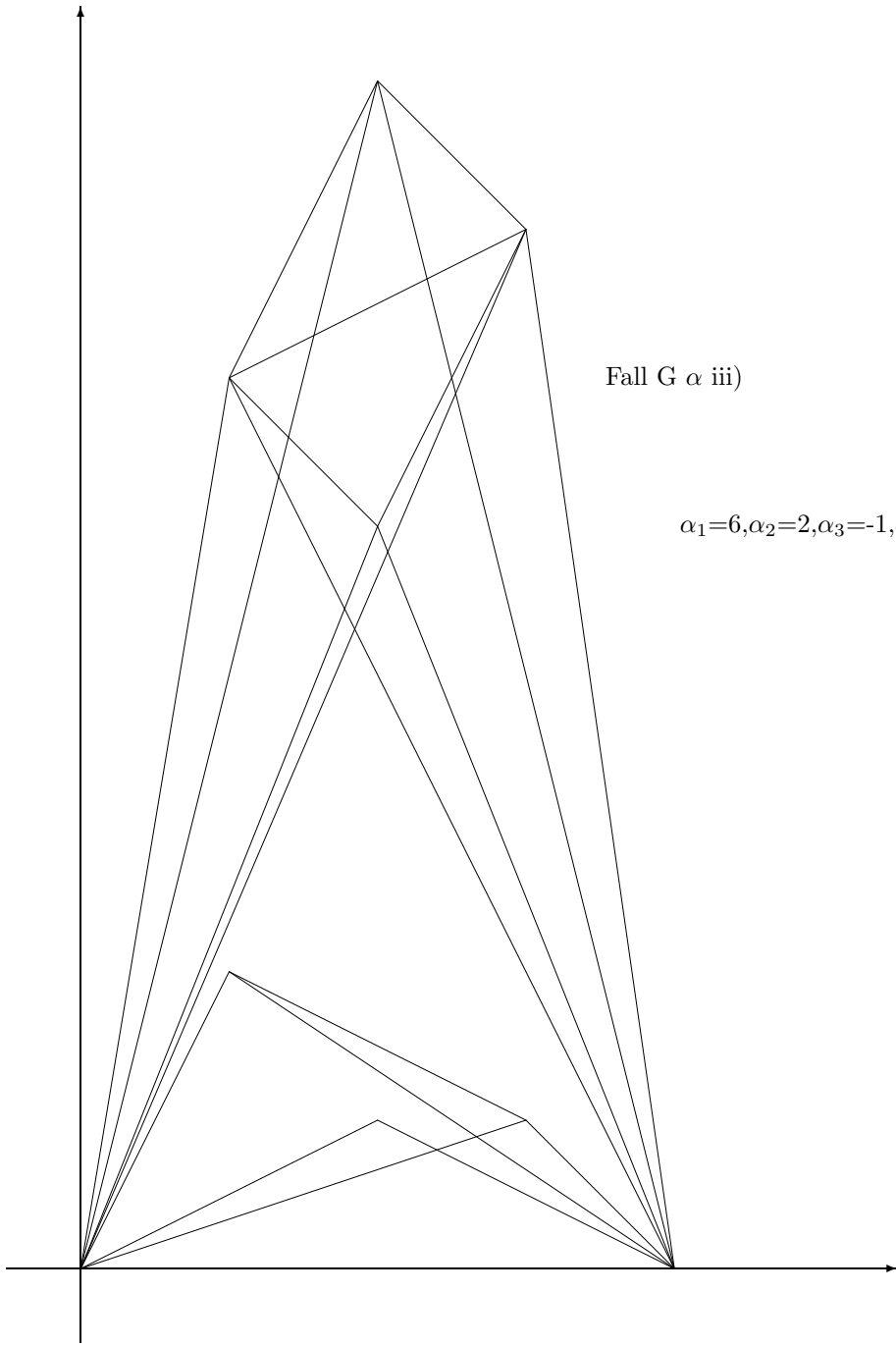
Fall G α i)

$$\alpha_1=10, \alpha_2=4, \alpha_3=-1, \alpha_4=-13$$



Fall G α ii)

$$\alpha_1=8, \alpha_2=3, \alpha_3=-1, \alpha_4=-10$$

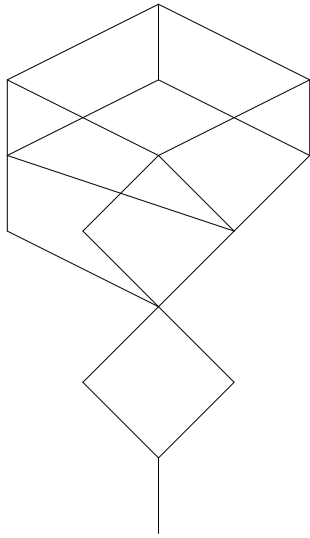


Fall G α iii)

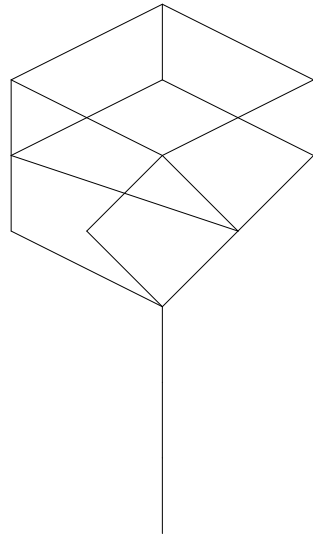
$$\alpha_1=6, \alpha_2=2, \alpha_3=-1, \alpha_4=-7$$

$V G \alpha$

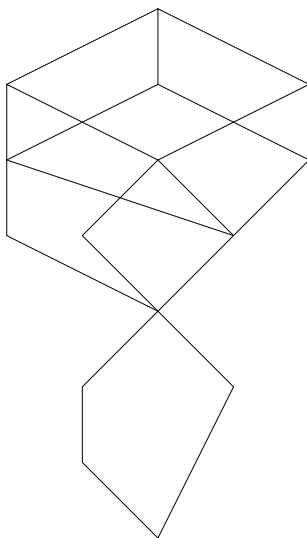
Fall i)

