Oberseminar Arithmetische Geometrie (ARGOS)

Thema: Deformationsräume von 1-dimensionalen formalen Gruppen und ihre Kohomologie

Im Oberseminar wollen wir in den nächsten beiden Semestern die Arbeit [St] von M. Strauch studieren. Gegenstand dieses Artikels ist die Realisierung der Jacquet-Langlands Korrespondenz für einen nicht-archimedischen lokalen Körper k mittels kohomologischer Methoden. Die Jacquet-Langlands Korrespondenz [DKV] vermittelt für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Bijektion zwischen den quadrat-integrierbaren glatten Darstellungen der Lie-Gruppe $\mathrm{GL}_n(k)$ und den glatten irreduziblen Darstellungen der zentral einfachen k-Algebra $D_n(k)$ mit Invariante $\frac{1}{n}$. Bei den geometrischen Objekten, welche für diese Realisierung in [St] maßgeblich sind, handelt es sich um generische Fasern von Deformationsräumen 1-dimensionaler formaler Gruppen mit Level-Strukturen. Die Realisierung der JL-Korrespondenz durch obige Räume wurde bereits durch Harris und Taylor [HT] (char $k = 0$) bzw. durch Boyer [Boy] (char $k > 0$) gezeigt. Das Bemerkenswerte an der Arbeit [St] ist, dass diese ohne globale Methoden (Shimura-Varietäten, Drinfeld Modulräume) wie sie in [HT] bzw. [Boy] benutzt wird auskommt.

Im Wintersemester werden wir uns zunächst zur Vorbereitung die nötigen Vorkenntnisse erarbeiten. Im der ersten Hälfte des Semesters werden wir uns mit den verschiedenen Begriffen von rigiden Räumen (klassischen rigiden Räumen, denen von Berkovich sowie Hubers adischen Räumen) und ihrer étalen Kohomologie beschäftigen. Im zweiten Teil untersuchen wir die Deformationsräume 1-dimensionaler formaler Gruppen und die Periodenabbildung von Gross und Hopkins, die den zur universellen Deformation gehörigen rigid analytischen Raum auf einen projektiven Raum abbildet. Mit diesen Vorbereitungen können wir dann das Hauptresultat der Arbeit von Strauch formulieren.

Vorträge

1) Rigid-analytische Varietäten (2 - 3 Vorträge):

Man führe die Kategorie der rigid-analytischen Varietäten über einem nicht-archimedischen Körper ein. Als nützliche (Leit-)Vorlage eignet sich hier der Artikel [Sch].

Man beginne mit den fundamentalen Eigenschaften der Tate- und affinoiden Algebren (u.a. Punkte 1) - 6) in [Sch]). In der Arbeit [Bo] von Bosch findet man Einzelheiten zu den Beweisen. Anschließend behandle man affinoide Unterbereiche (Weierstrass, Laurent, Rationale) vgl. [Bo, 1.6] bevor man die Grothendieck Topologie der zulässig offenen Mengen einführt. Man erkläre wie man aus einem Schema vom endlichen Typ den zugehörigen rigid-analytischen Raum gewinnt. Dito für formale Schemata formal lokal vom endlichen Typ. Ist das formale Schema π-adisch, so findet man die Konstruktion in loc.cit. Der allgemeine Fall ist in [RZ] 5.5 (vgl. auch Berthelot [Ber]) erklärt. Als Beispiel betrachte Example 5.6 in [RZ].

2) Berkovich Räume (2 Vorträge):

Man fasse im wesentlichen Kapitel 1-3 aus dem Buch [Be1] bzw. §2 aus dem Übersichtsartikel [Be5] von Berkovich zusammen. Dabei beginne man mit dem Spektrum $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ einer kommutativen Banach-Algebra $\mathcal{A}$ und diskutiere Beispiele (1.4.3, 1.4.4). Erläutere elementare Eigenschaften des Spektrums insbesondere Corollary 1.2.4, 1.3, 1.4.

Man behandle kurz Prop. 2.1.15, 2.1.16, 2.2., 2.4 und führe die Strukturgarbe auf $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ein (2.3).

