ΑΡΓΟΣ, WS 2007/08

p-adische Modulformen

Die Theorie der p-adischen Modulformen wurde von Serre, Dwork und Katz begründet, um spezielle Werte der Riemannschen Zetafunktion p-adisch zu interpolieren. Die p-adischen Eigenschaften klassischer Modulformen, zum Beispiel Kongruenzeigenschaften der q-Entwicklung, sollen hierbei von den p-adischen Modulformen widergespiegelt werden. Serre bewies Kongruenzresultate für Modulformen, mit deren Hilfe sich die Nenner von Eisensteinreihen und damit der Bernoullizahlen abschätzen lassen.
Der erste Teil des Seminars führt nach einer Wiederholung der klassischen Theorie der Modulformen über $\mathbb{C}$ bzw. allgemeineren Basen in die Theorie der p-adischen Modulformen ein. In einem zweiten Teil werden verschiedene Anwendungen der Theorie besprochen, unter anderem p-adische Galoisdarstellungen und Serres Kongruenzresultate für Modulformen, mit deren Hilfe sich die Nenner von Eisensteinreihen und damit der Bernoullizahlen abschätzen lassen.

Vortrag 1 (1-2 Sitzungen): (klassische Modulformen über $\mathbb{C}$)
Definition von Modulformen über $\mathbb{C}$, Beispiele (G_k, E_k) ([Se1] VII), modulare Interpretation, Kongruenzuntergruppen, q-Entwicklung in den Spitzen und Tate-Kurve, Nenner der q-Entwicklung, q-Entwicklungsprinzip ([K] A1.1, A1.2, [Si] p. 342 – 357).

Vortrag 2 (1 Sitzung): (Modulformen über beliebigen Basen)
Definition von Modulformen der Stufe N als Funktionen auf der Menge der Tripel $(E/R, \omega, \alpha_N)$ für E eine elliptische Kurve, ω ein nichtverschwindendes Differential und α_N eine N-Niveau-Struktur, für $N \geq 3$ zweite Interpretation als Funktionen auf der Menge der Paare (E, α_N) (evtl. auch für $\Gamma_1(N)$), Holomorphie an den Spitzen (mittels Tate-Kurve), Spitzenformen als globale Schnitte, Kodaira-Spencer, q-Entwicklungsprinzip und Basiswechsel für $N \geq 3$ ([K] 1.2. – 1.7., [KM] 10.13.11).

Vortrag 3 (1-2 Sitzungen): (p-adische Modulformen)
Motivation (Kongruenzeigenschaften der q-Entwicklung), Definition p-adischer Modulformen, grundlegende Eigenschaften, q-Entwicklungsprinzip, Zusammenhang zu Limiten klassischer Modulformen ([K] 2.0 – 2.7, [G] I,2).

Vortrag 4 (1 Sitzung): (Verallgemeinerte p-adische Modulformen) Definition verallgemeinerter p-adischer Modulformen, grundlegende Eigenschaften, q-Entwicklung, Zusammenhang zu klassischen und p-adischen Modulformen ([G] I.3.1 – I.3.5).

Vortrag 5 (1-2 Sitzungen): Dividierte Kongruenzen ([G] I.3.6), Hecke-Operatoren ([G], II.1 und III.1 für die Definition der letzten Hecke-Algebra), Dualitätssätze ([G], III.1.2 und 3).

Vortrag 6 (1 Sitzung): Gauß-Manin-Zusammenhang, Transformationsgleichung für Ramanujans P-Funktion, Katz' θ-Operator. Dies ist A1.3-A1.4 in [K]. Außerdem sollten die benötigten Resultate aus A1.2 (Zusammenhang zur deRham-Kohomologie) diskutiert werden.

Vortrag 7 (1-2 Sitzungen): Resultate von Serre über Kongruenzen von Modulformen, Abschätzungen für die Nenner von Eisensteinreihen und Bernoullizahlen ([K], 4.1-4)

Vortrag 8 (1-2 Sitzungen): Familien von Modulformen ([G], III.2), Deformationen von Restklassenformen (III.4), p-adische Galoisdarstellungen (III.5)

Vortrag 9: Der U-Operator, überkonvergente Formen, Endlichkeitssätze (je nach verbleibender Zeit, eine Zusammenfassung von [G], II.2 und 3)

Literatur

[B] G. Böckle, Arbeitsgemeinschaft über p-adische Modulformen, Programm für die kleine AG am 30. 01. 1999 und 22. 02. 1999.

[CL] A. Chambert-Loir, Formes modulaires p-adiques, math.NT/9712297.

[G] F. Gouvêa, Arithmetic of p-adic modular forms, LNM 1304, Springer-Verlag.

[K] N. Katz, *p-adic properties of modular schemes and modular forms* in Modular functions of one variable III, LNM 350, p. 69–190, Springer-Verlag, SB 1049.

[KM] N. Katz, B. Mazur, Arithmetic Moduli of Elliptic Curves, Annals of Math Studies 108, Princeton University Press.

[Se1] J.-P. Serre, Cours d'arithmétique, Presses Universitaires de France.

[Se2] J.-P. Serre, *Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques* in Modular functions of one variable III, LNM 350, p.191–268, Springer-Verlag, SB 1049.

[Si] J. H. Silverman, The Arithmetic of Elliptic Curves, GTM 106, Springer-Verlag.