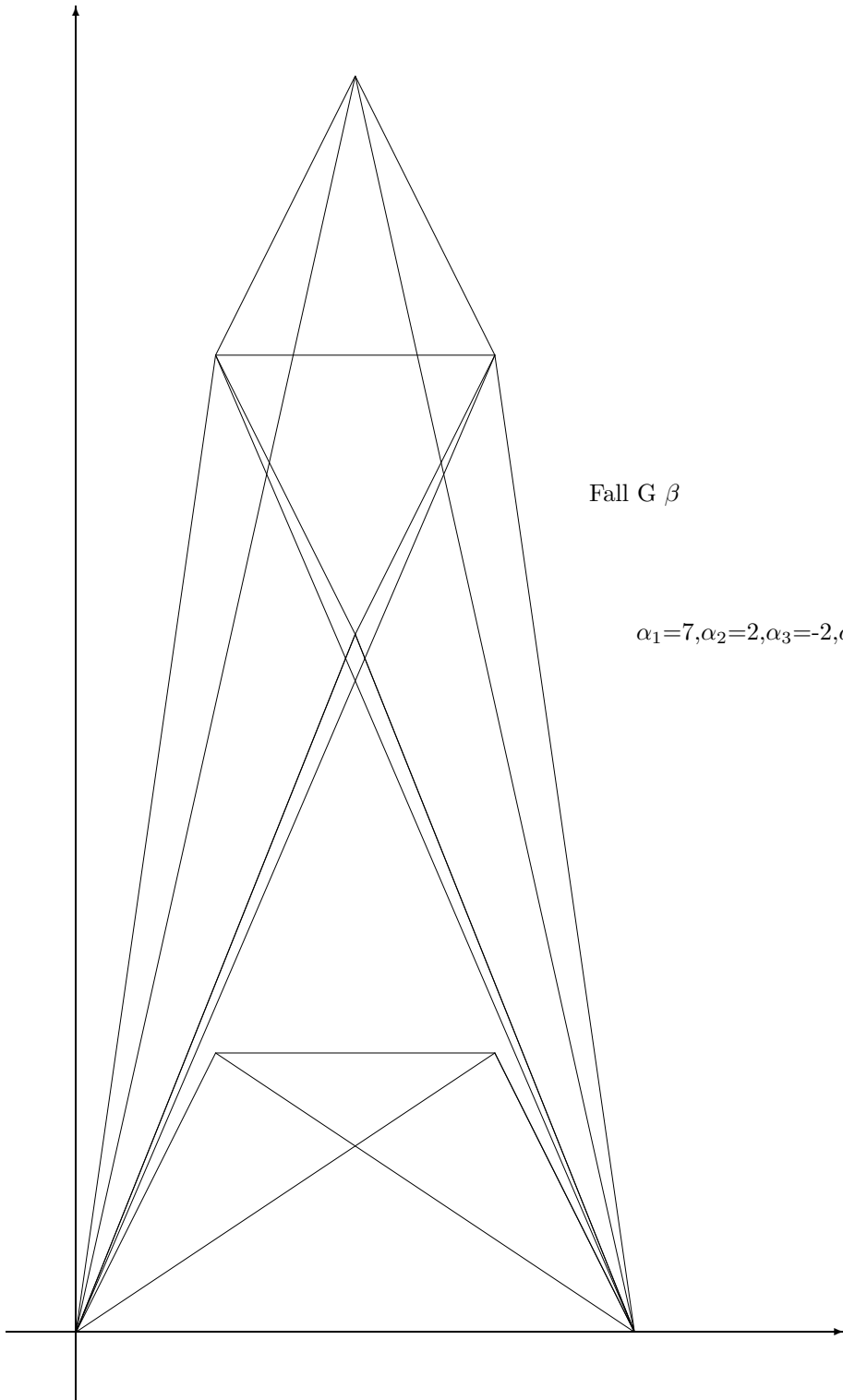


Fall ii)



Fall iii)



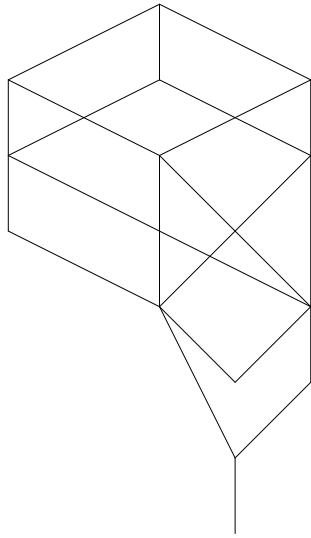


Fall G β

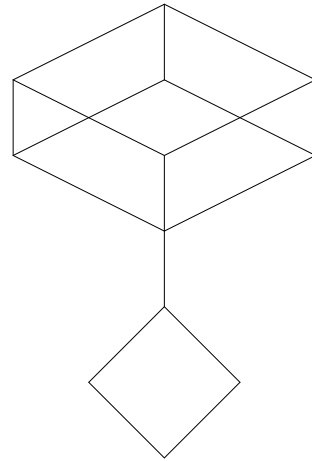
$$\alpha_1=7, \alpha_2=2, \alpha_3=-2, \alpha_4=-7,$$

V

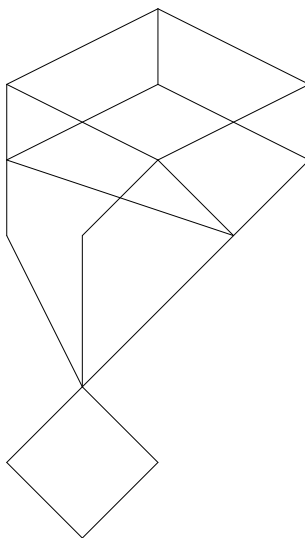
Fall B



Fall E



Fall G β)



2.3.2 $\{\mu\} = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $\{\mu\} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_3)$

$\{\mu\}$ entspreche dem 4-Tupel $(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ und $2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Betrachte folgende Fälle.

I $\alpha_2 > 0$

II $\alpha_2 = 0$

III $\alpha_2 < 0$ $\alpha) \alpha_1 + \alpha_3 > 2\alpha_2$
 $\beta) \alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_2$
 $\gamma) \alpha_1 + \alpha_3 < 2\alpha_2$

\mathcal{F} hat die Form $V^\bullet = (0) \subset \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}^2 \subset V$, $\dim \mathcal{F}^1 = 2$, $\dim \mathcal{F}^2 = 3$
 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

zu I

$\dim W = 3$

1. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) < 0$.
2. Fall $\mathcal{F}^1 \subset W$, $W \neq \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_3) < 0$.
3. Fall $\mathcal{F}^2 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2) > 0$.

$\dim W = 2$

1. Fall $\mathcal{F}^1 \cap W = 0 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3) < 0$.
2. Fall $\dim(\mathcal{F}^1 \cap W) = 1$, $W \not\subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3) < 0$.
3. Fall $\dim(\mathcal{F}^1 \cap W) = 1$, $W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) > 0$.
4. Fall $\mathcal{F}^1 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_1 > 0$.

$\dim W = 1$

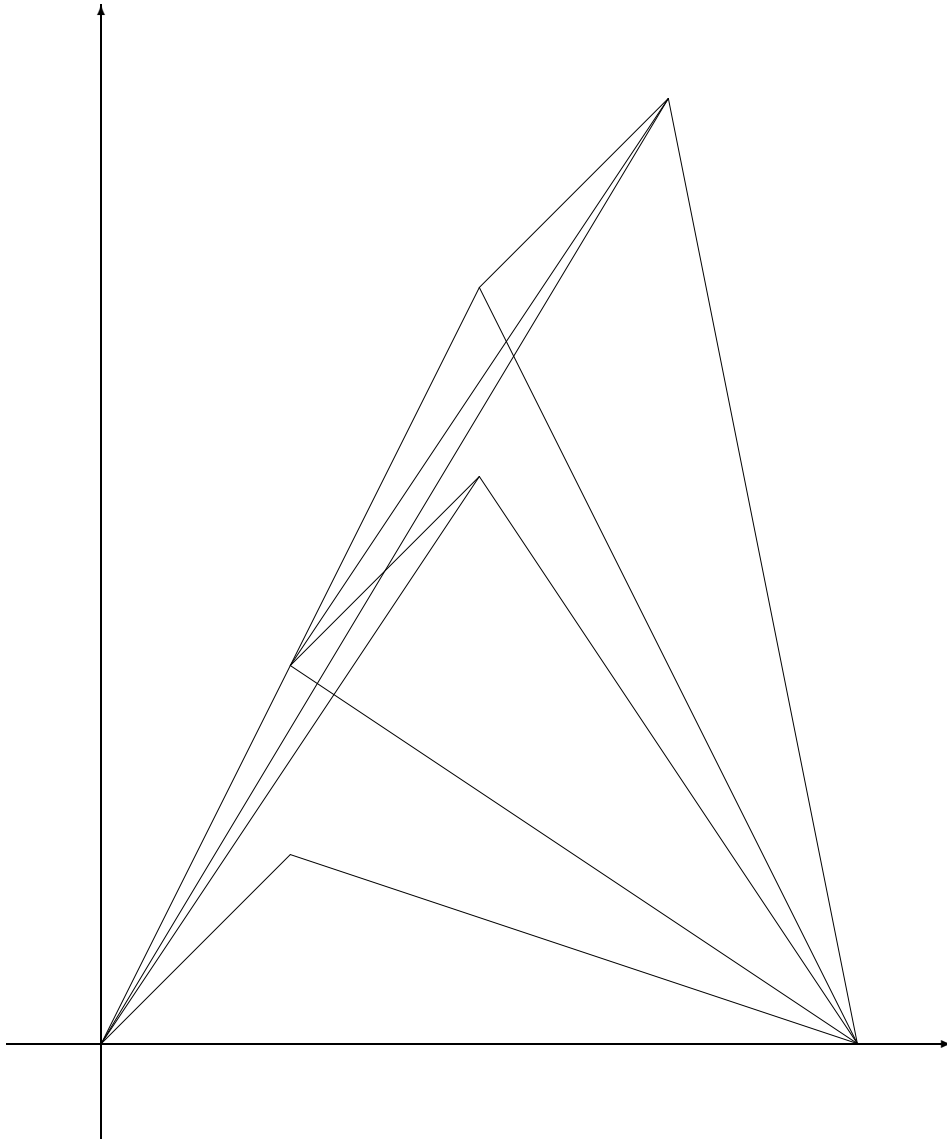
1. Fall $W \not\subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_3 < 0$.
2. Fall $W \not\subset \mathcal{F}^1$, $W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_2 > 0$.
3. Fall $W \subset \mathcal{F}^1 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_1 > 0$.