Erkläre für einen Morphismus affinoider Räume $f : Y \to X$ das Innere $\mathrm{Int}(Y/X)$ und den Rand $\mathfrak{d}(Y/X)$. Beispiele zu diesen Begriffen wären wünschenswert.

Schließlich definiere man den Begriff eines analytischen Raums und eines Morphismus analytischer Räume 3.1, 3.2 . Ferner erkläre man die Beziehung zu den rigid-analytischen Varietäten vgl. 3.3.

3) Hubers adische Räume (2 Vorträge):

Man führe die Kategorie der adischen Räume nach Huber ein. Als Leitquelle eignet sich die Zusammenfassung Kap. 1.1 aus [Hu1]. Einzelheiten zur Konstruktion adischer Räume findet man in den Arbeiten [Hu2], [Hu3].

Neben der Spezialisierung resp. Generalisierung von Punkten, sollte auch auf Lemma 3.3, Theorem 3.5, Proposition 3.8 und Corollary 4.4 in [Hu2] eingegangen werden.

Ferner betrachte man Prop. 2.1 und 3.1. Anschließend diskutiere man die adischen Räume, die sich durch formale Schemata bzw. rigid-analytische Varietäten ergeben [Hu2, 4.1-4.3].

Behandle den Fall von Kurven insbesondere das Beispiel des zur affinen Gerade $\mathbb{A}^1_k$ zugehörigen adischen Raumes. [Hu4, §5].

Abschließend definiere man den Begriff eines pseudo-adischen Raums [Hu1, 1.10].

4) Étale Kohomologie (1 - 2 Vorträge):

Man führe für obige Räume den étalen Situs ein.

Rigid-Analytische Räume: [Hu1] §0

Berkovich Räume: [Be2], [Be5]

Adische Räume: [Hu1] 1.6, 2.1, (auch für pseudo-adische Räume: [Hu1, 2.3])

Anschließend gebe man elementare Eigenschaften wieder, z.B. Poincaré Dualität, Künneth-Formel, Endlichkeit der Kohomologie-Gruppen.

Man gebe elementare Eigenschaften und diverse Vergleichsisomorphismen an. [Hu1] 1.7.11, 2.1.4, 0.7, [Be2, 7.1.1,7.5.3,7.5.4]

Abschließend gehe man auf die Garbe der verschwindenden Zykel ein [Be2, §4], [Be4, Thm. 3.1], [Hu1, 0.7.7-0.7.9]

5) Deformationen formaler $\mathfrak{o}$-Moduln (1 - 2 Vorträge):

Man definiere formale $\mathfrak{o}$-Moduln wie in [Dr] und gebe wichtige Eigenschaften wie Prop. 1.6 und 1.7 an.

Anschließend definiere man Deformationen formaler $\mathfrak{o}$-Moduln, beschreibe die universelle Deformation wie in [Dr], 4 (auch mit Level-m-Struktur) und beweise Satz 2.1.2 aus [St].

6) Die Gruppenoperation (1 Vortrag):

Definiere die Modulräume $\mathcal{M}_{K_m}$ und ihre Analytifizierung M_{K_m} ([St], 2.4) und beschreibe die Gruppenoperation von $B^\times$ auf $\mathcal{M}_{K_m}$ und die von $GL_n(F)$ auf dem Turm $(\mathcal{M}_{K_m})_m$. Man gehe auch auf Prop. 2.2.5 ein.

7) Die Periodenabbildung (2 Vorträge):

Sei $\mathcal{E}$ die universelle Erweiterung mit additivem Kern des universellen $\mathfrak{o}$-Moduls über $\mathcal{M}_{\mathcal{K}'}^{(\prime)}$. Im ersten Teil zeige man, daß $\mathrm{Lie}(\mathcal{E}^{ad})$ generisch flach ist und beschreibe die Gruppenoperation mit Hilfe der Schnitte c_i ([GH], 21 und 22.4)

Anschließend definiere man die Periodenabbildung für $M_{K_0}^{(0)}$ ([GH], 23.2, 23.5), und für ganz M_{K_0} ([St], 2.6.4). Außerdem benötigen wir Prop. 23.28.