Also $\mathcal{F}^{ss} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} | \mathcal{F}^2 \text{ enthält kein nichttriviales Unterobjekt}\}$

HN-Filtration von V bzgl. eines $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{ss}$

- 1.) $\mathcal{F}^1 = W', \mathcal{F}^2 = W''$ beide zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W'' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$
- 2.) $\mathcal{F}^1 = W'$ zul., \mathcal{F}^2 nicht zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}$
- 3.) $\mathcal{F}^2 = W''$ zulässig, \mathcal{F}^1 nicht zulässig
 - a) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset W'' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad \alpha_3$
 - b) Es ex. kein 1-dim. Unterobjekt nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'' \subset V$.
 $-\frac{\alpha_3}{3} \quad \alpha_3$
- 4.) $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2$ beide nicht zulässig.
 - a) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall, und es ex. ein 2-dim. Unterobjekt \widetilde{W} nach 3.Fall mit $W \subset \widetilde{W} \Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset \widetilde{W} \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}$
 - b) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall, und es ex. kein 2-dim. Unterobjekt nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.
 $\alpha_1 \quad -\frac{\alpha_1}{3}$
 - c) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und 4a) tritt nicht ein
 $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.
 $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2}$
 - d) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 2.Fall und 4a) - 4c) kommen nicht als Möglichkeiten vor $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.
 $\alpha_2 \quad -\frac{\alpha_2}{3}$

$$\alpha_1=2, \alpha_2=1, \alpha_3=-5$$



zu II

dim W=3

1. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_3) < 0$.
2. Fall $\mathcal{F}^1 \subset W$, $W \neq \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_3) = 0$.
3. Fall $\mathcal{F}^2 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(2\alpha_1) > 0$.

dim W=2

1. Fall $\mathcal{F}^1 \cap W = 0 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_3) < 0$.
2. Fall $\dim(\mathcal{F}^1 \cap W) = 1$, $W \not\subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3) < 0$.
3. Fall $\dim(\mathcal{F}^1 \cap W) = 1$, $W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1) > 0$.
4. Fall $\mathcal{F}^1 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_1 > 0$.

dim W=1

1. Fall $W \not\subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_3 < 0$.
2. Fall $W \not\subset \mathcal{F}^1$, $W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = 0$.
3. Fall $W \subset \mathcal{F}^1 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_1 > 0$.

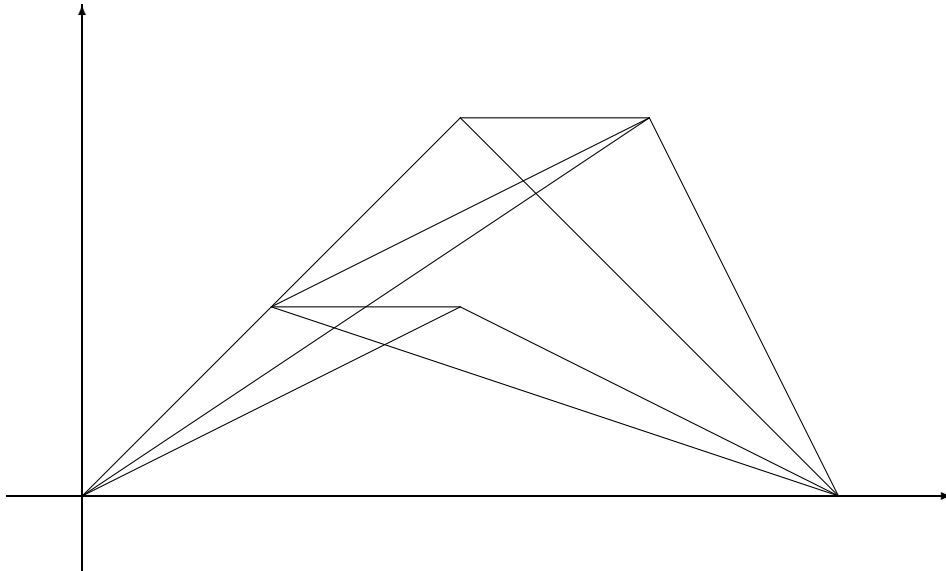
Also $\mathcal{F}^{ss} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} \mid \text{Falls } \mathcal{F}^2 \text{ ein Unterobjekt } W \text{ enth\u00e4lt, so gilt } \mathcal{F}^1 \oplus W = \mathcal{F}^2\}$

HN-Filtration von V bzgl. eines $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{ss}$

1. $\mathcal{F}^1 = W'$, $\mathcal{F}^2 = W''$ beide zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W'' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad 0 \quad \alpha_3$
2. $\mathcal{F}^1 = W'$ zul., \mathcal{F}^2 nicht zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \frac{\alpha_3}{2}$
3. $\mathcal{F}^2 = W''$ zul\u00e4ssig, \mathcal{F}^1 nicht zul\u00e4ssig
 - (a) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset W'' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \frac{\alpha_1}{2} \quad \alpha_3$
 - (b) Es ex. kein 1-dim. Unterobjekt nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'' \subset V$.
 $\frac{2\alpha_1}{3} \quad \alpha_3$
4. \mathcal{F}^1 , \mathcal{F}^2 beide nicht zul\u00e4ssig.

- (a) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall, und es ex. ein 2-dim. Unterobjekt \widetilde{W} nach 3.Fall mit $W \subset \widetilde{W} \Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset \widetilde{W} \subset V$.
 $\alpha_1 \quad 0 \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}$
- (b) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall, und es ex. kein 2-dim. Unterobjekt nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.
 $\alpha_1 \quad -\frac{\alpha_1}{3}$
- (c) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und 4a) tritt nicht ein
 $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.
 $\frac{\alpha_1}{2} \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}$

$$\alpha_1=1, \alpha_2=0 \quad \alpha_3=-2$$



zu **III**

$$\dim W=3$$

1. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) < 0$.
2. Fall $\mathcal{F}^1 \subset W, W \neq \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_3) > 0$.

3. Fall $\mathcal{F}^2 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2) > 0$.

$\dim W=2$

1. Fall $\mathcal{F}^1 \cap W = 0 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3) < 0$.

2. Fall $\dim(\mathcal{F}^1 \cap W)=1$, $W \not\subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3) < 0$.

3. Fall $\dim(\mathcal{F}^1 \cap W)=1$, $W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) > 0$.

4. Fall $\mathcal{F}^1 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_1 > 0$.

$\dim W=1$

1. Fall $W \not\subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_3 < 0$.

2. Fall $W \not\subset \mathcal{F}^1$, $W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_2 < 0$.

3. Fall $W \subset \mathcal{F}^1 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_1 > 0$.

Also $\mathcal{F}^{ss} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} | \mathcal{F}^2 \text{ enthält kein nichttriviales Unterobjekt}\}$

HN-Filtration von V bzgl. eines $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{ss}$

1.) $\mathcal{F}^1 = W'$, $\mathcal{F}^2 = W''$ beide zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W'' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

2.) $\mathcal{F}^1 = W'$ zul., \mathcal{F}^2 nicht zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}$

3.) $\mathcal{F}^2 = W''$ zulässig, \mathcal{F}^1 nicht zulässig

a) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset W'' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad \alpha_3$

b) Es ex. kein 1-dim. Unterobjekt nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'' \subset V$.
 $-\frac{\alpha_3}{3} \quad \alpha_3$

4.) \mathcal{F}^1 , \mathcal{F}^2 beide nicht zulässig.

α)

a) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall, und es ex. ein 3-dim. Unterobjekt \widetilde{W} nach 2.Fall mit $W \subset \widetilde{W} \Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset \widetilde{W} \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \quad \alpha_2$

b) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall, und es ex. kein 3-dim. Unterobjekt nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\alpha_1 \quad -\frac{\alpha_1}{3}$$

c) Es ex. ein 3-dim. Unterobjekt W nach 2.Fall und 4a) tritt nicht ein $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$-\frac{\alpha_2}{3} \quad \alpha_2$$

d) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und 4a)-4c) kommen nicht als Möglichkeiten vor $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}$$

β)

a) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\alpha_1 \quad -\frac{\alpha_1}{3}$$

b) wie α),d).

c) wie α),c).

γ)

a) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall, und es ex. ein 2-dim. Unterobjekt \widetilde{W} nach 3.Fall mit $W \subset \widetilde{W} \Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset \widetilde{W} \subset V$.

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}$$

b) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall, und es ex. kein Unterobjekt \widetilde{W} nach 3.Fall mit $W \subset \widetilde{W} \Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\alpha_1 \quad -\frac{\alpha_1}{3}$$

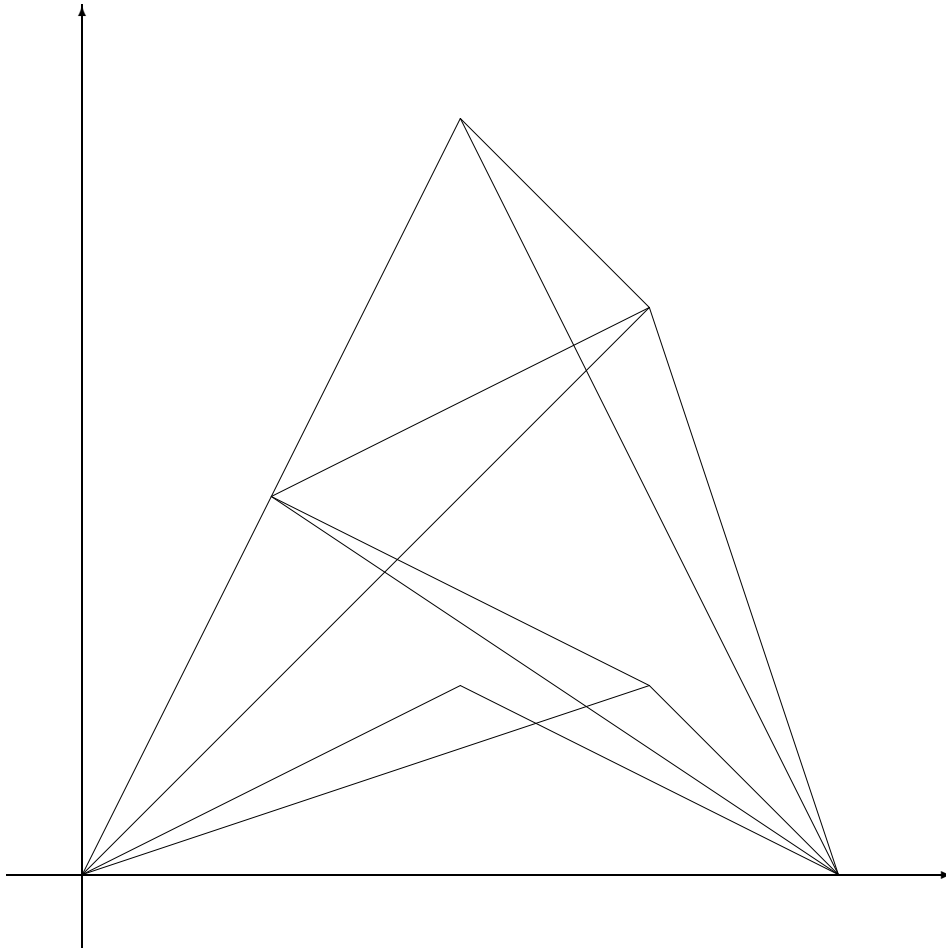
c) wie α) ,d).

d) wie α) ,c).

Bemerkung : Falls ein 3-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und ein 2-dim. Unterobjekt \widetilde{W} gleichzeitig existieren, so ist $W \cap \widetilde{W}$ ein 1-dim. Unterobjekt mit $W \cap \widetilde{W} \subset \mathcal{F}^1$.

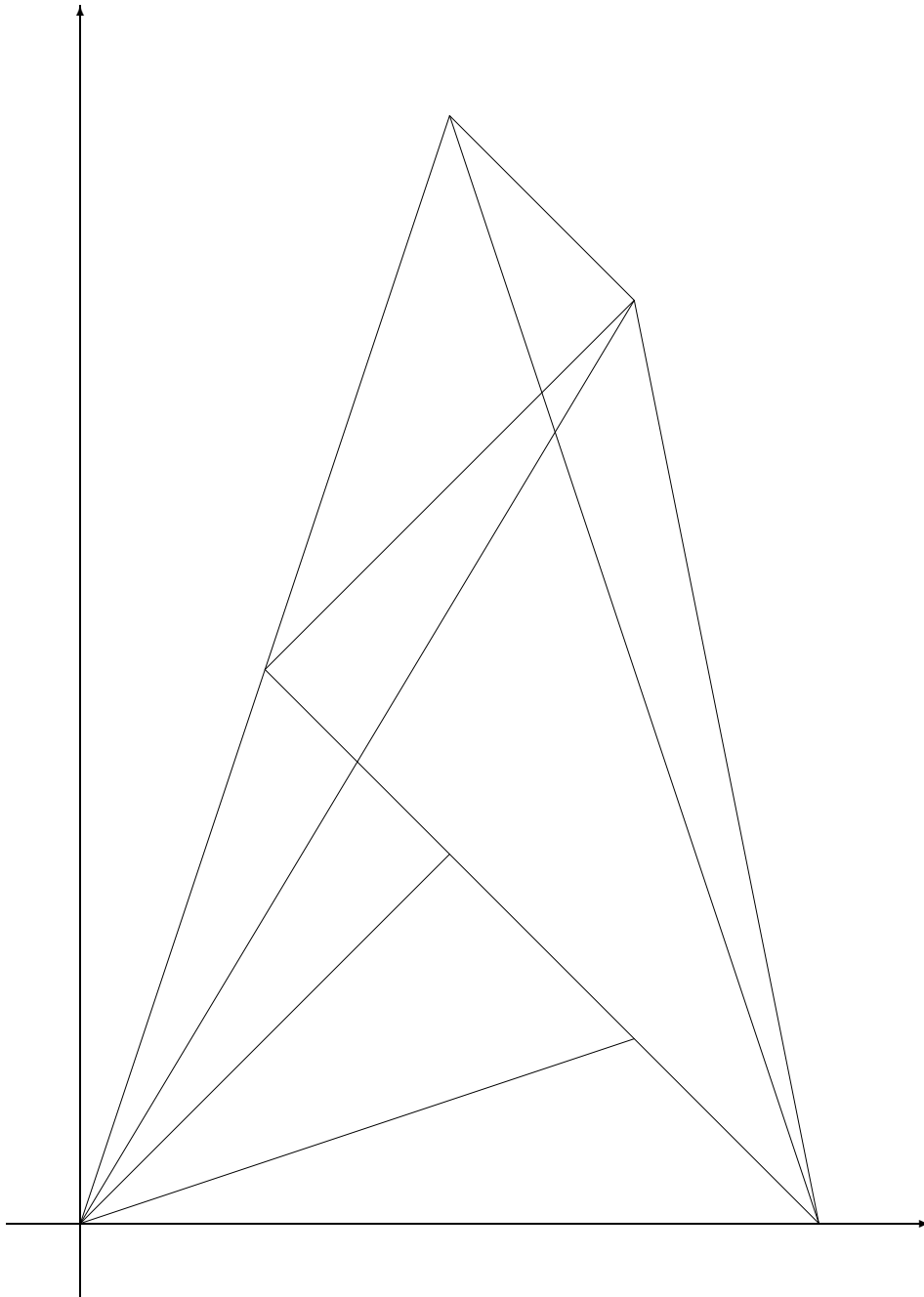
Fall α)

$$\alpha_1=3, \alpha_2=-1, \alpha_3=-5$$



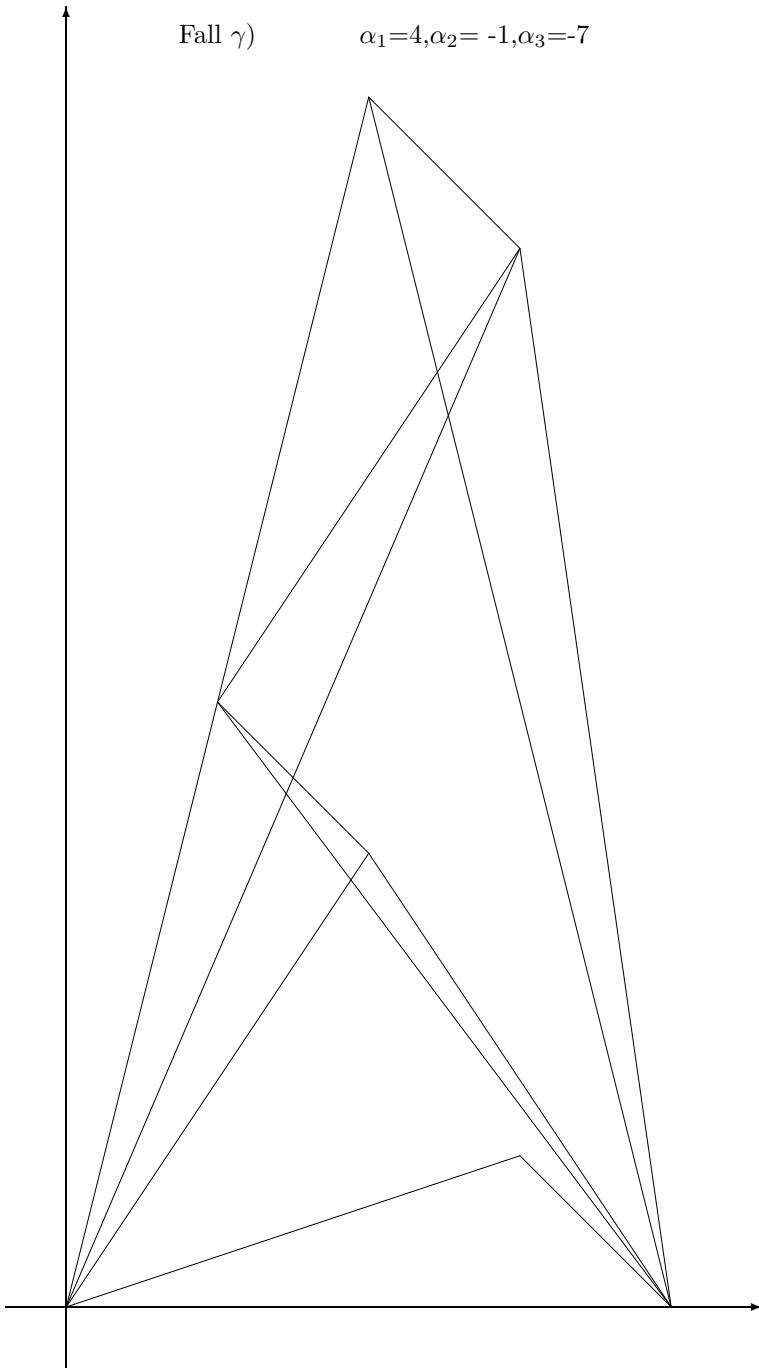
Fall β)