8) Strauchs Hauptresultat (1 - 2 Vorträge):

In diesem Vortrag soll das Hauptresultat von Strauch ([St], Thm. 2.5.2) erläutert und der erste Teil auch bewiesen werden. Dazu müssen zunächst die ℓ-adischen Kohomologiegruppen eingeführt und die Algebraisierung der $\mathcal{M}_K^{(j)}$ erklärt werden. ([St], 2.3, 2.5.1)

9) Quasi-Compactifications (1 Vortrag):

Dies ist der Abschnitt 3.1 in [St].

10) Consequences for formal models (1 Vortrag):

Dies ist der Abschnitt 3.2 in [St].

11) The trace of regular elliptic elements (1 Vortrag):

Man fasse [St] 3.3 inkl. Prop. 2.6.7 und Theorem 2.6.8 zusammen. In diesem Abschnitt wird die Spur von regulär elliptischen Elementen auf der Kohomologie von $M_K^{(j)}$ berechnet.

12) The trace on the EP-characteristic (1 Vortrag):

Dieser Vortrag behandelt den Abschnitt 4.1 in [St]. Hier wird gezeigt, dass die Kohomologiegruppen des Turms $(M_K)_K$ die Jacquet-Langlands Korrespondenz realisieren.

13) Non-cuspidalness outside the middle degree (1 Vortrag):

Anstatt der Abschnitte 4.2, 4.3 aus [St] beweise man das entsprechende Hauptresultat aus der Arbeit von Mieda [Mi].

References

[Be1] Berkovich, Vladimir G., *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, **33**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990. x+169 pp.

[Be2] Berkovich, Vladimir G., *Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **78** (1993), 5–161 (1994).

[Be3] Berkovich, Vladimir G., *Vanishing cycles for formal schemes*, Invent. Math. **115** (1994), no. 3, 539–571.

[Be4] Berkovich, Vladimir G., *Vanishing cycles for formal schemes II*, Invent. Math. **125** (1996), no. 2, 367–390.

[Be5] Berkovich, Vladimir G., *p-adic analytic spaces*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. **II** (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, Extra Vol. II, 141–151 (electronic).

[Ber] Berthelot, P., *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, Première partie, Prpublication IRMAR 96-03, 89 pages (1996).

[Bo] Bosch, S., *Lectures on Formal and Rigid Geometry* SFB 478-Preprint **378**, Münster http://wwwmath.uni-muenster.de/sfb/about/publ/bosch.html

[Boy] Boyer, P., *Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale*, Invent. Math. **138** (1999), no. 3, 573–629.

[DKV] Deligne, P.; Kazhdan, D.; Vignéras, M.-F., *Représentations des algèbres centrales simples p-adiques*, Representations of reductive groups over a local field, 33–117, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984.

[Dr] Drinfeld, V., *Elliptic modules* Math. USSR Sbornik **23** (1974), no. 4, 561–592.

[GH] B. H. Gross, M. J. Hopkins, *Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space*, in: Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992), Contemp. Math. **158**, Amer. Math. Soc. (1994), 23–88.

[HT] Harris, Michael; Taylor, Richard *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, With an appendix by Vladimir G. Berkovich. Annals of Mathematics Studies, *151*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. viii+276 pp.

[Hu1] Huber, R., *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects of Mathematics, **E30**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996. x+450 pp.

[Hu2] Huber, R., *Continuous valuations*, Math. Z. **212** (1993), no. 3, 455–477.

[Hu3] Huber, R., *A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties*, Math. Z. **217** (1994), no. 4, 513–551.

[Hu4] Huber, R., *Swan representations associated with rigid analytic curves*, J. Reine Angew. Math. **537** (2001), 165–234.

[Mi] Mieda, Y. *Non-cuspidality outside the middle degree of l-adic cohomology of the Lubin-Tate tower*, http://arxiv.org/abs/0806.0697.

[RZ] Rapoport, M.; Zink Th., *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, **141**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. xxii+324 pp.

[Sch] Schneider, P., *Basic notions of rigid analytic geometry*, Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996), 369–378, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **254**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

http://wwwmath.uni-muenster.de/reine/inst/schneider/publ/pap/index.html

[St] Strauch, Matthias, *Deformation spaces of one-dimensional formal modules and their cohomology*, Adv. Math. **217** (2008), no. 3, 889–951.

Sascha Orlik, Eva Viehmann.