$\alpha_1=3, \alpha_2=-1, \alpha_3=-5$

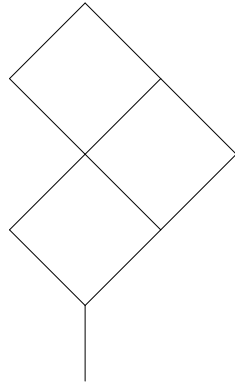


Fall γ)

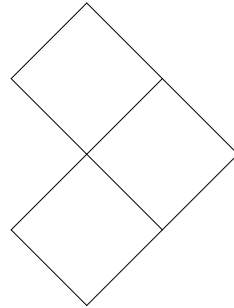
$$\alpha_1=4, \alpha_2=-1, \alpha_3=-7$$



I

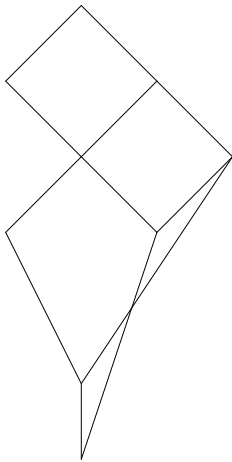


II

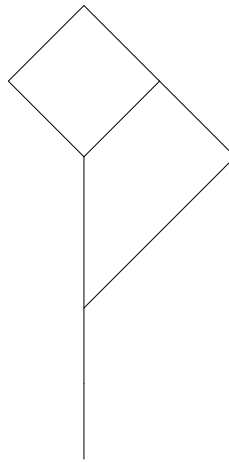


III

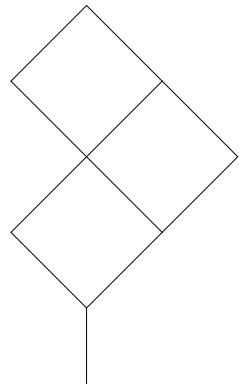
Fall α)



Fall β)



Fall γ)



2.3.3 $\{\mu\} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$

$\{\mu\}$ entspreche dem 4-Tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ mit $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ und $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Betrachte folgende Fälle.

I $\alpha_2 > 0$

II $\alpha_2 = 0$

III $\alpha_2 < 0$

$$\mathcal{F} \text{ hat die Form } V^\bullet = (0) \subset \underset{\alpha_1}{\mathcal{F}^1} \subset \underset{\alpha_2}{\mathcal{F}^2} \subset \underset{\alpha_3}{V}, \dim \mathcal{F}^1 = 1, \dim \mathcal{F}^3 = 3.$$

zu I

$\dim W = 3$

1. **Fall** $\mathcal{F}^1 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(2\alpha_2 + \alpha_3) < 0$.
2. **Fall** $\mathcal{F}^1 \subset W, \mathcal{F}^2 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) < 0$.
3. **Fall** $\mathcal{F}^2 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2) > 0$.

$\dim W = 2$

1. **Fall** $\mathcal{F}^1 \cap W = 0, W \not\subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3) < 0$.
2. **Fall** $\mathcal{F}^1 \cap W = 0, W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(2\alpha_2) > 0$.
3. **Fall** $\mathcal{F}^1 \subset W, W \not\subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3) < 0$.
4. **Fall** $\mathcal{F}^1 \subset W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) > 0$.

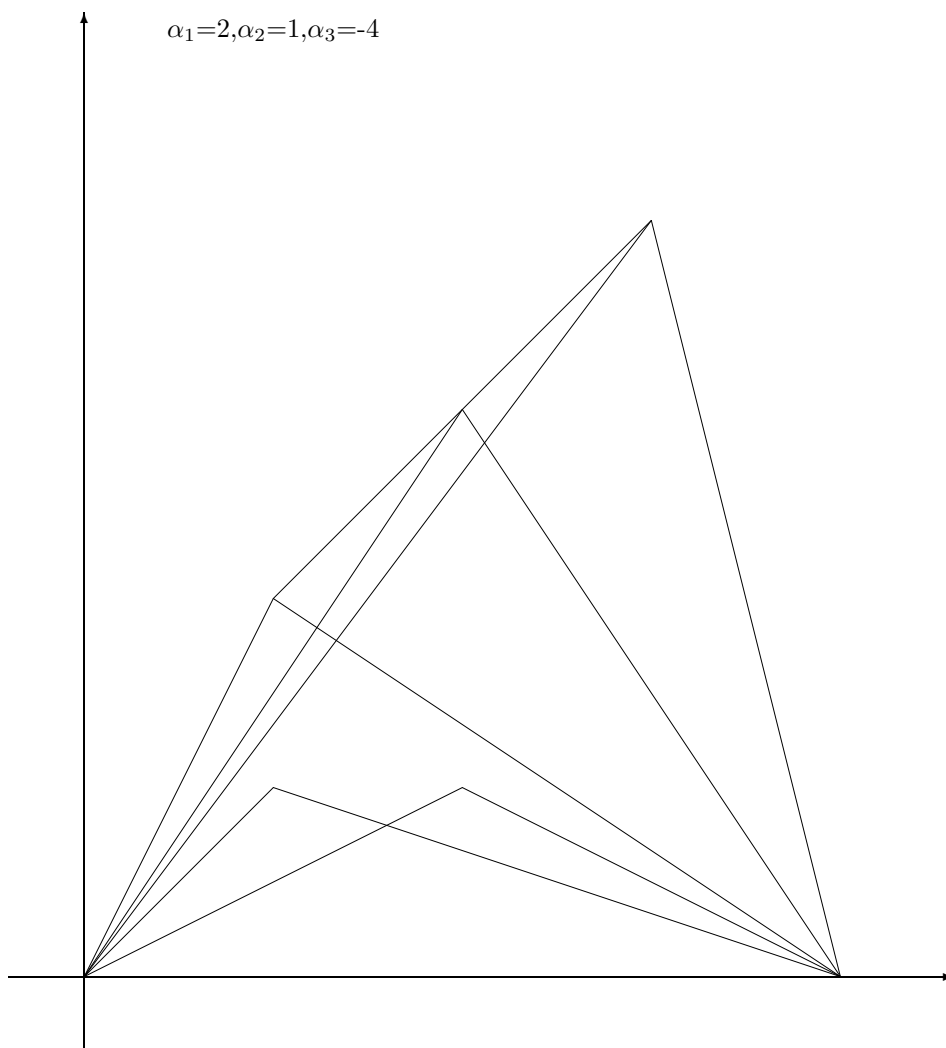
$\dim W = 1$

1. **Fall** $\mathcal{F}^2 \cap W = 0 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_3 < 0$.
2. **Fall** $\mathcal{F}^1 \neq W, W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_2 > 0$.
3. **Fall** $\mathcal{F}^1 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_1 > 0$.

Also $\mathcal{F}^{ss} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} | \mathcal{F}^2 \text{ enthält kein nichttriviales Unterobjekt}\}$

HN-Filtration von V bzgl. eines $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{ss}$

- 1.) $\mathcal{F}^1 = W'$, $\mathcal{F}^2 = W''$ beide zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W'' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$
- 2.) $\mathcal{F}^1 = W'$ zulässig, \mathcal{F}^2 nicht zulässig
 - a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 4.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W \subset V$.
 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}$
 - b) Es ex. kein 2-dim. Unterobjekt nach 4.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset V$.
 $\alpha_1 \quad -\frac{\alpha_1}{3}$
- 3.) \mathcal{F}^1 nicht zulässig, $\mathcal{F}^2 = W''$ zulässig
 - a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 4.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset W'' \subset V$.
 $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$
 - b) Es ex. kein 2-dim. Unterobjekt nach 4.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'' \subset V$.
 $-\frac{\alpha_3}{3} \quad \alpha_3$
- 4.) $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2$ beide nicht zulässig
 - a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 4.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.
 $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}$
 - b) Es ex. 2-dim. Unterobjekt W nach 2.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.
 $\alpha_2 \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}$
 - c) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 2.Fall und 4b) tritt nicht ein
 $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.
 $\alpha_2 \quad -\frac{\alpha_2}{3}$



zu **II**

$\dim W=3$

1. **Fall** $\mathcal{F}^1 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_3) < 0$.
2. **Fall** $\mathcal{F}^1 \subset W, \mathcal{F}^2 \neq W \Rightarrow \text{slope}(W) = 0$.
3. **Fall** $\mathcal{F}^2 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_1) > 0$.

$\dim W = 2$

1. **Fall** $\mathcal{F}^1 \cap W = 0, W \not\subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_3) < 0.$
2. **Fall** $\mathcal{F}^1 \cap W = 0, W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = 0.$
3. **Fall** $\mathcal{F}^1 \subset W, W \not\subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = 0.$
4. **Fall** $\mathcal{F}^1 \subset W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1) > 0.$

$\dim W = 1$

1. **Fall** $\mathcal{F}^2 \cap W = 0 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_3 < 0.$
2. **Fall** $\mathcal{F}^1 \neq W, W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = 0.$
3. **Fall** $\mathcal{F}^1 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_1 > 0.$

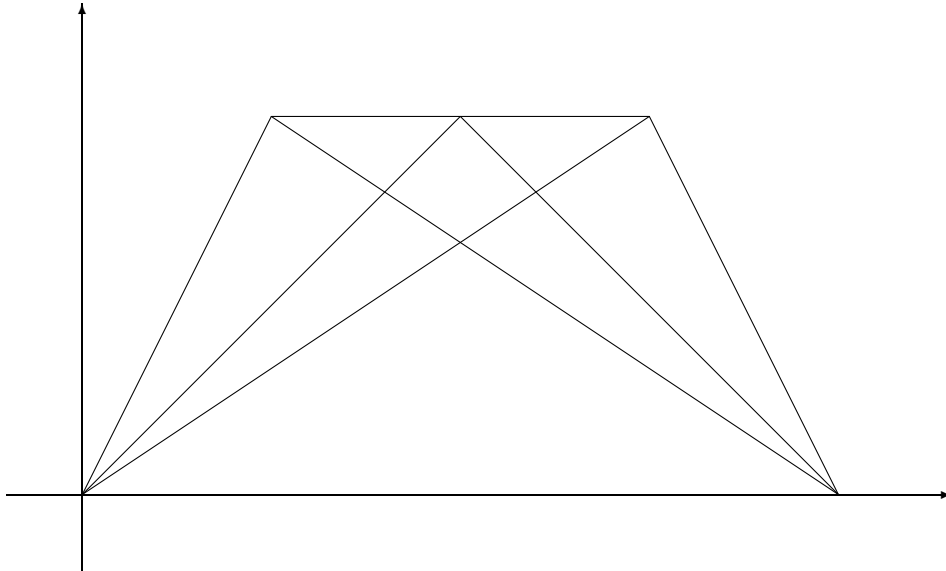
Also

$$\mathcal{F}^{ss} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} | \mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2 \text{ beide nicht zul. und, es ex. kein Unterobjekt } W \text{ mit } \mathcal{F}^1 \subset W \subset \mathcal{F}^2\}$$

HN-Filtration von V bzgl. eines $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{ss}$

- 1.) $\mathcal{F}^1 = W', \mathcal{F}^2 = W''$ beide zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W'' \subset V.$
 $\alpha_1 \quad 0 \quad \alpha_3$
- 2.) $\mathcal{F}^1 = W'$ zulässig, \mathcal{F}^2 nicht zulässig
 - a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 4.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W \subset V.$
 $\alpha_1 \quad 0 \quad \frac{\alpha_3}{2}$
 - b) Es ex. kein 2-dim. Unterobjekt nach 4.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset V.$
 $\alpha_1 \quad \frac{\alpha_3}{3}$
- 3.) \mathcal{F}^1 nicht zulässig, $\mathcal{F}^2 = W''$ zulässig
 - a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 4.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset W'' \subset V.$
 $\frac{\alpha_1}{2} \quad 0 \quad \alpha_3$
 - b) Es ex. kein 2-dim. Unterobjekt nach 4.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'' \subset V.$
 $\frac{\alpha_1}{3} \quad \alpha_3$
- 4.) $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2$ beide nicht zulässig $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V.$, wobei W ein 2-dim. Unterobjekt nach 4.Fall darstellt.
 $\frac{\alpha_1}{2} \quad \frac{\alpha_3}{2}$

$$\alpha_1=2, \alpha_2=0, \alpha_3=-2$$



zu III

$\dim W=3$

1. **Fall** $\mathcal{F}^1 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(2\alpha_2 + \alpha_3) < 0$.
2. **Fall** $\mathcal{F}^1 \subset W, \mathcal{F}^2 \neq W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) > 0$.
3. **Fall** $\mathcal{F}^2 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2) > 0$.

$\dim W=2$

1. **Fall** $\mathcal{F}^1 \cap W = 0, W \not\subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3) < 0$.
2. **Fall** $\mathcal{F}^1 \cap W = 0, W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(2\alpha_2) < 0$.
3. **Fall** $\mathcal{F}^1 \subset W, W \not\subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3) > 0$.
4. **Fall** $\mathcal{F}^1 \subset W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) > 0$.

$\dim W=1$

1. **Fall** $\mathcal{F}^2 \cap W = 0 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_3 < 0$.

2. Fall $\mathcal{F}^1 \neq W$, $W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_2 < 0$.

3. Fall $\mathcal{F}^1 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_1 > 0$.

Also $\mathcal{F}^{ss} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} \mid \mathcal{F}^1 \text{ ist in keinem echten Unterobjekt enthalten}\}$

HN-Filtration von V bzgl. eines $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{ss}$

1.) $\mathcal{F}^1 = W'$, $\mathcal{F}^2 = W''$ beide zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W'' \subset V$.

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$$

2.) $\mathcal{F}^1 = W'$ zulässig, \mathcal{F}^2 nicht zulässig.

a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 4.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W \subset V$.

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}$$

b) Es ex. kein 2-dim. Unterobjekt nach 4.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset V$.

$$\alpha_1 \quad -\frac{\alpha_1}{3}$$

3.) \mathcal{F}^1 nicht zul., $\mathcal{F}^2 = W''$ zul.

a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 4.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset W'' \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$$

b) Es ex. kein 2-dim. Unterobjekt nach 4.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'' \subset V$.

$$-\frac{\alpha_3}{3} \quad \alpha_3$$

4.) $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2$ beide nicht zulässig.

a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 4.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}$$

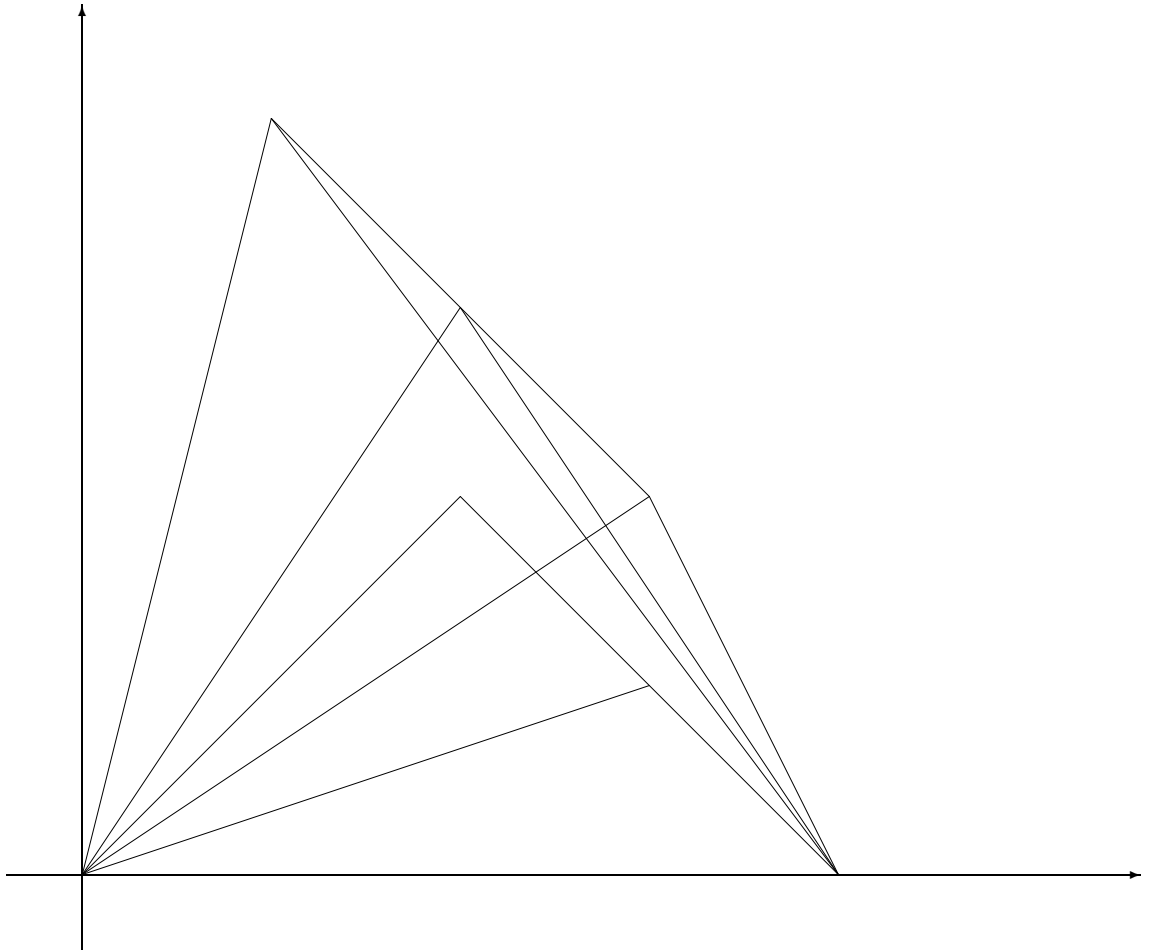
b) Es ex. 2-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \quad \alpha_2$$

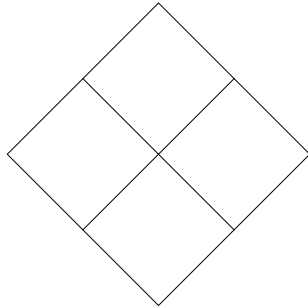
c) Es ex. ein 3-dim. Unterobjekt W nach 2.Fall und 4a), 4b) treten nicht ein
 $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$-\frac{\alpha_2}{3} \quad \alpha_2$$

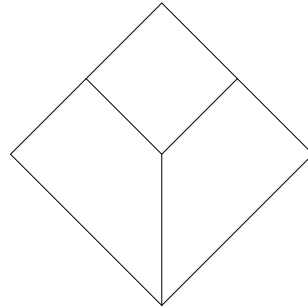
$$\alpha_1=4, \alpha_2=-1, \alpha_3=-2$$



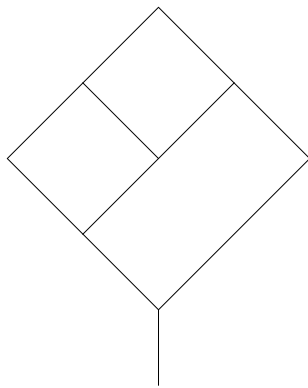
I



II



III



2.3.4 $\{\mu\} = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2)$ und $\{\mu\} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2)$

$\{\mu\}$ entspreche dem 4-Tupel $(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2)$ mit $\alpha_1 > \alpha_2$ und $3\alpha_1 + \alpha_2 = 0$.

$$\mathcal{F} \text{ hat die Form } V^\bullet = (0) \subset \mathcal{F}^1 \subset V, \dim \mathcal{F}^1 = 3.$$

$$\alpha_1 \quad \alpha_2$$

zu I

$\dim W = 3$

1. Fall $\mathcal{F}^1 \neq W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2) < 0$.

2. Fall $W \subset \mathcal{F}^1 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{3}(3\alpha_1) = \alpha_1 > 0$.

$\dim W = 2$

1. Fall $W \not\subset \mathcal{F}^1 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) < 0$.

2. Fall $W \subset \mathcal{F}^1 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(2\alpha_1) = \alpha_1 > 0$.

$\dim W = 1$

1. Fall $W \not\subset \mathcal{F}^1 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_2 < 0$.

2. Fall $W \subset \mathcal{F}^1 \Rightarrow \text{slope}(W) > 0$.

Also $\mathcal{F}^{ss} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}|\mathcal{F}^1 \text{ enthält kein nichttriviales Unterobjekt}\}$

HN-Filtration von V bzgl. eines $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{ss}$

1.) $\mathcal{F}^1 = W'$ zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset V$.

$$\alpha_1 \quad \alpha_2$$

2.) \mathcal{F}^1 nicht zulässig.

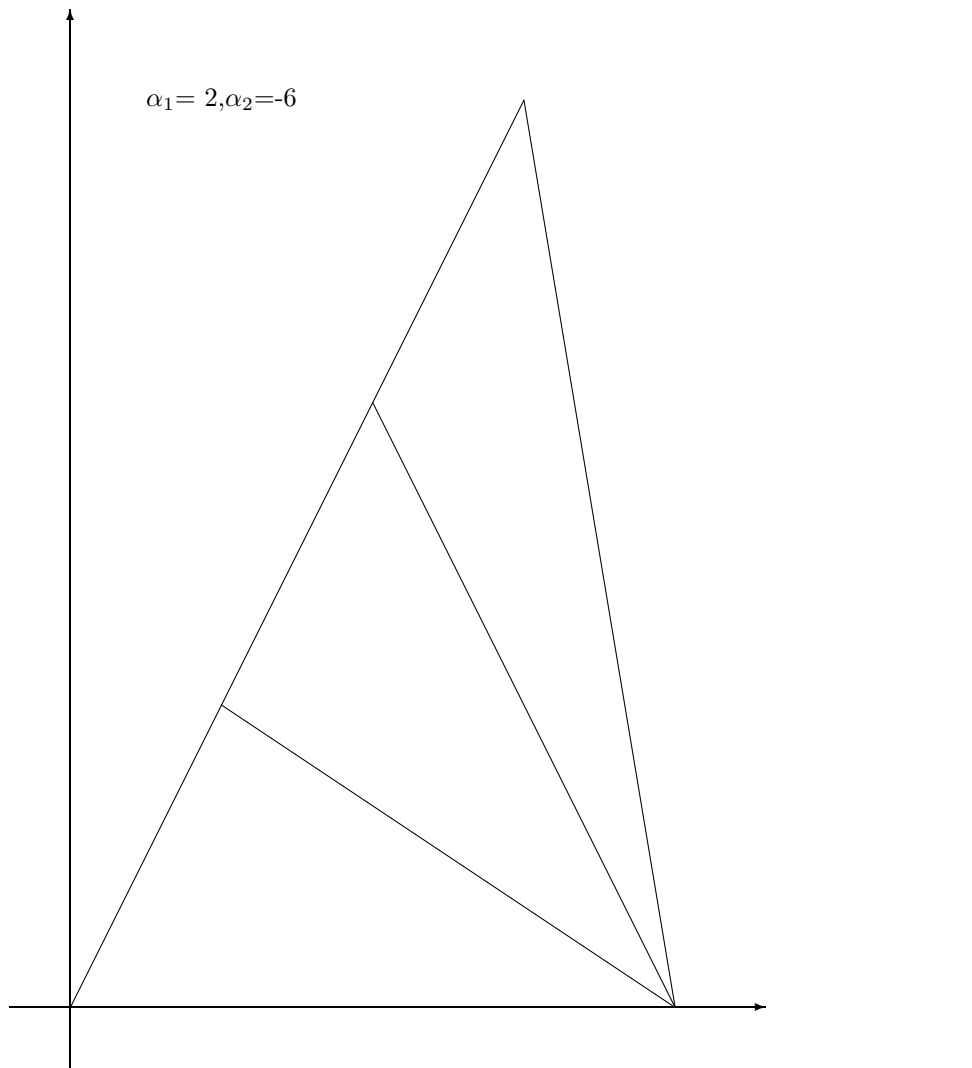
a) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 2. Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\alpha_1 \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

b) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 2. Fall und 2a) tritt nicht ein

$$\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V.$$

$$\alpha_1 \quad -\frac{\alpha_1}{3}$$



2.3.5 $\{\mu\} = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)$

$\{\mu\}$ entspreche dem 4-Tupel $(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)$ mit $\alpha_1 > \alpha_2$ und $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$.

\mathcal{F} hat die Form $V^\bullet = (0) \subset \mathcal{F}^1 \subset V$, $\dim \mathcal{F}^1 = 2$.

$$\begin{array}{cc} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \alpha_1 & \alpha_2 \end{array}$$

zu **I**

$\dim W = 3$

1. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3} < 0$.

2. Fall $\mathcal{F}^1 \subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{3} > 0$.

$\dim W = 2$

1. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_2 < 0$.

2. Fall $\dim(\mathcal{F}^1 \cap W) = 1 \Rightarrow \text{slope}(W) = 0$.

3. Fall $\mathcal{F}^2 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_1 > 0$.

$\dim W = 1$

1. Fall $W \not\subset \mathcal{F}^1 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_2 < 0$.

2. Fall $W \subset \mathcal{F}^1 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_1 > 0$.

Also

$\mathcal{F}^{ss} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F} \mid \mathcal{F}^1 \text{ enthält kein echtes Unterobjekt und ist in keinem enthalten}\}$

HN-Filtration von V bzgl. eines $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{ss}$

1.) $\mathcal{F}^1 = W'$ zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset V$.

$$\begin{array}{cc} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \alpha_1 & \alpha_2 \end{array}$$

2.) \mathcal{F}^1 nicht zulässig.

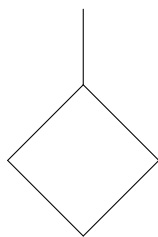
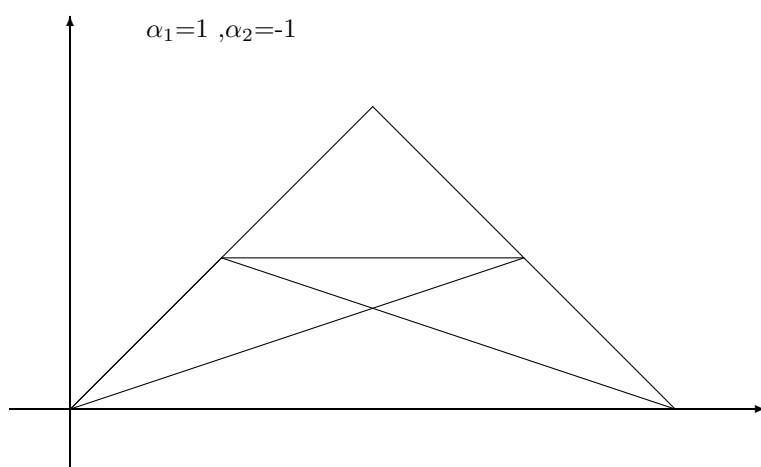
a) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 2.Fall und ein 3-dim. Unterobjekt \widetilde{W} nach 2.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset \widetilde{W} \subset V$.

$$\alpha_1 \quad 0 \quad \alpha_2$$

b) Es ex. ein 1- dim. Unterobjekt nach 2.Fall und kein 3-dim. Unterobjekt nach 2.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$\alpha_1 \quad -\frac{\alpha_1}{3}$$

c) Es ex. ein 3-dim. Unterobjekt W nach 2.Fall und die Fälle 2a),2b) treten nicht auf $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V$.

$$-\frac{\alpha_2}{3} \quad \alpha_3$$


2.4 V ist ein 4-dim. sympl. Vektorraum

Sei (V, \langle, \rangle) ein vierdimensionaler symplektischer Vektorraum. Wähle Basis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ von V , so daß \langle, \rangle der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ entspricht. Fixiere $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ und einen zulässigen Unterraum $W \subset V$. Sei $\mathcal{F}_{\langle, \rangle}$ die Menge der Filtrationen von V der folgenden Art:

$$V^\bullet = (0) \subset \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}^2 \subset \mathcal{F}^3 \subset V.$$

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4$$

mit $\dim(\mathcal{F}^{i+1} / \mathcal{F}^i) = 1, i=0,1,2,3$ und $(\mathcal{F}^1)^\perp = \mathcal{F}^3, \mathcal{F}^2 = \mathcal{F}^{2\perp}$.

$\dim W = 3$

1. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = -\frac{\alpha_1}{3} < 0$.
2. Fall $\mathcal{F}^1 \subset W, \mathcal{F}^2 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = -\frac{\alpha_2}{3} < 0$.
3. Fall $\mathcal{F}^2 \subset W, \mathcal{F}^3 \not\subset W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{\alpha_2}{3} > 0$.
4. Fall $\mathcal{F}^3 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{\alpha_1}{3} > 0$.

$\dim W = 2$

1. Fall $\mathcal{F}^2 \cap W = (0) \Rightarrow \text{slope}(W) = -\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) < 0$.
2. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W, \mathcal{F}^2 \cap W \neq (0), W \not\subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) < 0$.
3. Fall $\mathcal{F}^1 \not\subset W, W \subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = 0$.
4. Fall $\mathcal{F}^1 \subset W, \mathcal{F}^2 \neq W, W \not\subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = 0$.
5. Fall $\mathcal{F}^1 \subset W, \mathcal{F}^2 \neq W, W \subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$.
6. Fall $\mathcal{F}^2 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) > 0$.

$\dim W = 1$

1. Fall $W \not\subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = -\alpha_1 < 0$.
2. Fall $W \not\subset \mathcal{F}^2, W \subset \mathcal{F}^3 \Rightarrow \text{slope}(W) = -\alpha_2 < 0$.
3. Fall $\mathcal{F}^1 \neq W, W \subset \mathcal{F}^2 \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_2 > 0$.
4. Fall $\mathcal{F}^1 = W \Rightarrow \text{slope}(W) = \alpha_1 > 0$.

Also $\mathcal{F}_{<,>}^{ss} = \{ \mathcal{F} \in \mathcal{F} \mid \mathcal{F}^2 \text{ enthält kein Unterobjekt, ist in keinem Unterobjekt enthalten, und es gibt kein Unterobjekt } W \text{ mit } \mathcal{F}^1 \subset W \subset \mathcal{F}^3. \}$

HN-Filtration von V bzgl. eines $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{ss}$

Vorbemerkung: Es gilt \mathcal{F}^1 ist zul. $\Leftrightarrow \mathcal{F}^3$ ist zul.

- 1.) $\mathcal{F}^1 = W', \mathcal{F}^2 = W'', \mathcal{F}^3 = W'''$ alle zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W'' \subset W''' \subset V.$
 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad -\alpha_2 \quad -\alpha_1$
- 2.) $\mathcal{F}^1 = W', \mathcal{F}^3 = W'''$ beide zul. , \mathcal{F}^2 nicht zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W' \subset W''' \subset V.$
 $\alpha_1 \quad 0 \quad -\alpha_1$
- 3.) $\mathcal{F}^2 = W''$ zul. , $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^3$ beide nicht zul. $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W'' \subset V.$
 $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$
- 4.) $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2, \mathcal{F}^3$ alle nicht zulässig.

Vorbemerkungen

- ($\dim W = 2, 5.$ Fall) und ($\dim W = 1, 3.$ Fall) bzw. ($\dim W = 2, 5.$ Fall) und ($\dim W = 3, 3.$ Fall) kommen nicht gleichzeitig vor.
 - Falls ein Unterobjekt W der Dimension drei mit $\widetilde{\mathcal{F}^2} \subset W$ ex., so gibt es bereits ein Unterobjekt \widetilde{W} der Dimension 1 mit $\widetilde{W} \subset \mathcal{F}^2$.
 - Aussage ii) gilt auch in umgekehrter Richtung.
- a) Es ex. ein 1-dim. Unterobjekt W nach 3.Fall und ein 3-dim. Unterobjekt \widetilde{W} mit $W \subset \widetilde{W}$ nach 3.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset \widetilde{W} \subset V.$
 $\alpha_2 \quad 0 \quad -\alpha_2$
 - b) Es ex. ein 2-dim. Unterobjekt W nach 5.Fall $\Rightarrow \bullet V = (0) \subset W \subset V.$
 $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \quad \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$

